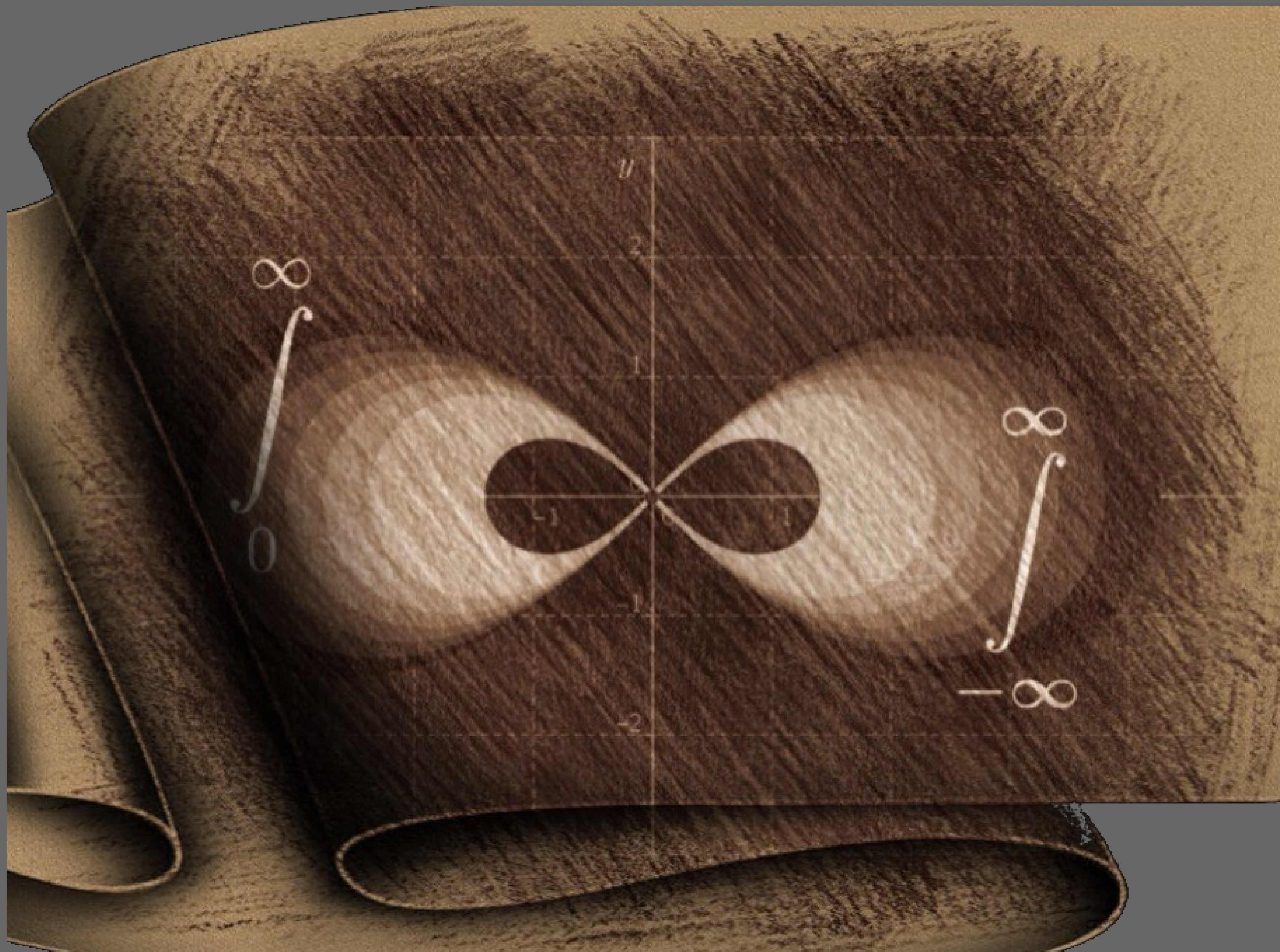
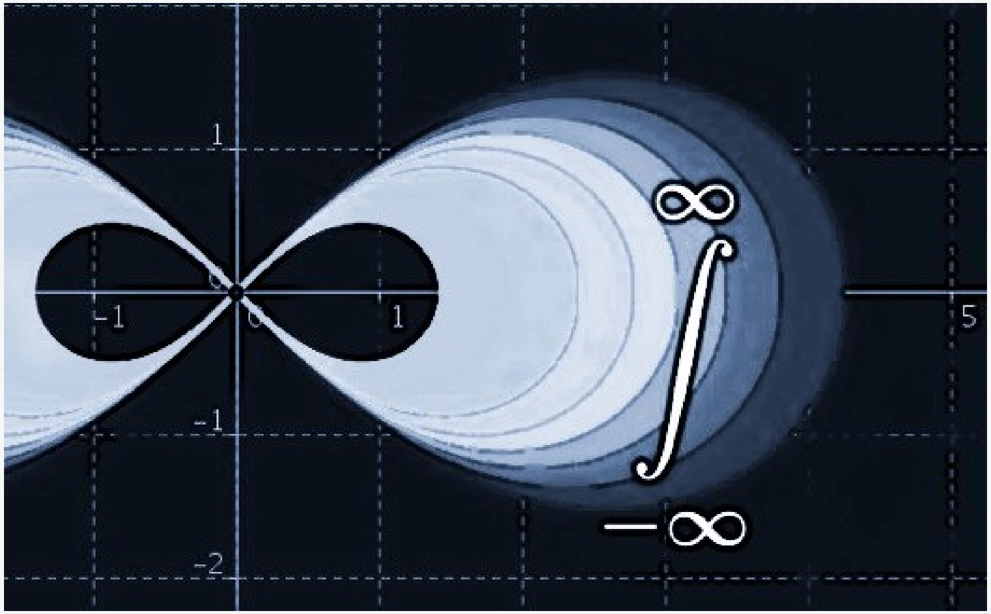


Uneigentliche Integrale

Folgende Gründe können die Integrierbarkeit verhindern:

- Die Funktion $f(x)$ ist im endlichen Integrationsintervall $[a, b]$ nicht beschränkt, d.h. sie hat dort mindestens eine Unendlichkeitsstelle.
- Das Integrationsintervall ist unendlich, z.B. $\int_a^\infty f(x)\, dx$

Wie können wir solche Unendlichkeiten behandeln?



Falls das Integrationsintervall unendlich ist, berechnet man das Integral durch zusätzlichen Grenzübergang

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^{\lambda} f(x)\, dx$$

Der Grenzwert ist vorhanden – konvergentes uneigentliches Integral

Der Grenzwert ist nicht vorhanden – divergentes uneigentliches Integral

Integraltypen:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

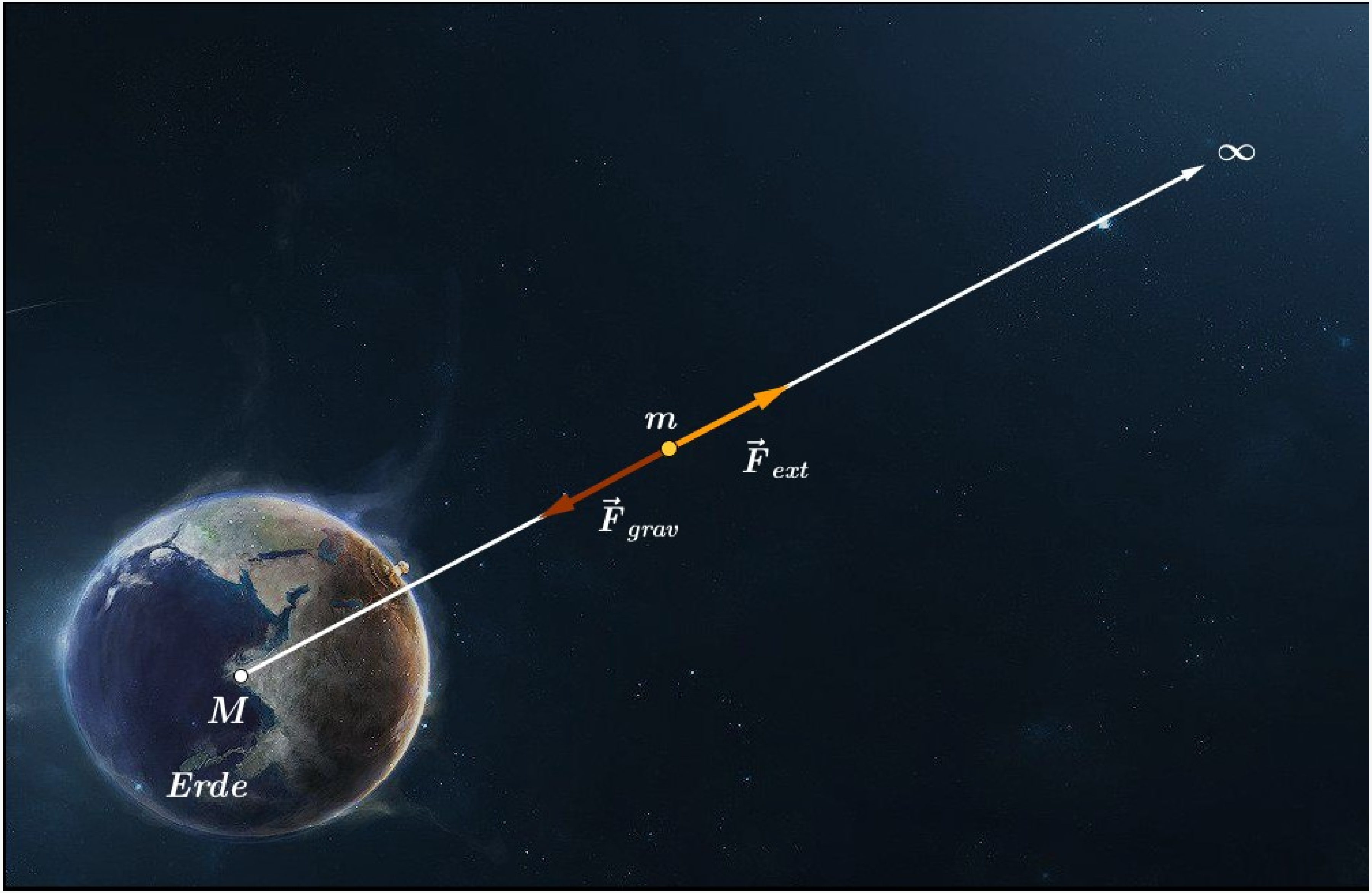


Abb. 1: Zur Berechnung der Arbeit im Gravitationsfeld der Erde

Eine Masse m wird im Gravitationsfeld der Erde aus der Entfernung R ins Unendliche gebracht. Wir bestimmen die Arbeit W, die man benötigt, um eine Masse m im Gravitationsfeld der Erde unendlich weit weg zu bringen.

Gravitationskraft:

$$\vec{F}_{grav} = -\,G\,\frac{M\,m}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

G – Gravitationskonstante, M – Erdmasse, r – Abstand der Masse m von dem Erdzentrum

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{grav}$$

Die Berechnung der Arbeit, die verrichtet wird, um die Masse m von R bis ins Unendliche zu bringen, führt zu dem uneigentlichen Integral:

$$W = \int_R^\infty F_{ext}\,dr = \int_R^\infty G\,\frac{M\,m}{r^2}\,dr = G\,M\,m\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

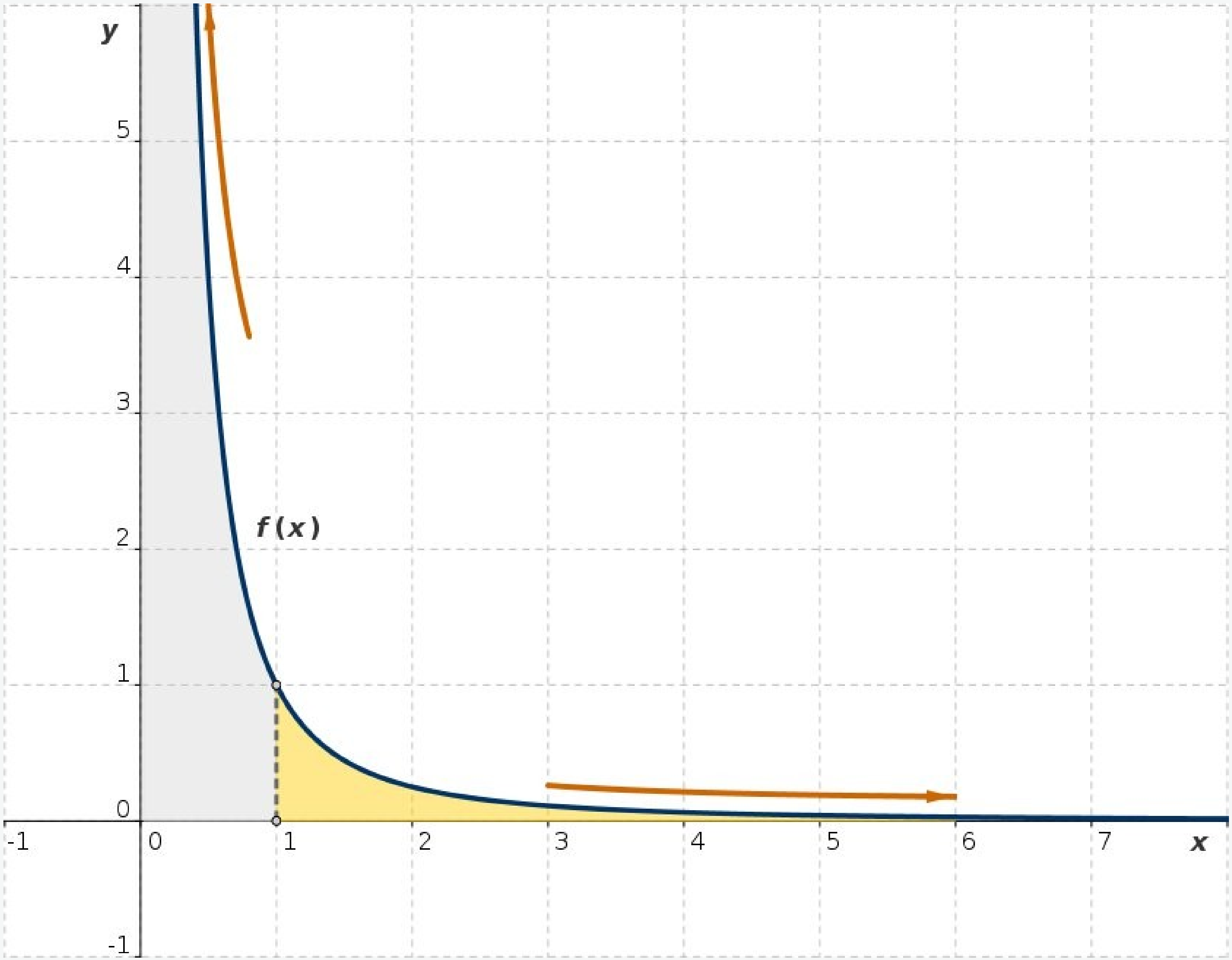


Abb. 1-2: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = 1/x^2$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

- Die Funktion $f(x)$ ist im endlichen Integrationsintervall $[0, 1]$ nicht beschränkt, sie hat dort eine Unendlichkeitsstelle.

- Das Integrationsintervall $[1, \infty]$ ist unendlich

  Um das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ zu bestimmen, berechnen wir zuerst ein bestimmtes Integral $\int_1^\lambda \frac{dx}{x^2}$ und danach bilden wir den Grenzwert $\lambda \to \infty$:

1. $\displaystyle\int_1^\lambda \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right)\Bigg|_1^\lambda = -\frac{1}{\lambda} + 1$

2. $\displaystyle\lim_{\lambda \to \infty} \int_1^\lambda \frac{dx}{x^2} = \lim_{\lambda \to \infty} \left(-\frac{1}{\lambda} + 1 \right) = 1$

Dieses uneigentliche Integral konvergiert gegen 1:

$$\int_1^\infty \frac{d\,x}{x^2} = 1$$

$$\lambda = 10 \qquad : \int_1^{10} \frac{d\,x}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9$$

$$\lambda = 100 \qquad : \int_1^{100} \frac{d\,x}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^{100} = -\frac{1}{100} + 1 = 0.99$$

$$\lambda = 1000 \qquad : \int_1^{1000} \frac{d\,x}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^{1000} = -\frac{1}{1000} + 1 = 0.999$$

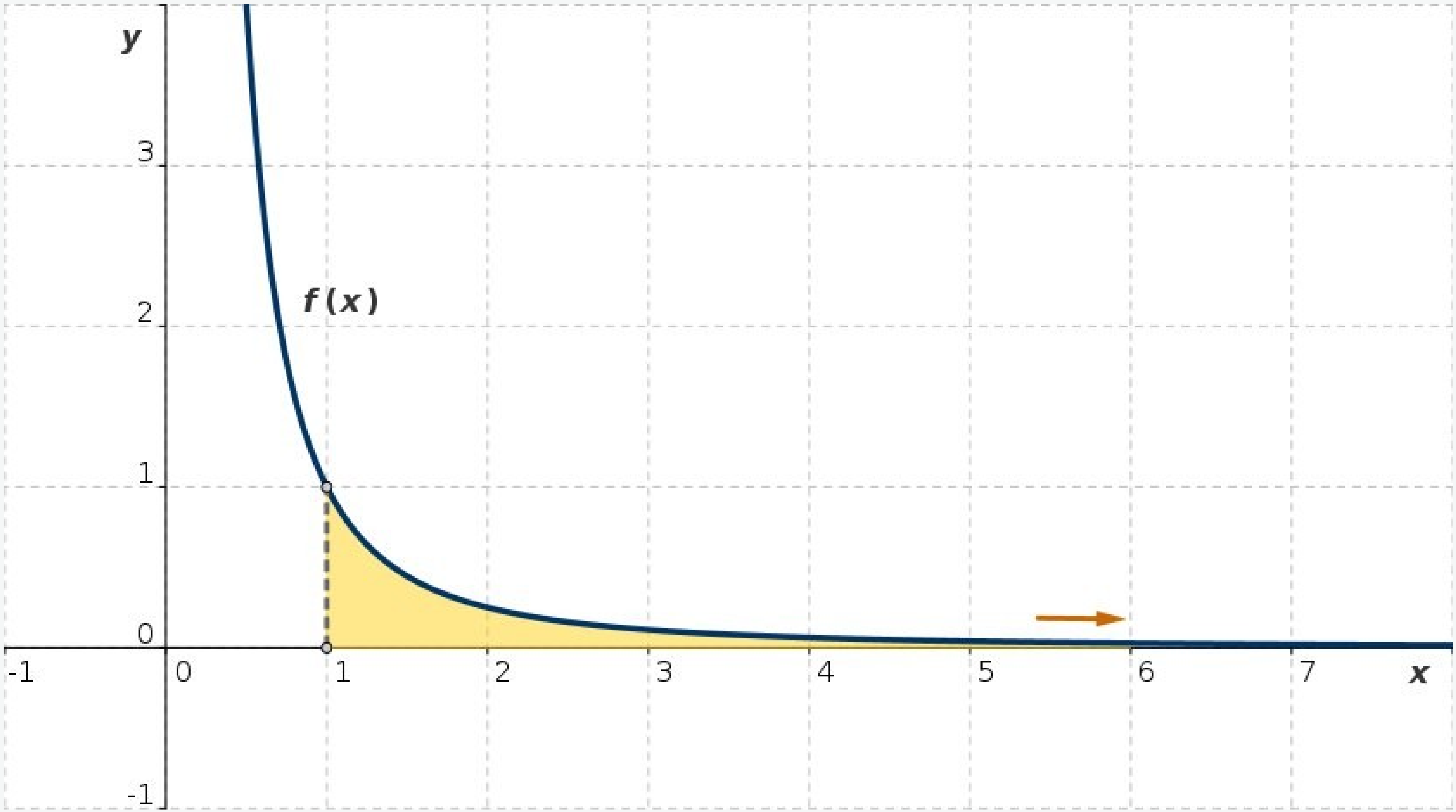
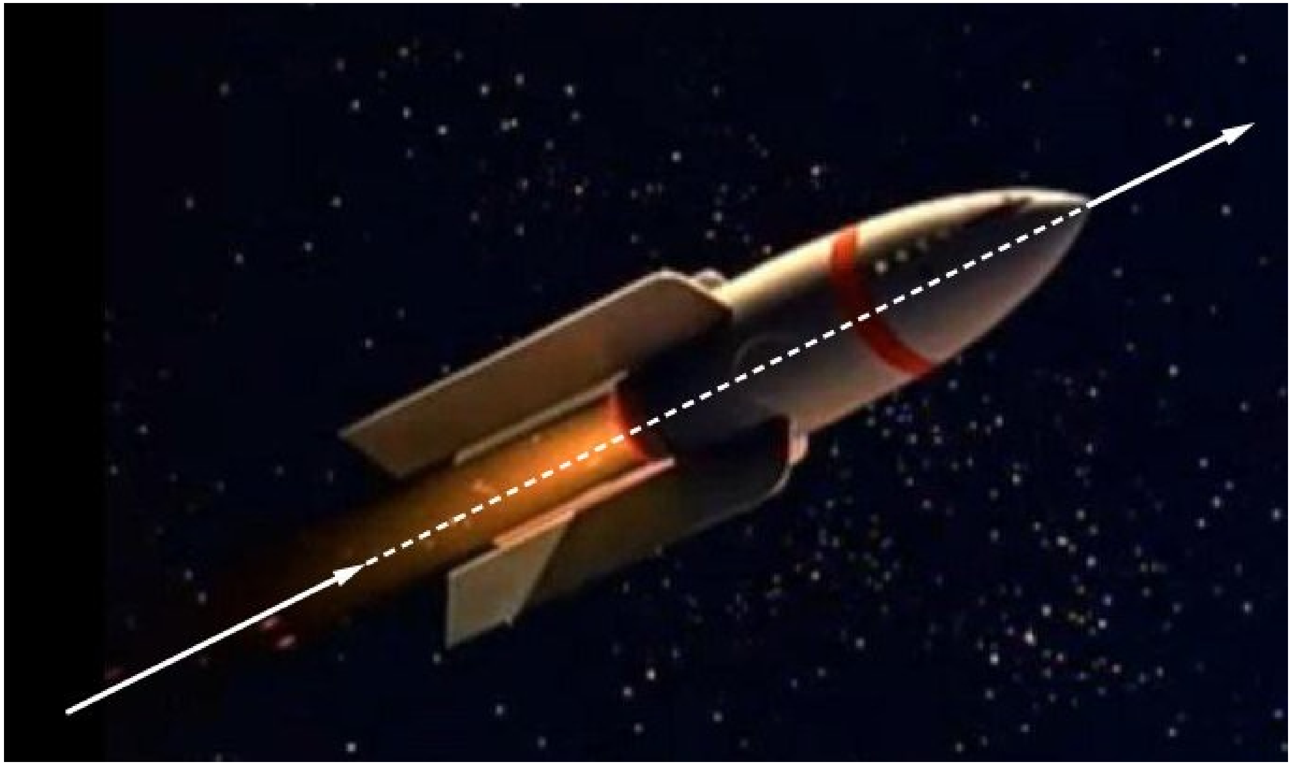


Abb. B1: Zur Berechnung des uneigentlichen Integrals der Funktion f (x) = 1/x² im Intervall [1, ∞]: *die Funktion f (x) = 1/x² im Definitionsbereich (0, ∞) und die Fläche unter der Kurve im Bereich* [1, ∞)

Die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = 1/x^2$ von 1 bis ins Unendliche hat den Flächeninhalt 1:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\lambda \to \infty} \int_1^\lambda \frac{dx}{x^2} = \lim_{\lambda \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} \left(-\frac{1}{\lambda} + 1 \right) = 1$$



http://www.youtube.com/watch?v=FRCQ2Cu3bSE

$$W = G\,M\,m \lim_{\lambda \to \infty} \int_R^{\lambda} \frac{dr}{r^2} = G\,M\,m \lim_{\lambda \to \infty} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{\lambda} = G\,M\,m \lim_{\lambda \to \infty} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\lambda} \right] = G\,\frac{M\,m}{R}$$

$$W = G\,\frac{M\,m}{R}$$

Uneigentliche Integrale: Aufgaben 1-3

Berechnen Sie folgende Integrale

Aufgabe 1: $I_a = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad I_b = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$

Aufgabe 2: $I_a = \int_1^\infty \frac{dx}{x^3}, \qquad I_b = \int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$

Aufgabe 3: $I = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \qquad (p > 1)$

Die Integrale sind uneigentlich an der oberen Grenze. Die Bestimmung der Werte erfolgt nach der Formel

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^\lambda f(x)\, dx}$$

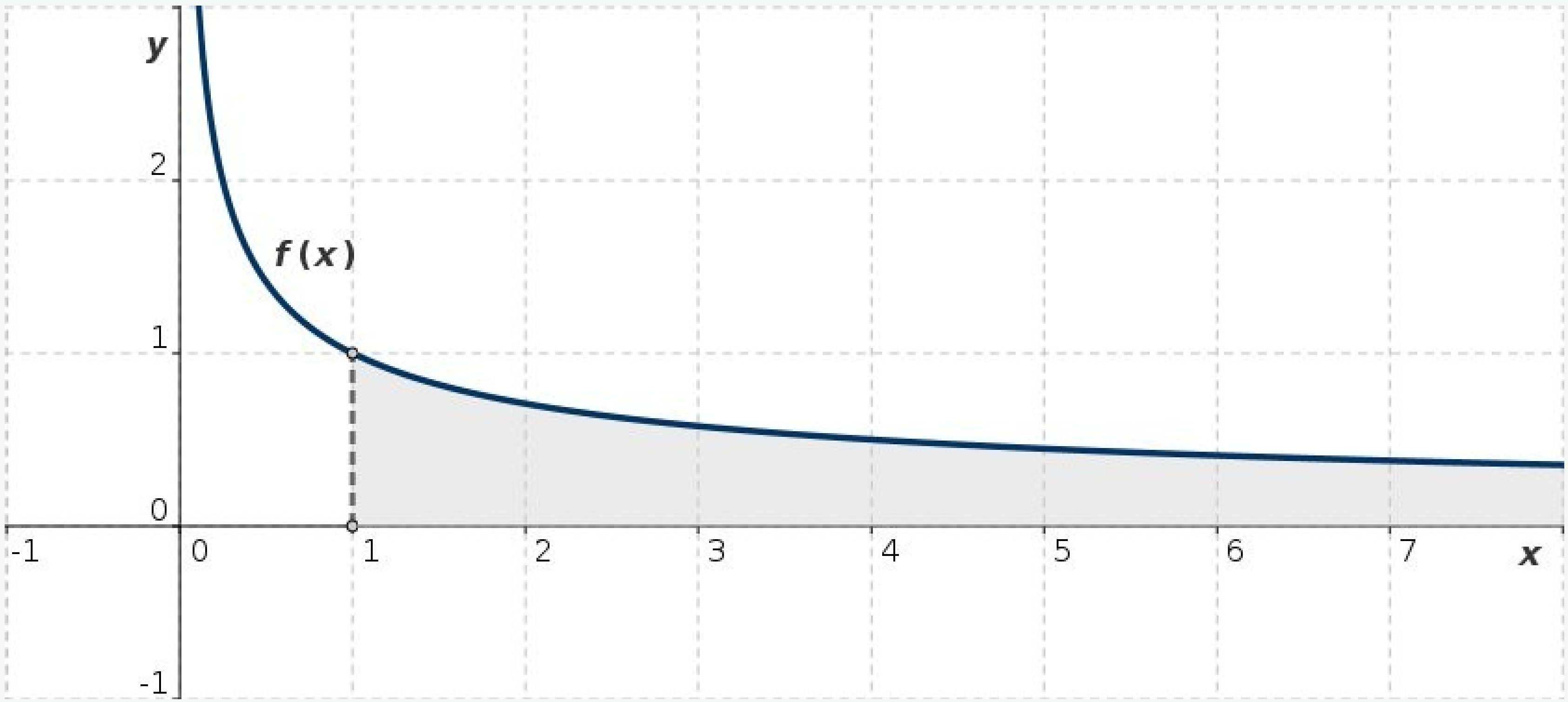


Abb. 2-1a: Zur Berechnung des Integrals der Funktion y = 1/√x im Intervall [1, ∞)

$$I_a = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\lambda \to \infty} \int_1^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{\lambda \to \infty} \left[\sqrt{x} \right]_1^{\lambda} = 2 \lim_{\lambda \to \infty} \left[\sqrt{\lambda} - 1 \right] = \infty$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\sqrt{\lambda}$ $(\lambda \to \infty)$ beliebig groß wird.

Dieses uneigentliche Integral ist divergent.

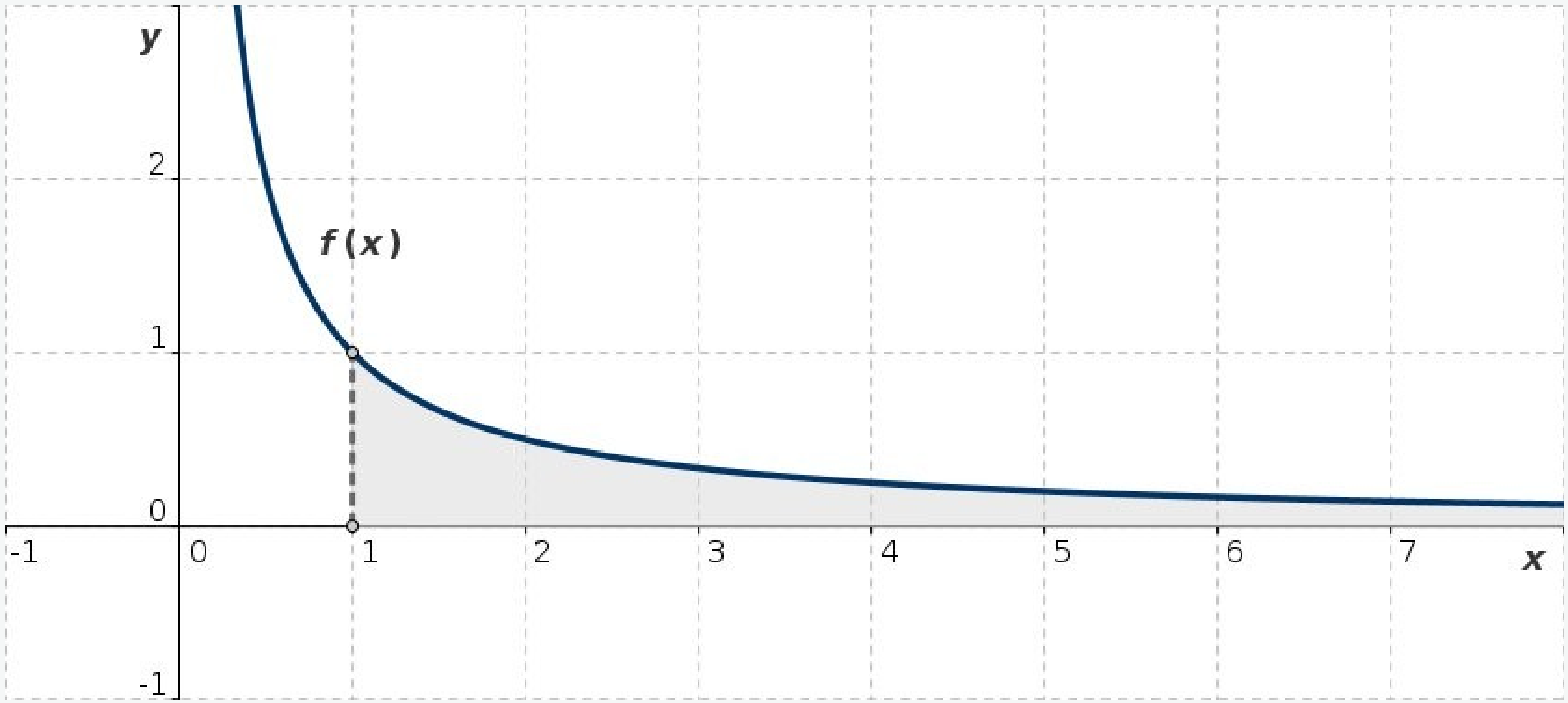


Abb. 2-1b: Zur Berechnung des Integrals der Funktion y = 1/x im Intervall $[1, \infty)$

$$I_b = \int_1^\infty \frac{d\,x}{x} = \lim_{\lambda \to \infty} \int_1^\lambda \frac{d\,x}{x} = \lim_{\lambda \to \infty} \left[\ln x \right]_1^\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} \left[\ln \lambda - \ln 1 \right] = \infty$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\ln \lambda \; (\lambda \to \infty)$ beliebig groß wird.

Dieses uneigentliche Integral ist divergent.

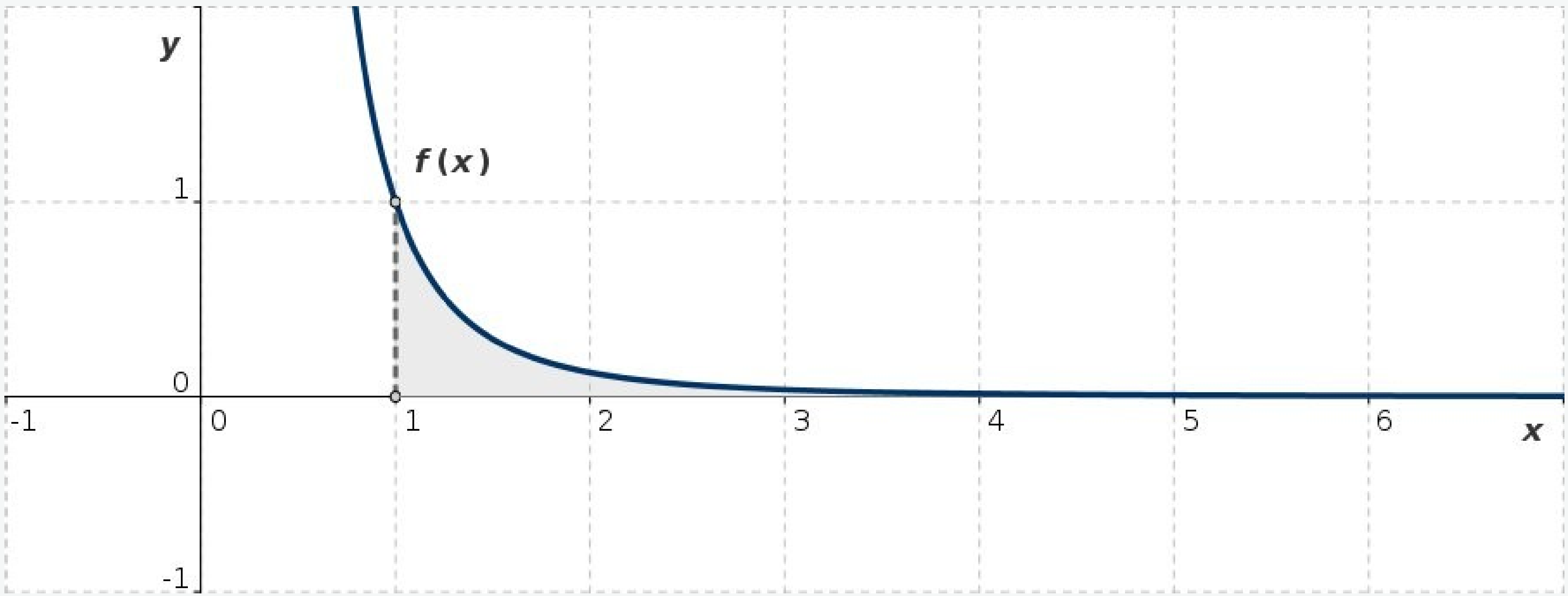


Abb. 2-2a: Zur Berechnung des Integrals der Funktion y = 1/x³ im Intervall [1, ∞)

$$I_a = \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{\lambda \to \infty} \int_1^\lambda x^{-3}\, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \left[-\frac{1}{2}\, x^{-2} \right]_1^\lambda =$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2} \right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Dieses uneigentliche Integral ist konvergent.

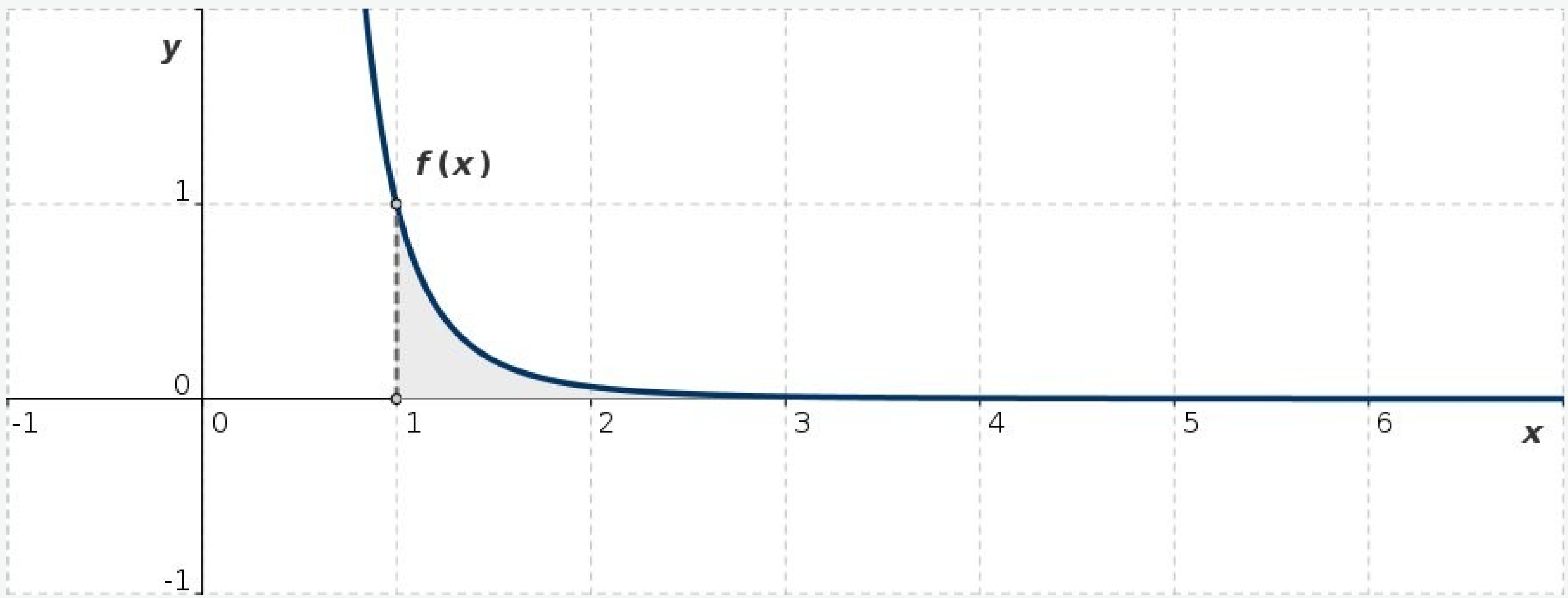


Abb. 2-2b: Zur Berechnung des Integrals der Funktion $y = 1/x^4$ im Intervall $[1, \infty)$

$$I_b = \int_1^\infty \frac{dx}{x^4} = \lim_{\lambda \to \infty} \int_1^\lambda x^{-4}\, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \left[-\frac{1}{3}\, x^{-3} \right]_1^\lambda =$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\,\lambda^3} \right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Dieses uneigentliche Integral ist konvergent.

$$I = \int_1^{\infty} \frac{d\,x}{x^p} = \lim_{\lambda \to \infty} \int_1^{\lambda} x^{-p}\,d\,x = \lim_{\lambda \to \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{(-p+1)} \right]_1^{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{-p+1} \cdot \lim_{\lambda \to \infty} \left[\frac{1}{\lambda^{p-1}} - 1 \right] = \frac{1}{p-1} \qquad (p > 1)$$

Zusammenfassung: Das Integral $I = \int_1^{\infty} \frac{d\,x}{x^p}$

divergiert, falls $p \leq 1$ und konvergiert, falls $p > 1$

Berechnen Sie folgende Integrale

Aufgabe 4:

$$I_a = \int_0^{\infty} e^x \, dx$$

$$I_b = \int_0^{\infty} e^{-kx} \, dx, \qquad k > 0$$

Aufgabe 5:

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} \, dx$$

Aufgabe 6:

$$I = \int_0^{\infty} \cos x \, dx$$

Aufgabe 7:

$$I = \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\left(\sqrt{2 - x}\right)^3}$$

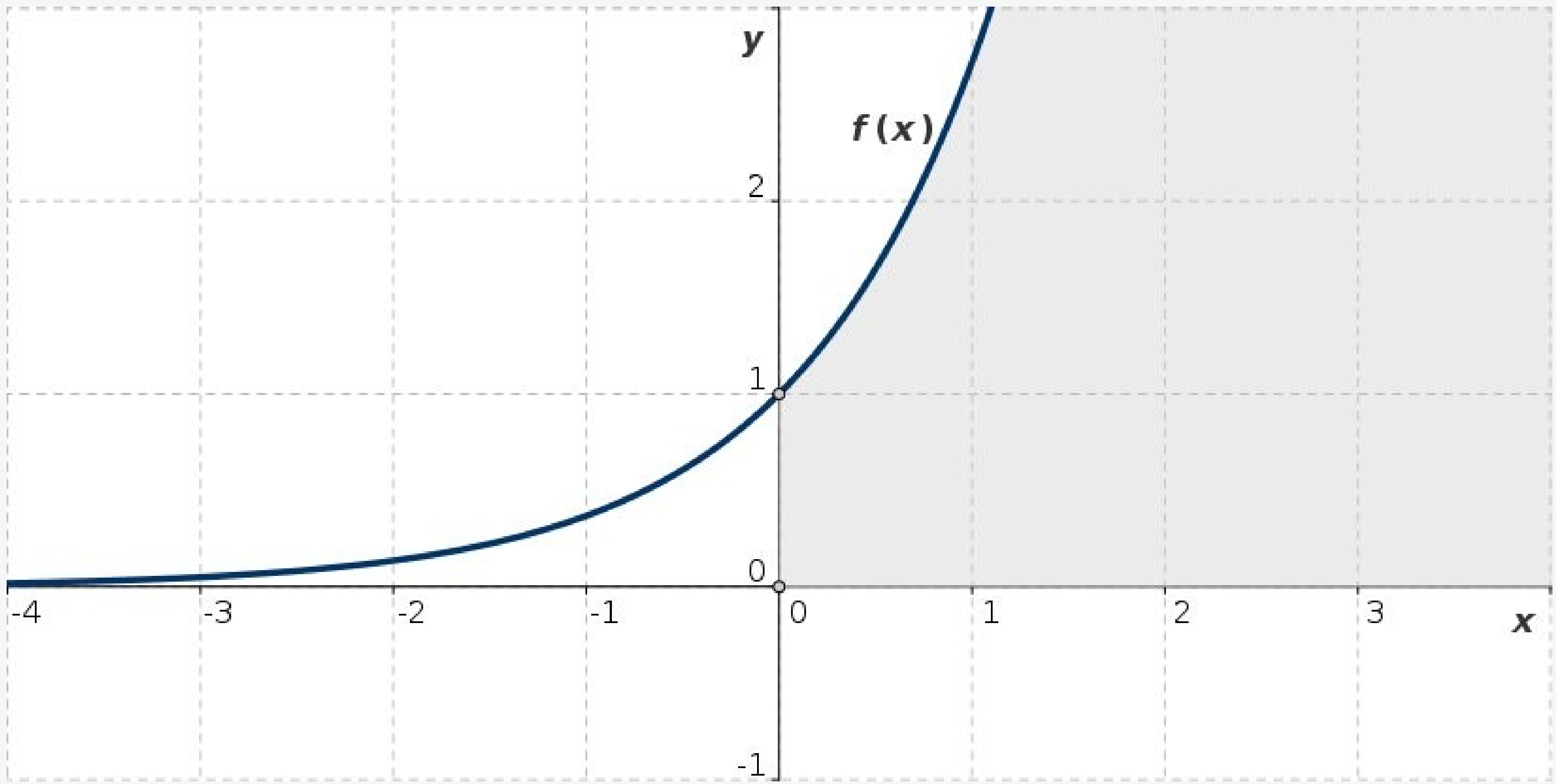


Abb. L4: Zur Berechnung des Integrals der Funktion y = exp(x) im Intervall [0, ∞)

$$I_a = \int_0^\infty e^x \, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\lambda e^x \, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \left[e^x \right]_0^\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} \left[e^\lambda - 1 \right] = \infty$$

Dieses uneigentliche Integral ist divergent.

$$I_b = \int_0^{\infty} e^{-k\,x}\,dx\,, \qquad k > 0$$

$$\int_0^{\lambda} e^{-k\,x}\,dx = -\frac{1}{k}\left(e^{-k\,x}\right)_0^{\lambda} = -\frac{1}{k}\left(e^{-k\,\lambda} - 1\right)$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\lambda} e^{-k\,x}\,dx = -\frac{1}{k}\lim_{\lambda \to \infty}\left(e^{-k\,\lambda} - 1\right) = -\frac{1}{k}\,(0 - 1) = \frac{1}{k}$$

Uneigentliche Integrale: Lösung 4

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \quad \to \quad \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^{\lambda} f(x)\, dx$$

Falls man versteht, wie man Unendlichkeit in den Integrationsgrenzen behandelt, kann man die Schreibweise vereinfachen

$$I_b = \int_0^{\infty} e^{-k\,x}\, dx = -\frac{1}{k}\left(e^{-k\,x} \right)_0^{\infty} = -\frac{1}{k}\left(e^{-k\,\infty} - 1 \right) = \frac{1}{k}$$

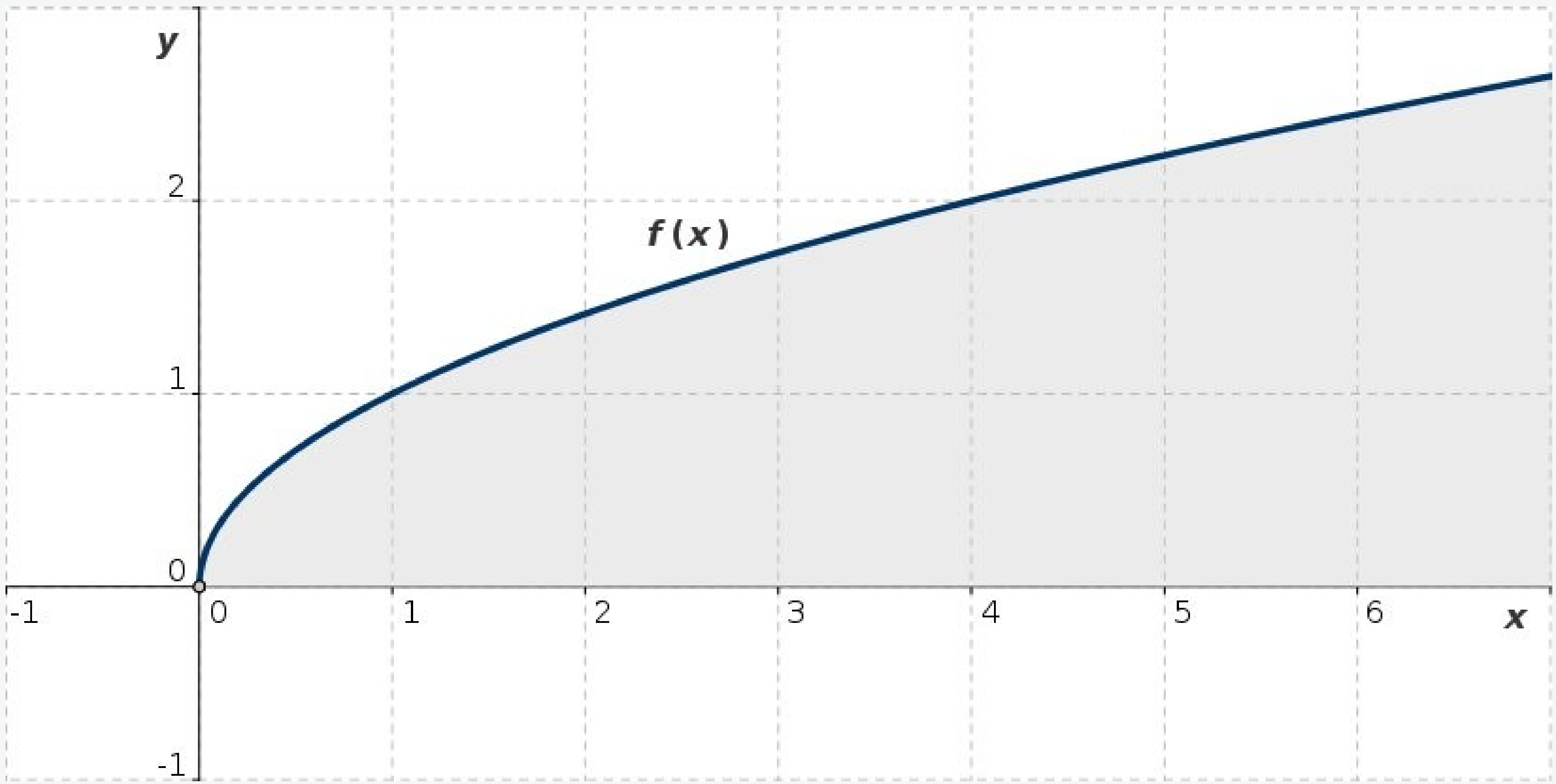


Abb. L5: Zur Berechnung des Integrals der Funktion $y = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, \infty)$

$$I = \int_0^\infty \sqrt{x}\, dx = \int_0^\infty x^{1/2}\, dx = \left[\frac{2}{3}\, x^{3/2}\right]_0^\infty = \infty$$

Dieses uneigentliche Integral ist divergent.

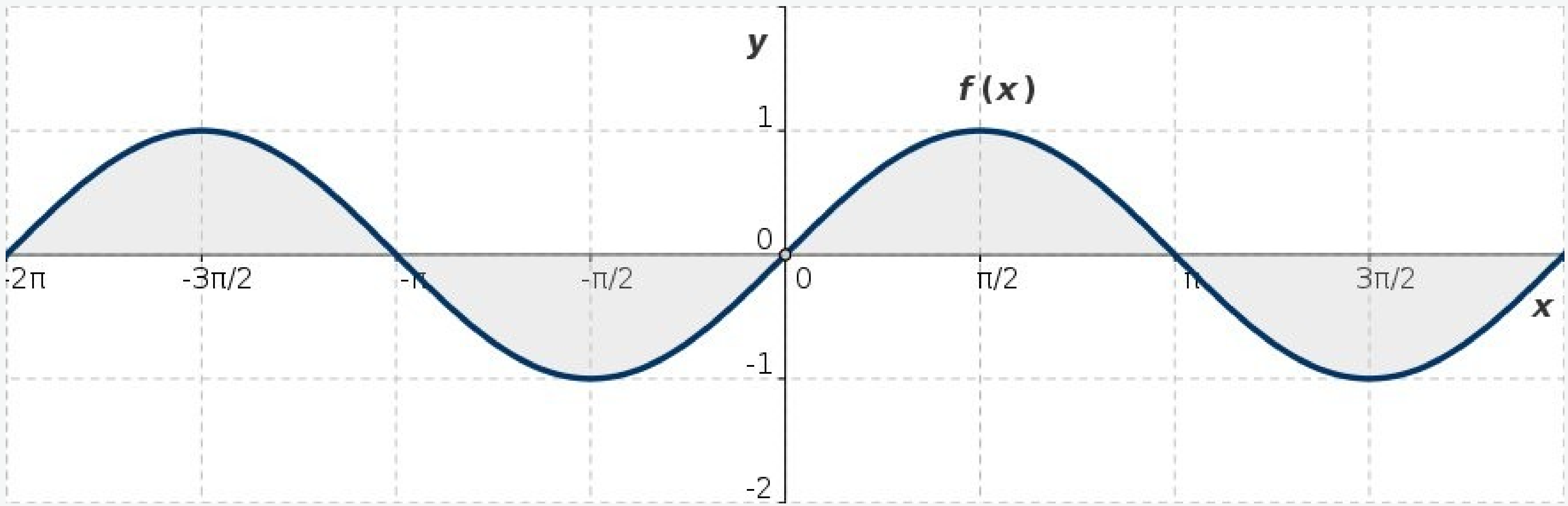


Abb. L6: Zur Berechnung des Integrals der Funktion y = cos (x)

$$I = \int_0^{\infty} \cos x \; d\, x = \left[\sin x\right]_0^{\infty}$$

Der Grenzwert existiert nicht. Die Sinusfunktion oszilliert für sehr große Argumente und nähert sich keinem festen Wert. Deswegen existiert auch das uneigentliche Integral nicht.

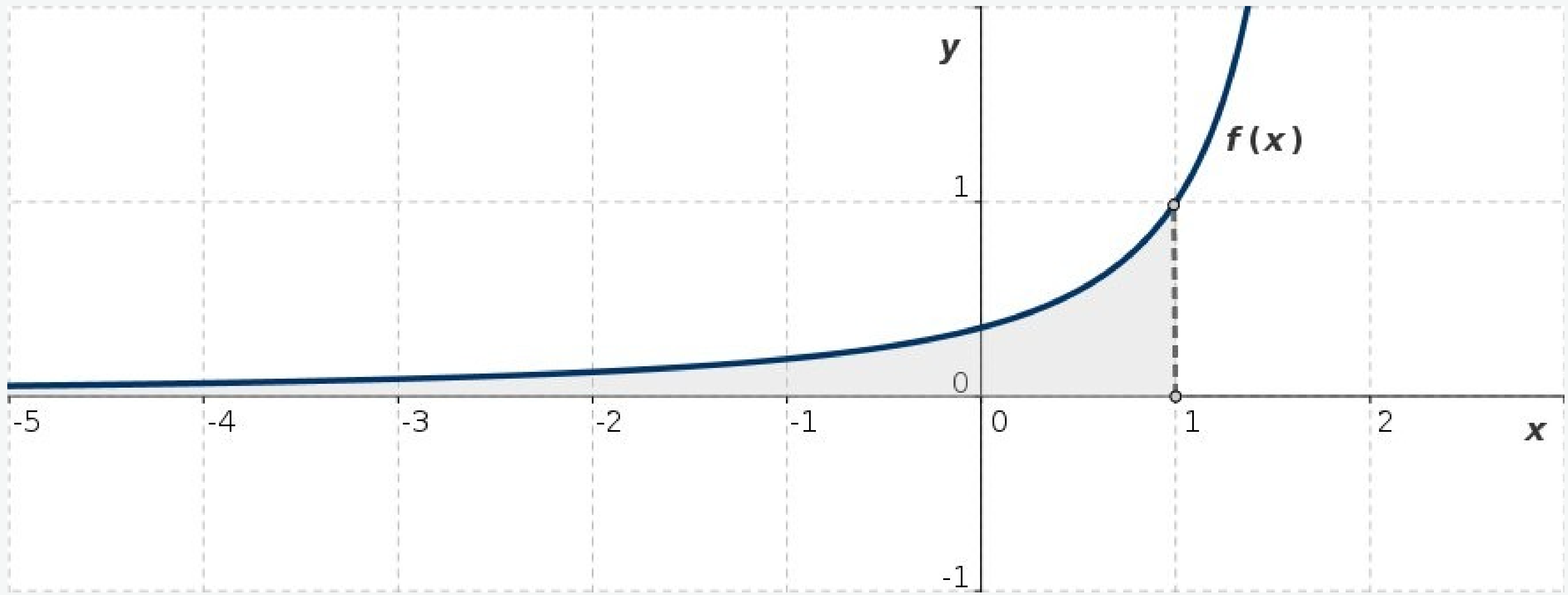


Abb. L7: Zur Berechnung des Integrals der Funktion y = f (x)

$$I = \int_{-\infty}^{1} \frac{d\,x}{\sqrt{(2-x)^3}} = \int_{-\infty}^{1} (2-x)^{-3/2}\, d\,x = \left[2\,(2-x)^{-1/2}\,\right]_{-\infty}^{1} =$$

$$= 2 \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) = 2$$