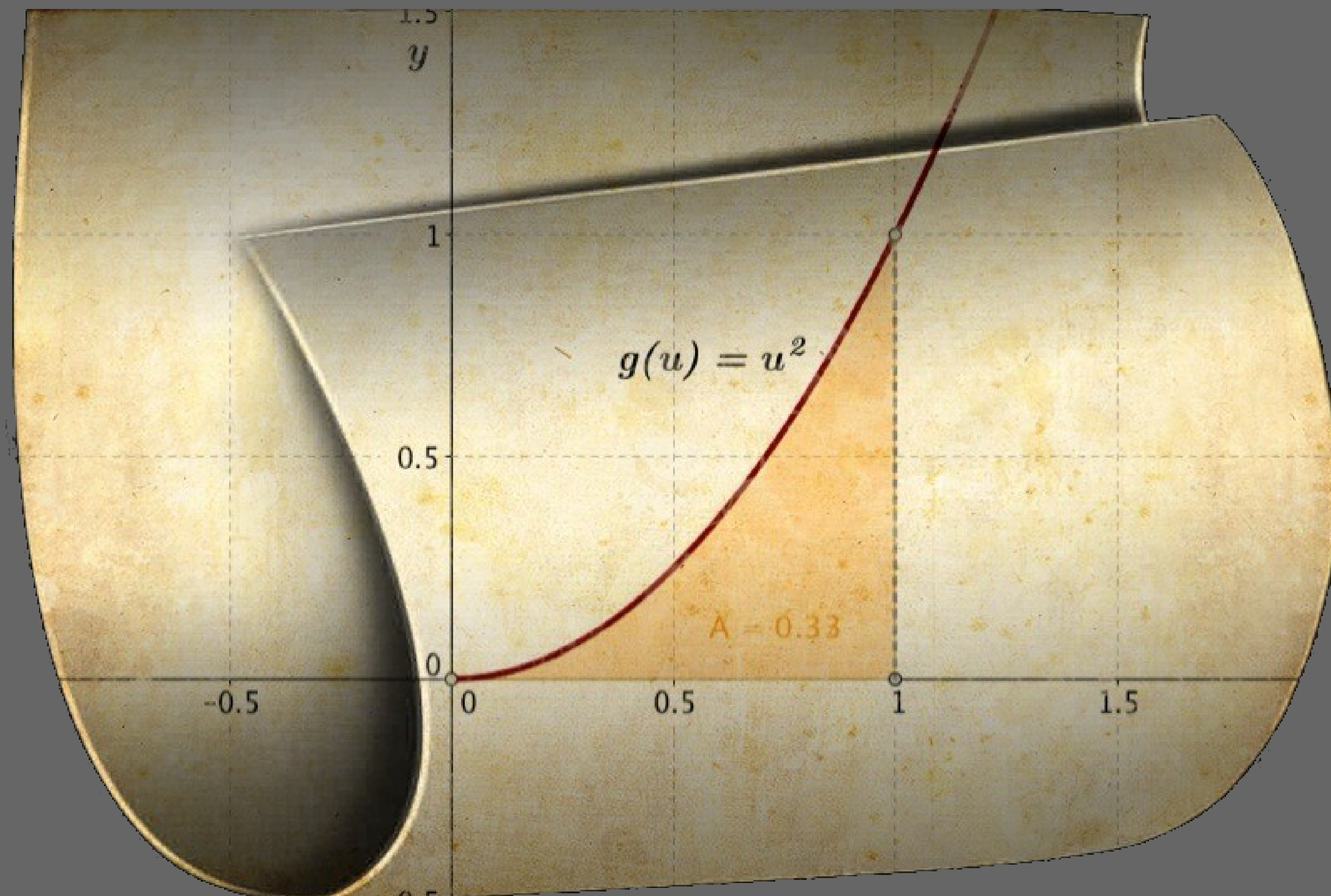
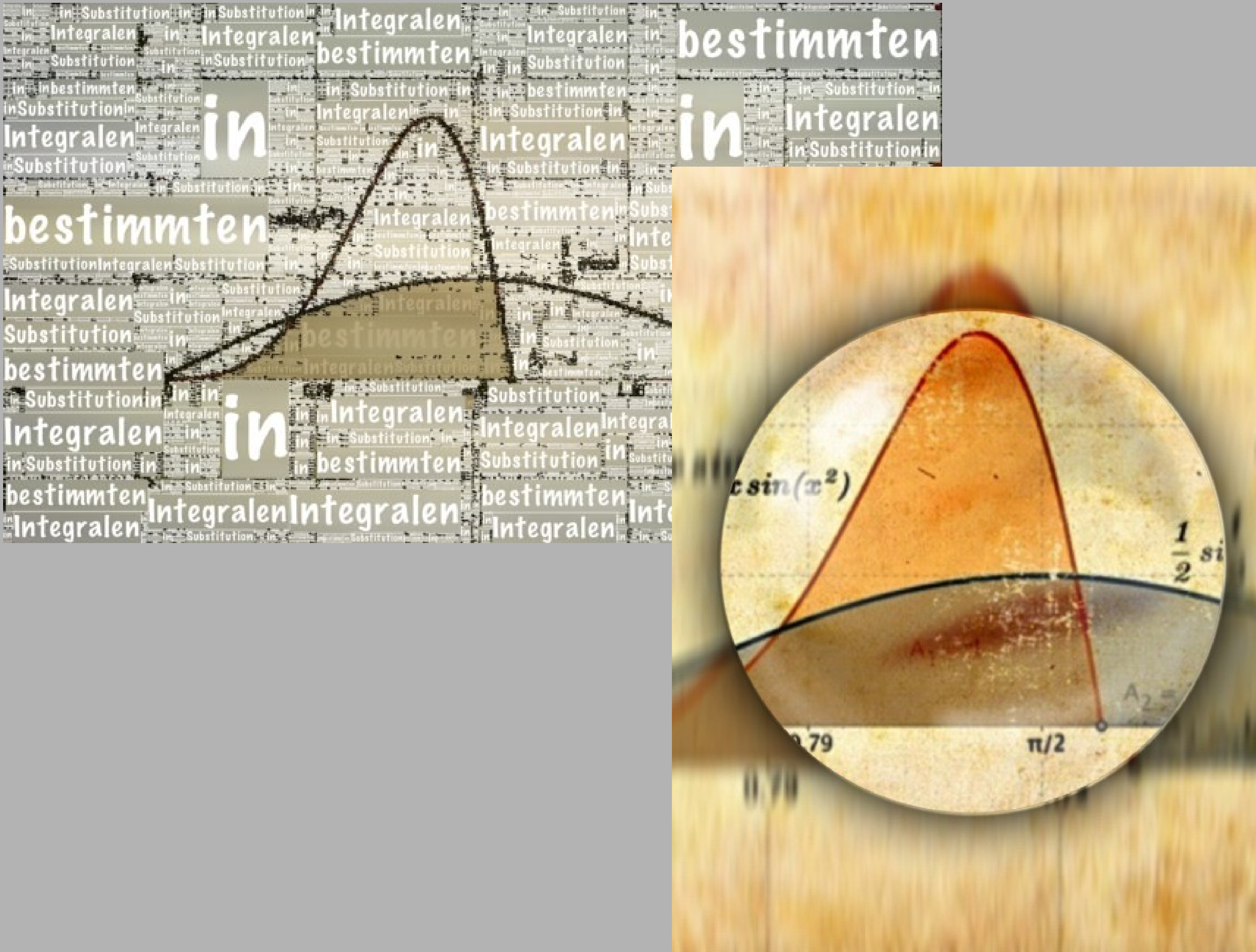



# Substitution bei bestimmten Integralen


Integralen
bestimmten
in
Substitution
$\frac{1}{2}$
π/2

## Was wir wissen:

Wann berechnet man Integrale mit Hilfe einer Substitution?

Wie berechnet man Integrale durch Substitution?

## Was werden wir wissen?

Wie ändert man die Integrationsgrenzen bei einer Substitution.

Es gibt zwei Methoden bestimmte Integralen mit Hilfe einer Substitution zu berechnen.

Die erste Methode besteht darin, eine Stammfunktion mit einer Substitution zu bestimmen und dann ein bestimmtes Integral durch Einsetzen der Integrationsgrenzen zu berechnen:

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

$$u = g(x), \qquad du = g'(x)\, dx$$

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Bei der zweiten Methode werden Integrationsgrenzen entsprechend der neuen Variablen geändert und das bestimmte Integral ohne Rücksubstitution berechnet:

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

$$u = g(x), \qquad du = g'(x)\, dx$$

$$u_1 = g(a), \quad u_2 = g(b), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2$$

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\, du = \left[F(u)\right]_{u_1}^{u_2} = F(u_2) - F(u_1)$$

Diese Formel zeigt, wie sich die Integrationsgrenzen ändern, wenn die Integrationsvariable durch Substitution geändert wird.

Im Folgenden berechnen wir das bestimmte Integral $I$ mit beiden Integrationsmethoden durch Substitution

$$I = \int_1^2 \sqrt{3x - 2}\, dx$$

Erste Methode: Wir berechnen zuerst die Stammfunktion $F(x)$ des Integranden

$$\int \sqrt{3x - 2}\, dx \overset{u = 3x - 2}{\overbrace{=}} \frac{1}{3} \int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}\, u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$u = 3x - 2, \qquad \frac{du}{dx} = 3, \qquad dx = \frac{du}{3}$$

$$= \frac{2}{9} (3x - 2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (3x - 2)\sqrt{3x - 2} + C = F(x) + C$$

$$F(x) = \frac{2}{9} (3x - 2)\sqrt{3x - 2}$$

Das bestimmte Integral $I$ wird durch Einsetzen der Integrationsgrenzen in die Stammfunktion $F(x)$ berechnet:

$$I = \int_1^2 \sqrt{3x - 2}\, dx = \left[F(x)\right]_1^2 = \frac{2}{9}\left[(3x - 2)\sqrt{3x - 2}\,\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2}{9}\left[(3\cdot 2 - 2)\sqrt{3\cdot 2 - 2} - (3\cdot 1 - 2)\sqrt{3\cdot 1 - 2}\,\right] =$$

$$= \frac{2}{9}\left[4\sqrt{4} - 1\right] = \frac{14}{9} \simeq 1.56$$

$$I = \int_1^2 \sqrt{3x - 2}\, dx = \frac{14}{9}$$

Zweite Methode: Wir berechnen das bestimmte Integral mit neuen Variablen und neuen Integrationsgrenzen:

$$I = \int_1^2 \sqrt{3x - 2}\, dx = \frac{1}{3} \int_1^4 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3} \int_1^4 u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{9} \left[ u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 =$$

$$= \frac{2}{9} \left[ u \sqrt{u} \right]_1^4 = \frac{2}{9} \left[ 4\sqrt{4} - 1 \right] = \frac{14}{9} \simeq 1.56$$

$$u = 3x - 2, \qquad \frac{du}{dx} = 3, \qquad dx = \frac{du}{3}$$

$$x = 1: \quad u_1 = 3 - 2 = 1, \qquad x = 2: \quad u_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2: \qquad 1 \leqslant u \leqslant 4$$

Wir berechnen das bestimmte Integral $I$ mit beiden Integrationsmethoden durch Substitution

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx$$

Erste Methode: Wir berechnen zuerst die Stammfunktion $F(x)$ des Integranden

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx \overbrace{=}^{u = \sin x} \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C\,, \qquad F(x) = \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$u = \sin x\,, \qquad \frac{du}{dx} = \cos x\,, \qquad du = \cos x \, dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

Zweite Methode: Wir berechnen das bestimmte Integral mit neuen Variablen und neuen Integrationsgrenzen:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx \overbrace{=}^{u = \sin x} \int_0^1 u^2 \, du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$u = \sin x\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} : \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \int_0^1 u^2 \, du = \frac{1}{3}$$

Da die Funktion $y = \sin^2 x \cos x$ im Intervall $x = [0, \pi/2]$ und die Funktion $y = u^2$ im Intervall $u = [0, 1]$ nur positive Werte besitzen, beschreiben die Integrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx , \qquad \int_0^1 u^2 \, du$$

Flächen unter den Funktionen in den entsprechen Intervallen. Diese Flächen sehen nicht gleich aus, haben aber gleiche Flächeninhalte, was in den beiden folgenden Abbildungen gezeigt wird.

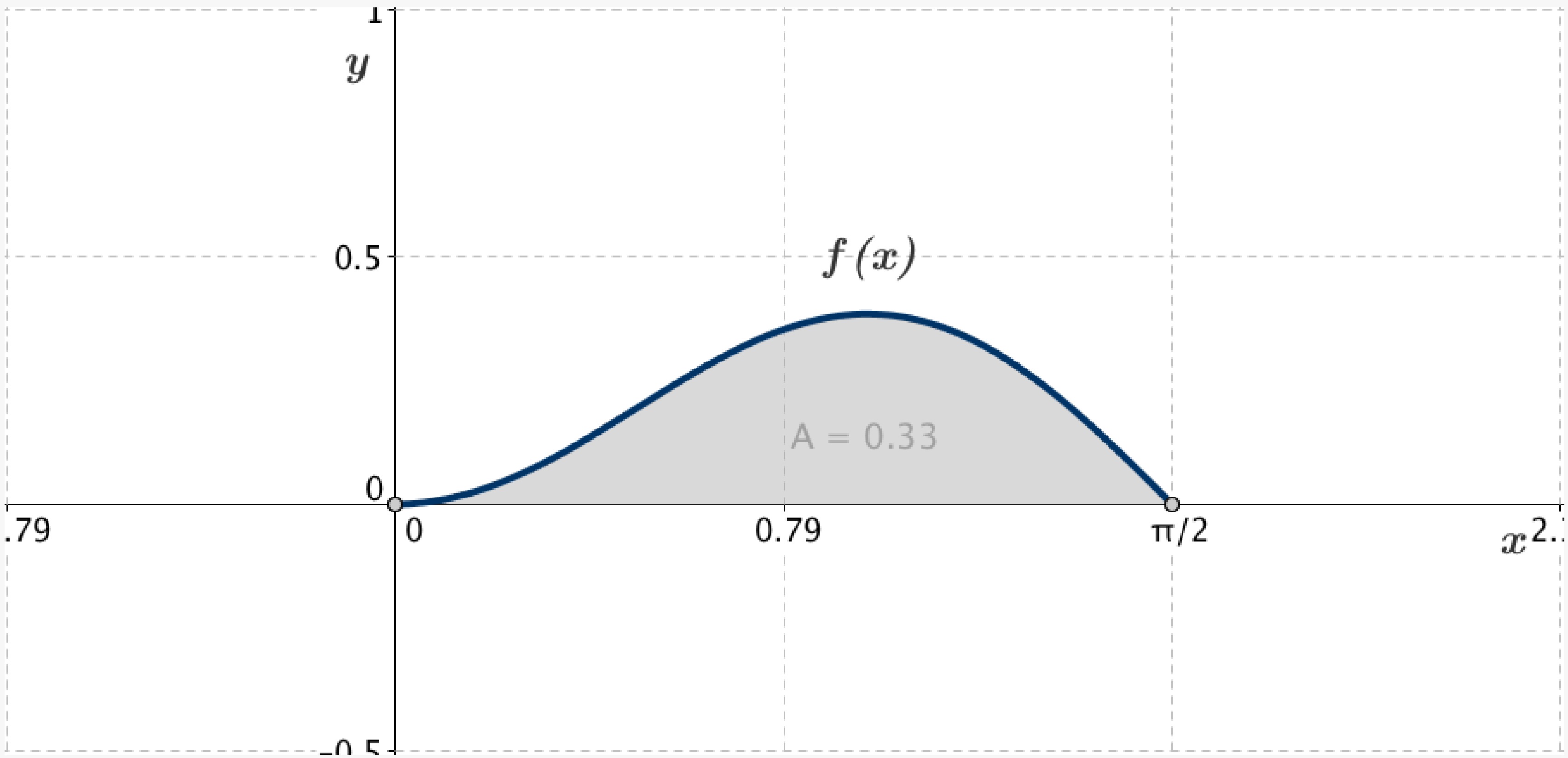



*Abb. B2-1: Die Fläche A unter der Funktion y = f (x) im Intervall x = [0, π/2] ist gleich 1/3*

$$f(x) = \sin^2 x \cos x\,, \qquad x = [0,\ \pi/2]$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}\ \text{FE}$$

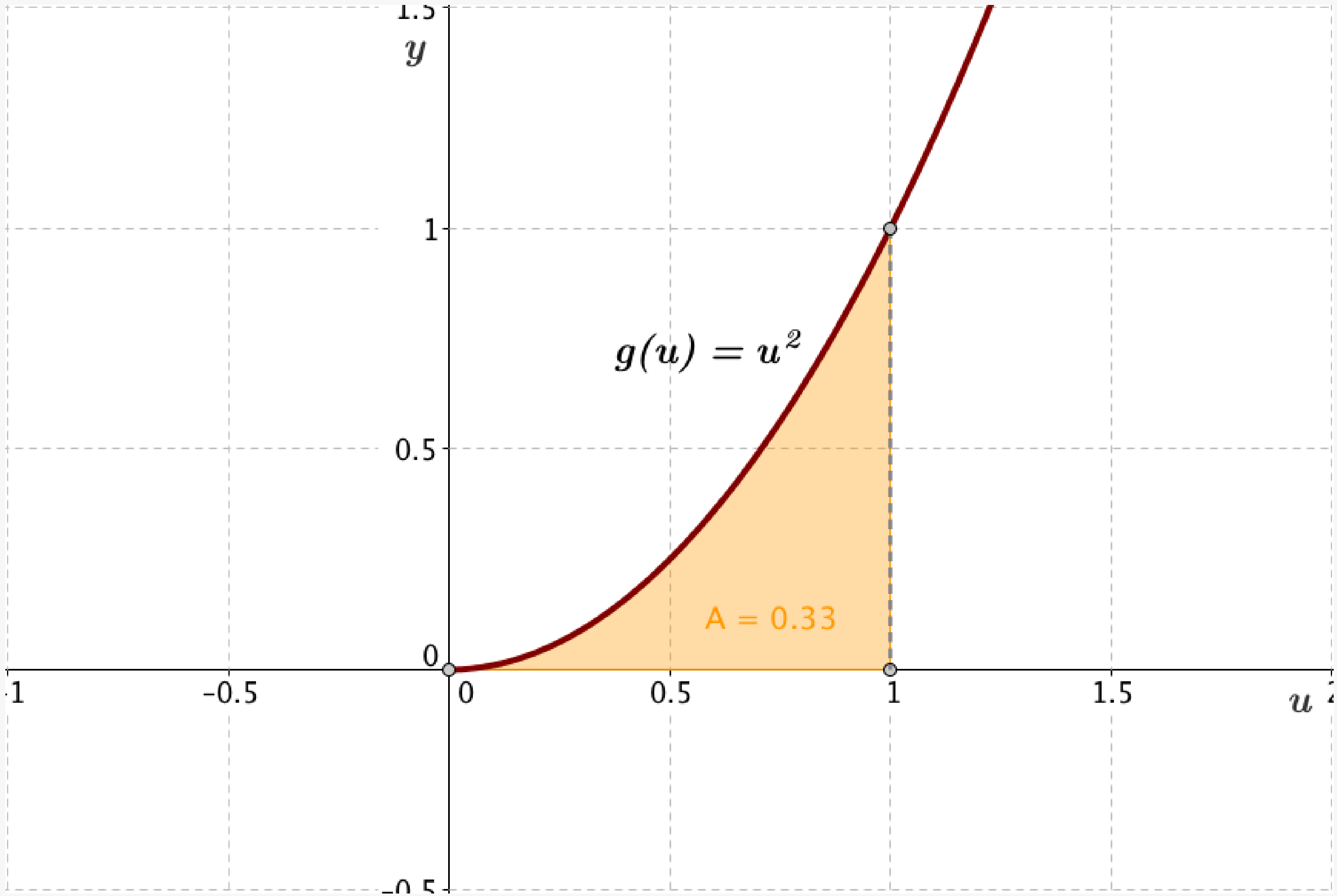



*Abb. B2-2: Die Fläche A unter der Funktion y = f (u) im Intervall x = [0, 1] ist gleich 1/3*

$$f(u) = u^2, \qquad I = \int_0^1 u^2\, du = \frac{1}{3}$$

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

Aufgabe 1: $I_1 = \int_0^1 e^{-x}\,dx, \qquad I_2 = \int_0^1 e^{-x+1}\,dx, \qquad I_3 = \int_0^1 e^{2x}\,dx$

Aufgabe 2: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx, \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)\,dx$

Aufgabe 3: $I_1 = \int_0^1 x(x^2+2)^3\,dx, \qquad I_2 = \int_0^1 (2x-1)(x^2-x+1)^4\,dx$

Aufgabe 4: $I_1 = \int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx, \qquad I_2 = \int_0^1 x\,e^{x^2-1}\,dx$

Aufgabe 5: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1+4\sin x}\,dx$

Aufgabe 6: $I_1 = \int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}, \qquad I_2 = \int_3^6 \sqrt{x-2}\,dx$

Lösung 1:

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x}\, dx = 1 - \frac{1}{e}, \qquad I_2 = \int_0^1 e^{-x+1}\, dx = e \int_0^1 e^{-x}\, dx = e - 1$$

$$I_3 = \int_0^1 e^{2x}\, d\,x = \frac{1}{2}\,[e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{2}\,(e^2 - 1)$$

Lösung 2:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\, d\,x = \frac{1}{2}\,[\sin(2x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)\, d\,x = -\frac{1}{4}\,[\sin(4x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

Lösung 3:

$$I_1 = \int_0^1 x\,(x^2+2)^3\, d\,x = \frac{1}{8}\,[(x^2+2)^4]_0^1 = \frac{65}{8}$$

$$I_2 = \int_0^1 (2x-1)(x^2 - x + 1)^4\, d\,x = \frac{1}{5}\,[(x^2 - x + 1)^5]_0^1 = 0$$

Lösung 4: $I_1 = \int_0^1 x\, e^{x^2}\, d\,x = \dfrac{e-1}{2}$

$$I_2 = \int_0^1 x\, e^{x^2-1}\, d\,x = \frac{1}{2}\left[e^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) = \frac{e-1}{2\,e}, \qquad I_2 = \frac{1}{e}\, I_1$$

Lösung 5:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1+4\sin x}\, d\,x = \frac{1}{4}\left[\ln\left(1+4\sin x\right)\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{4}\ln 3$$

Lösung 6: $I_1 = \int_3^8 \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}\,\Big|_3^8 = 2$

$$I_2 = \int_3^6 \sqrt{x-2}\, dx = \frac{2}{3}\left(x-2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3}$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit beiden Integrationsmethoden:

Aufgabe 7: $$I = \int_1^2 (2x - 1)^3 \, dx$$

Aufgabe 8: $$I = \int_{-1}^0 x^2 (x^3 + 1)^4 \, dx$$

Aufgabe 9: $$I = \int_0^1 \frac{2e^x}{1 + e^x} \, dx$$

$$I = \int_1^2 (2x-1)^3\, dx$$

Methode 1:

$$\int (2x-1)^3\, dx = \frac{1}{2}\int u^3\, du = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + C = F(x) + C$$

$$F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4$$

$$u = 2x-1, \quad \frac{du}{dx} = 2, \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$I = \int_1^2 (2x-1)^3\, dx = \left[F(x)\right]_1^2 = \frac{1}{8}\left[(2x-1)^4\right]_1^2 = \frac{1}{8}\left[3^4 - 1\right] = 10$$

Methode 2:

$$x = 1: \quad u_1 = 1, \qquad x = 2: \quad u_2 = 2\cdot 2 - 1 = 3$$

$$I = \int_1^3 (2x-1)^3\, dx = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3\, du = \left[\frac{u^4}{8}\right]_1^3 = 10$$

$$I = \int_{-1}^{0} x^2 (x^3 + 1)^4 \, dx$$

Methode 1:

$$\int x^2 (x^3 + 1)^4 \, dx = \frac{1}{3} \int u^4 \, du = \frac{1}{3} \frac{u^5}{5} + C = \frac{u^5}{15} + C$$

$$= \frac{(x^3 + 1)^5}{15} + C = F(x) + C, \qquad F(x) = \frac{(x^3 + 1)^5}{15}$$

$$u = x^3 + 1, \qquad \frac{du}{dx} = 3x^2, \qquad x^2 \, dx = \frac{du}{3}$$

$$I = \int_{-1}^{0} x^2 (x^3 + 1)^4 \, dx = \left[ F(x) \right]_{-1}^{0} = \left[ \frac{(x^3 + 1)^5}{15} \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{15} \left[ 1 - 0 \right] = \frac{1}{15}$$

Methode 2:

$$I = \int_{-1}^{0} x^2 (x^3 + 1)^4 \, dx = \frac{1}{3} \int_{0}^{1} u^4 \, du = \left[ \frac{u^5}{15} \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{15}$$

$$u = x^3 + 1, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 0: \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

$$I = \int_0^1 \frac{2\,e^x}{1 + e^x}\,dx$$

Methode 1:

$$\int \frac{2\,e^x}{1 + e^x}\,dx = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|\,u\,| + C = 2\ln|\,1 + e^x\,| + C$$

$$u = 1 + e^{\,x}, \qquad \frac{du}{dx} = e^{\,x}, \qquad e^{\,x}\,dx = du$$

$$I = \int_0^1 \frac{2\,e^x}{1 + e^x}\,dx = 2\left[\ln|\,1 + e^x\,|\right]_0^1 = 2\left(\ln|\,1 + e\,| - \ln|\,2\,|\right) = 2\ln\left|\frac{1 + e}{2}\right|$$

Methode 2:

$$\int_0^1 \frac{2\,e^x}{1 + e^x}\,dx = 2\int_2^{1+e} \frac{du}{u} = 2\left[\ln|\,u\,|\right]_2^{1+e} = 2\ln\left|\frac{1 + e}{2}\right| \simeq 1.24$$

$$u = 1 + e^{\,x}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1: \qquad 2 \leqslant u \leqslant 1 + e$$

Berechnen Sie die Integrale der fogenden Aufgaben mit der zweiten Integrationsmethode entsprechend der Formel:

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\, du = \left[F(u)\right]_{u_1}^{u_2} = F(u_2) - F(u_1)$$

Zeichnen Sie dabei die Fläche unter der Funktion $f(g(x)) \cdot g'(x)$ im Interval $x = [a, b]$ und der Funktion $f(u)$ im Interval $u = [u_1, u_2]$.

Aufgabe 10: $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx$

Aufgabe 11: $I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x^3 \cos(x^2)\, dx$

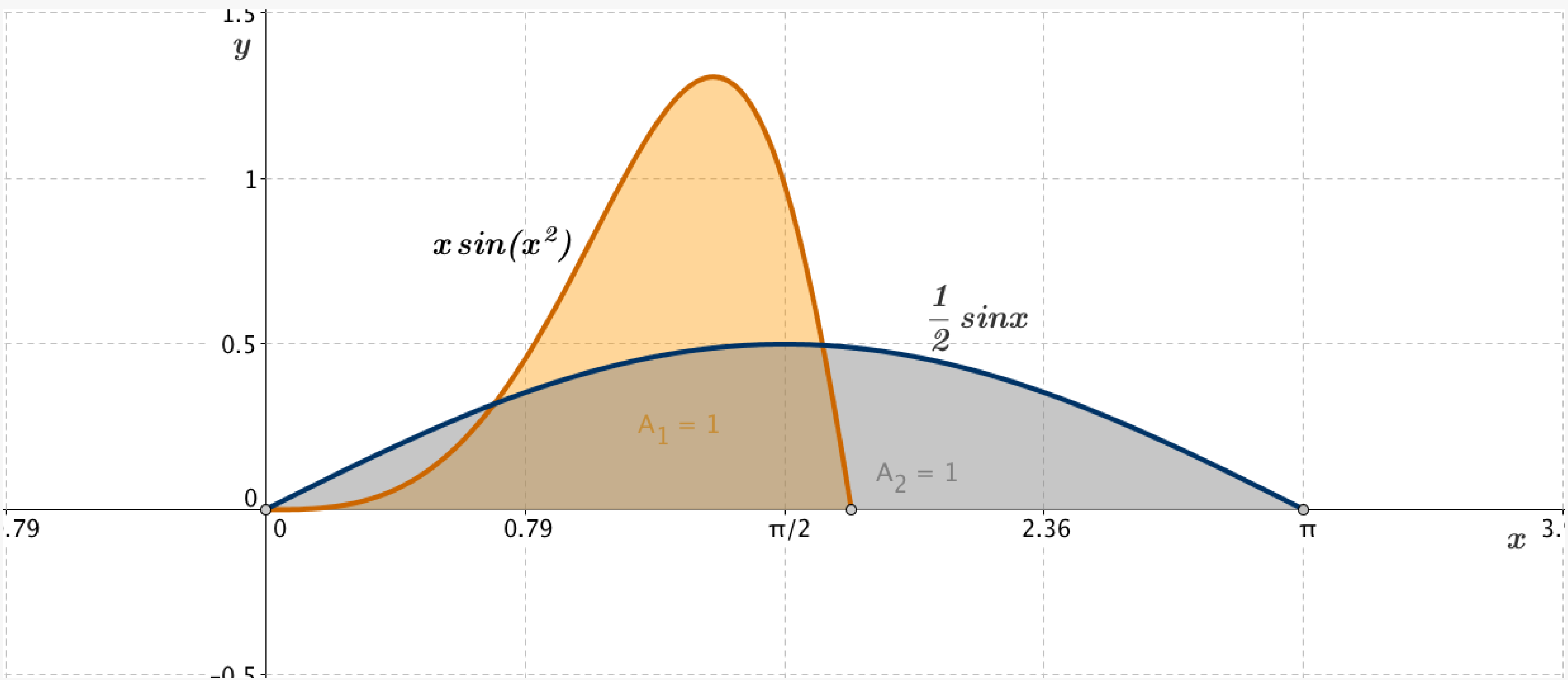



*Abb. L10: Die Flächen unter der Funktion $y = x\sin(x^2)$ im Intervall $x = [0, \sqrt{\pi}]$ und der Funktion $y = (1/2)\sin x$ im Intervall $x = [0, \pi]$*

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin u\, du = -\frac{1}{2}\left[\cos u\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(-1-1\right) = 1$$

$$u = x^2, \qquad \frac{du}{dx} = 2x, \qquad x\,dx = \frac{du}{2}$$

$$u = x^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi}: \qquad 0 \leqslant u \leqslant \pi$$

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x^3 \cos\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} z \cos z \, dz$$

Integration durch Substitution:

$$z = x^2, \qquad \frac{dz}{dx} = 2\,x\,, \qquad x\,dx = \frac{dz}{2}$$

$$z = x^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad : 0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Partielle Integration: $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

$$u = z\,, \qquad du = dz\,, \qquad dv = \cos z\,dz\,, \qquad v = \int \cos z\,dz = \sin z$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} z \cos z\,dz = \frac{1}{2} \left( \left[ z \sin z \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin z\,dz \right) = \frac{1}{2} \left( z \sin z + \cos z \right)_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - 0 \sin 0 - \cos 0 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{1}{4} (\pi - 2) \simeq 0.29$$

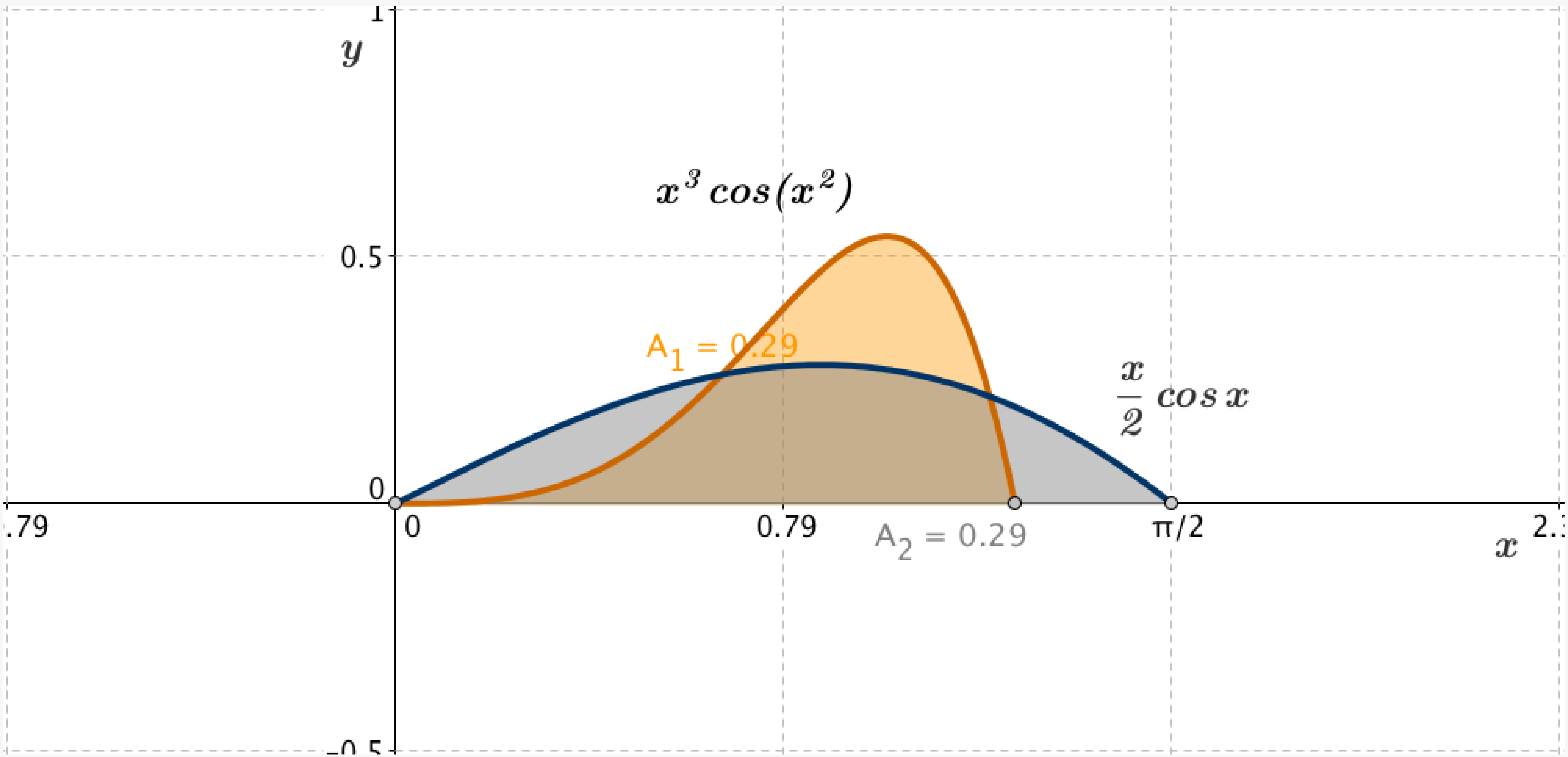
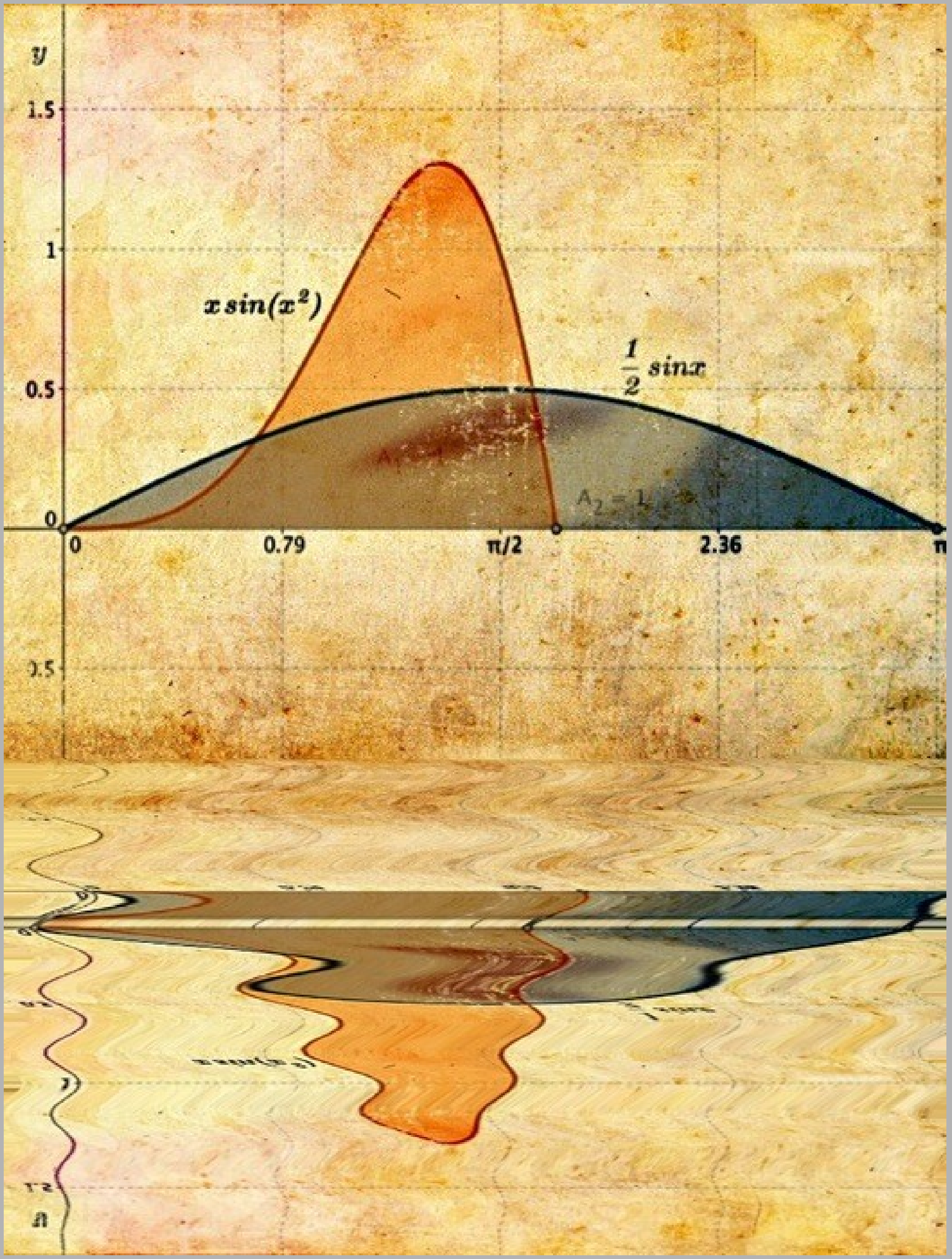



*Abb. L11: Die Flächen unter der Funktion y = x³ sin (x²) im Intervall x = [0, √π/2] und der Funktion y = (x/2) cos x im Intervall x = [0, π/2]*

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x^3 \cos\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} z \cos z \, dz = \frac{1}{4}(\pi - 2) \simeq 0.29$$



y
1.5
1
0.5
0
$x \sin(x^2)$
$\frac{1}{2} \sin x$
$A_2 = 1$
0
0.79
π/2
2.36
π