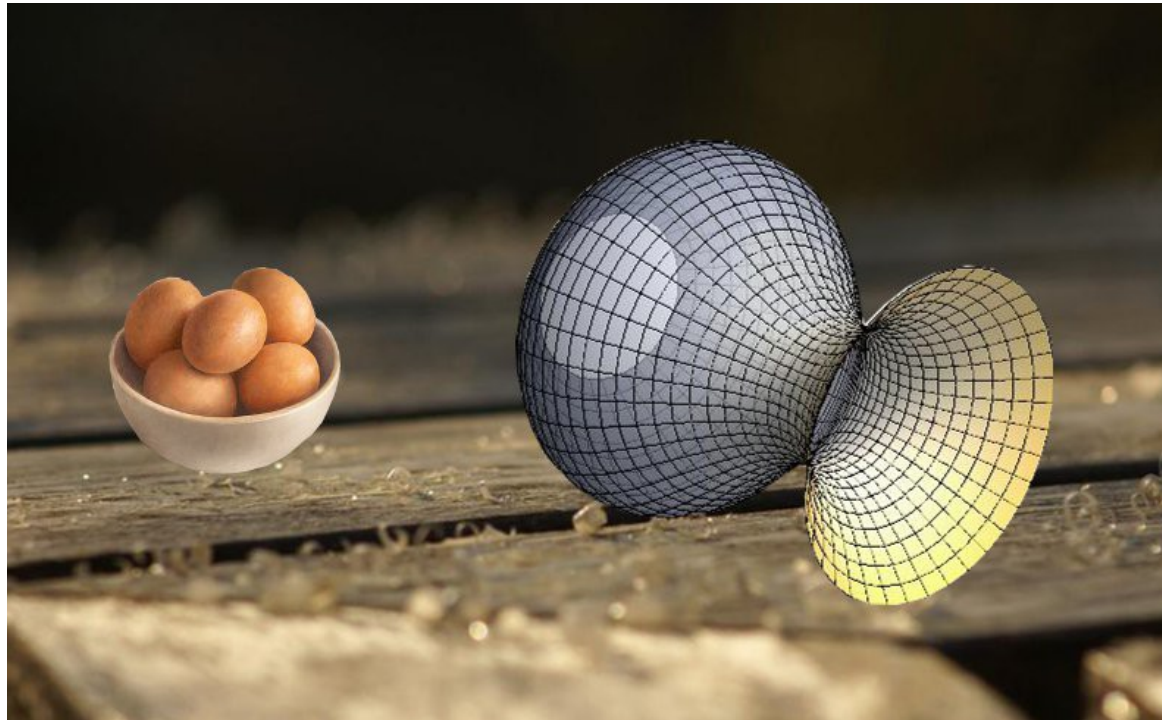




<http://www.fotocommunity.de/search?q=table&index=fotos&options=YToyOntzOjU6InN0YXJ0IjtpOjA7czo3OiJkaXNwbGF5IjtzOjg6LjZmY4ODUwIj9/pos/13>

*Geometrische Anwendung des Integrals:
Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers*

Rotation einer Kurve um die x -Achse

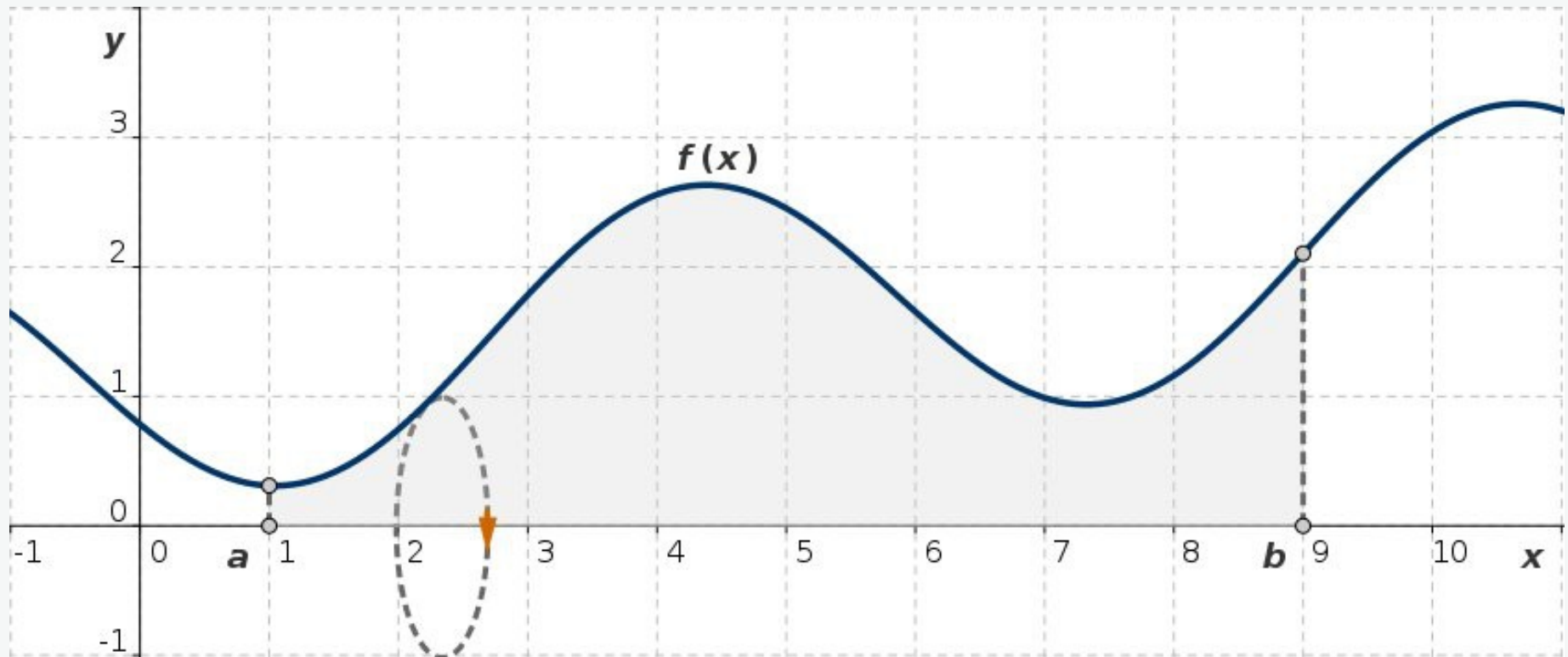


Abb. 5-1: Eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $y = f(x)$ und die Fläche zwischen der Funktionskurve und der x -Achse

Die über dem Intervall $[a, b]$ gelegene Kurve mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ erzeugt bei Rotation um die x -Achse einen Rotationskörper.

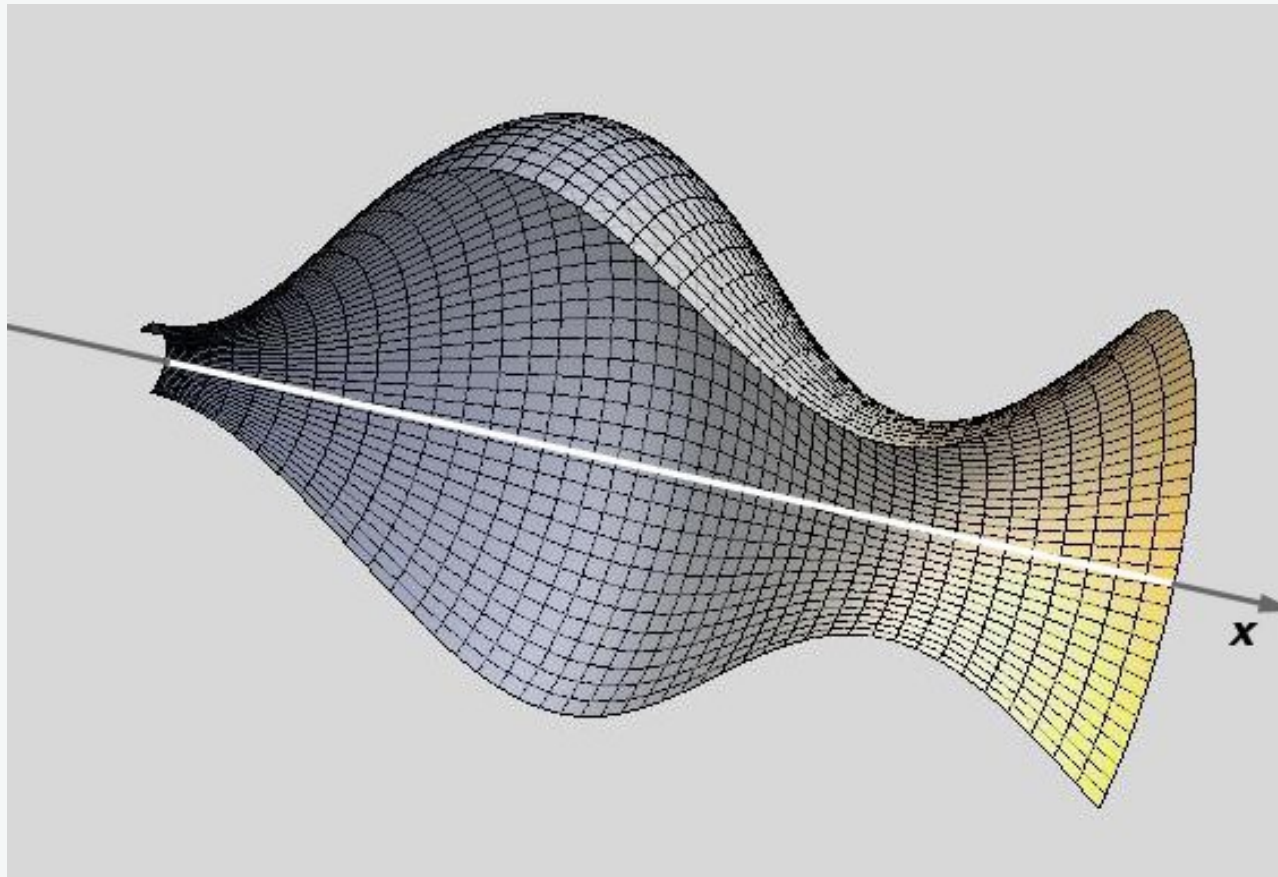


Abb. 5-2: Ein Körper, der durch Rotation der ebenen Kurve $y = f(x)$ (Abb. 5-1) um die x -Achse entsteht (Rotationswinkel π)

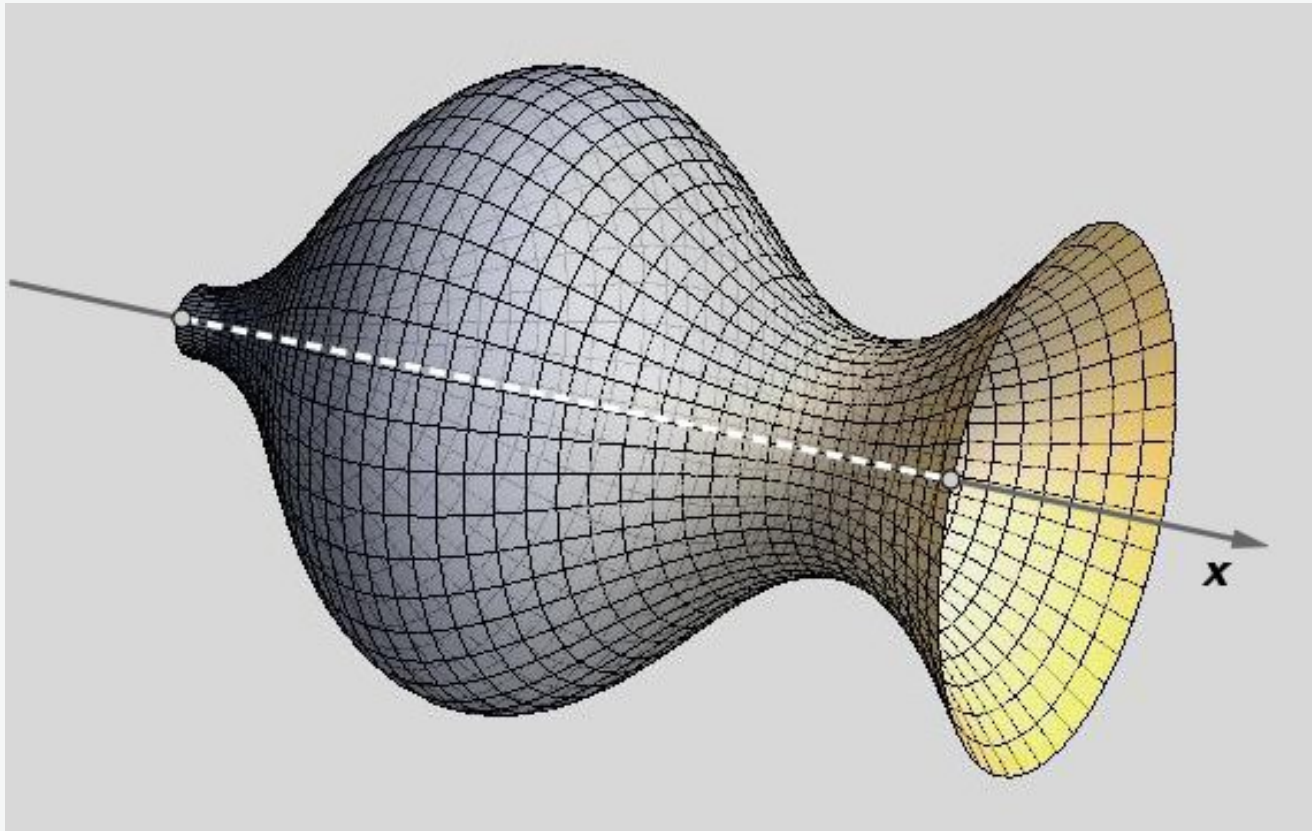


Abb. 5-3: Ein Körper, der durch Rotation der ebenen Kurve $y = f(x)$ (Abb. 5-1) um die x -Achse entsteht (Rotationswinkel 2π)

Volumen eines Rotationskörpers

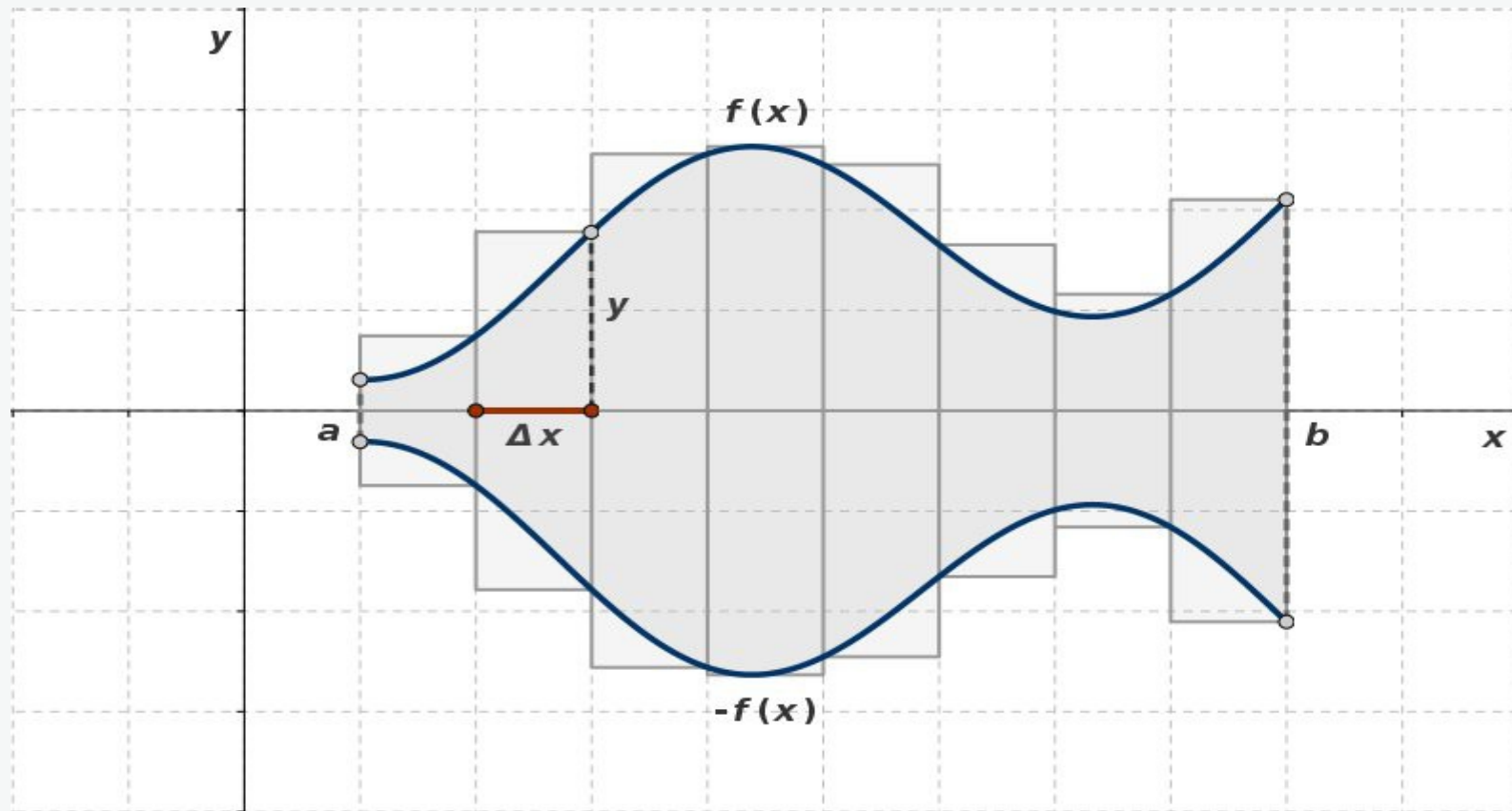


Abb. 5-4: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene. Der Rotationskörper wird durch 8 kreisförmigen Zylinderscheiben ersetzt.

Der Rotationskörper wird durch Schnitte senkrecht zur Drehachse in Scheiben gleicher Dicke zerlegt. Jede Scheibe wird dann durch eine Zylinderscheibe ersetzt, deren Radius durch den Maximalwert von $f(x)$ im Bereich der Scheibe gegeben ist. Das Volumen einer solchen Scheibe beträgt näherungsweise

$$\Delta V_x = \pi y^2 \Delta x = \pi f^2(x) \Delta x$$

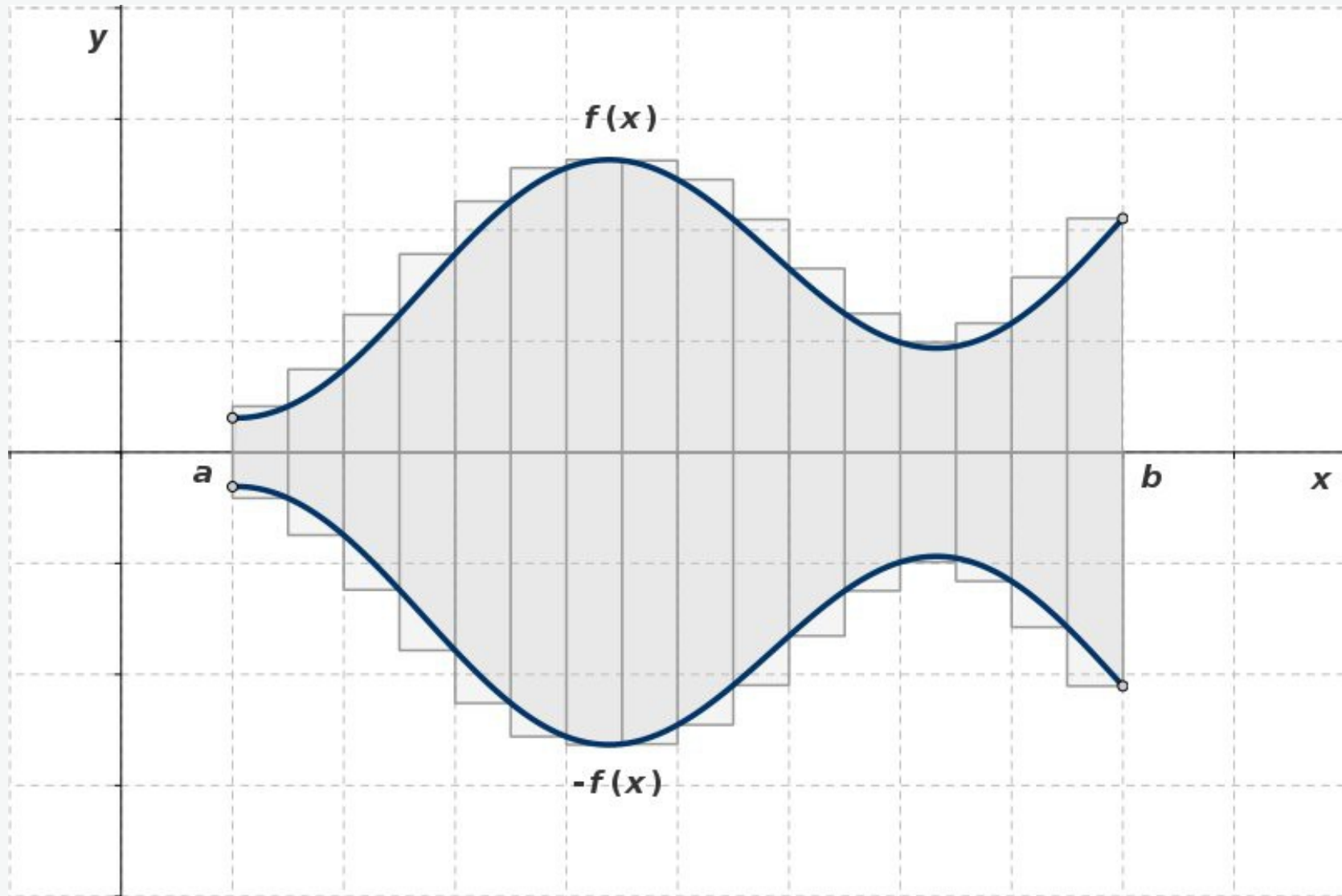


Abb. 5-5: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene. Der Rotationskörper wird durch 16 kreisförmigen Zylinderscheiben ersetzt

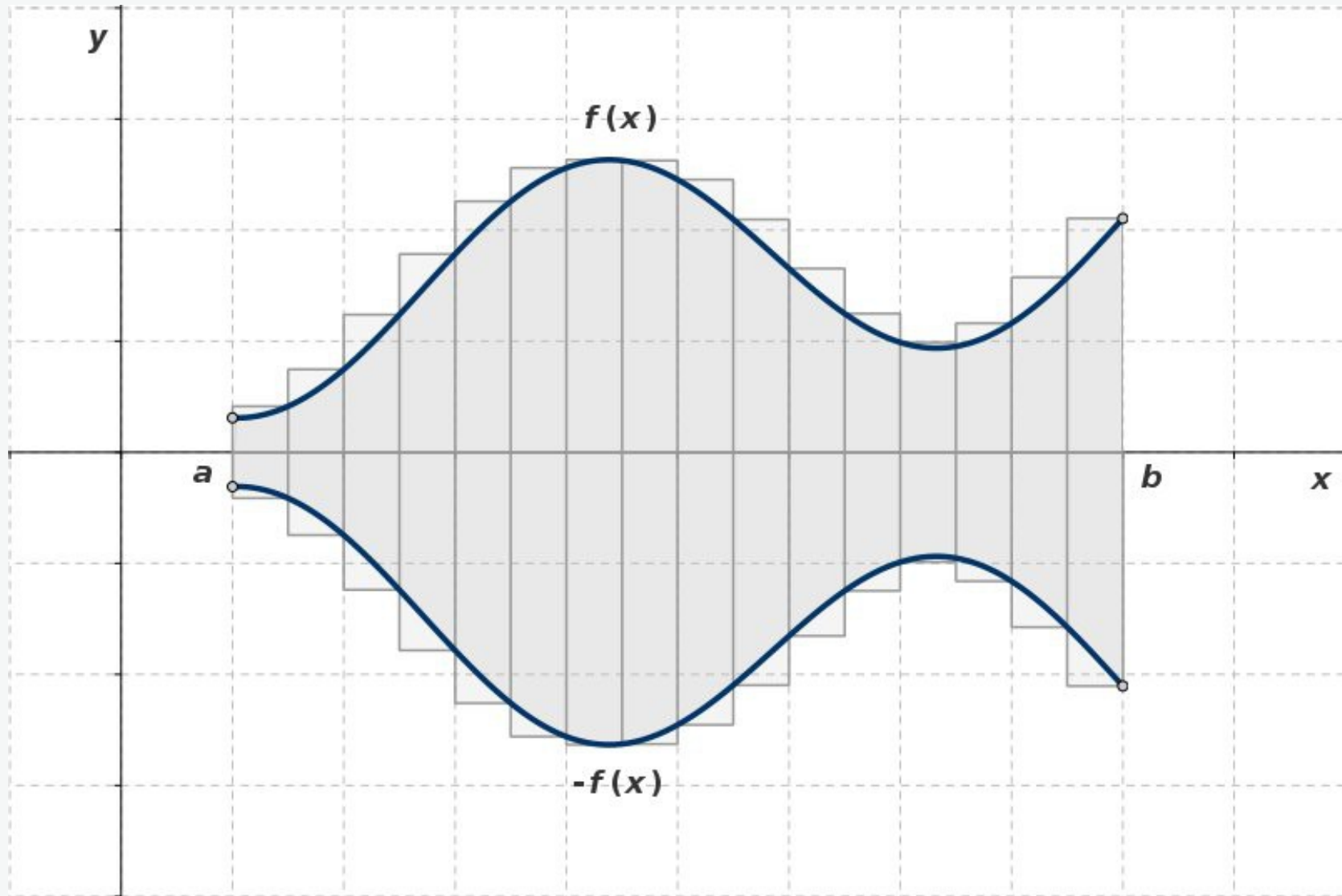


Abb. 5-5: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene. Der Rotationskörper wird durch 16 kreisförmigen Zylinderscheiben ersetzt

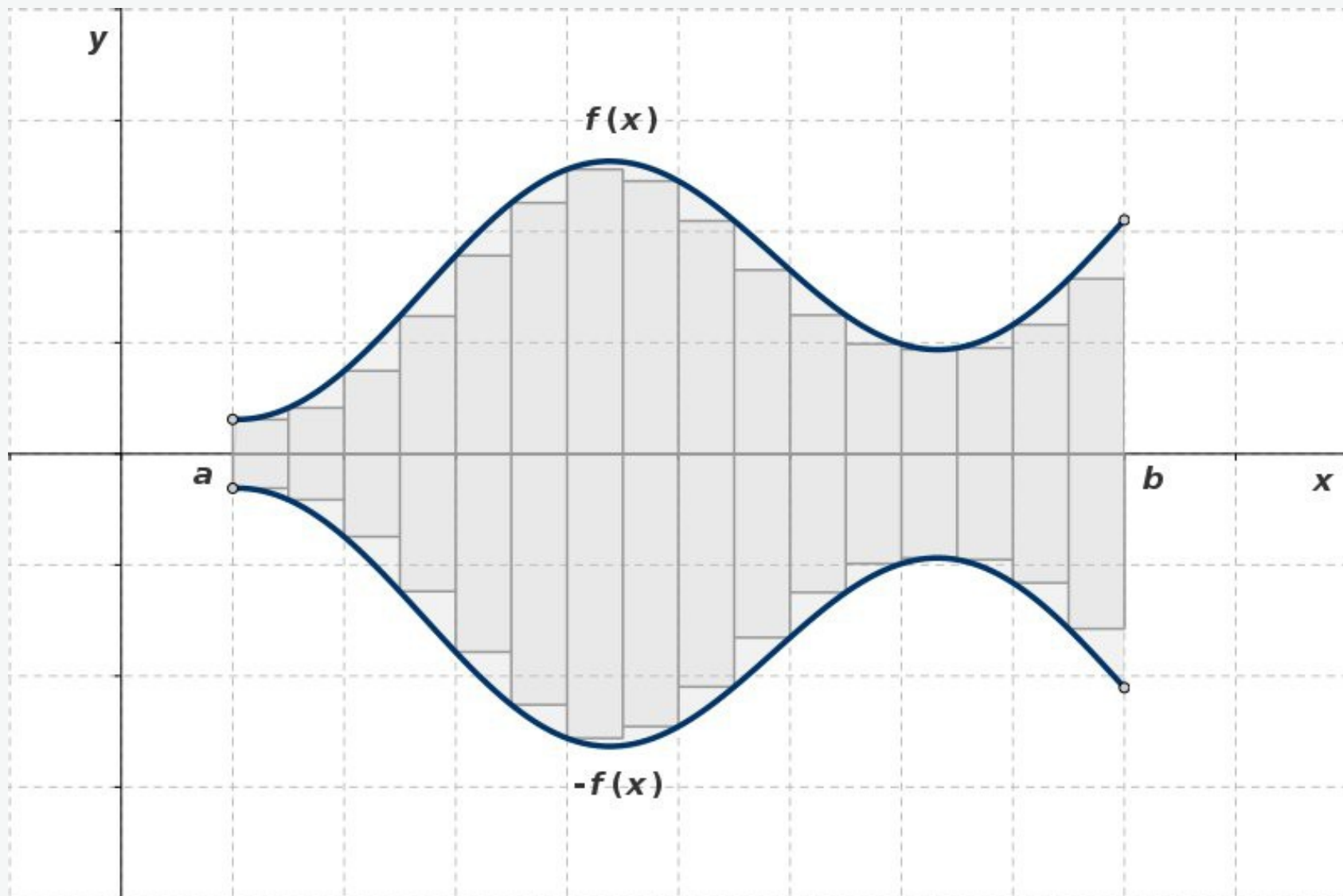


Abb. 5-6: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene. Der Rotationskörper wird durch 16 kreisförmigen Zylinderscheiben ersetzt. Der Radius einer Zylinderscheibe entspricht dem Minimalwert von $f(x)$ im Bereich der Scheibe.

Volumen eines Rotationskörpers

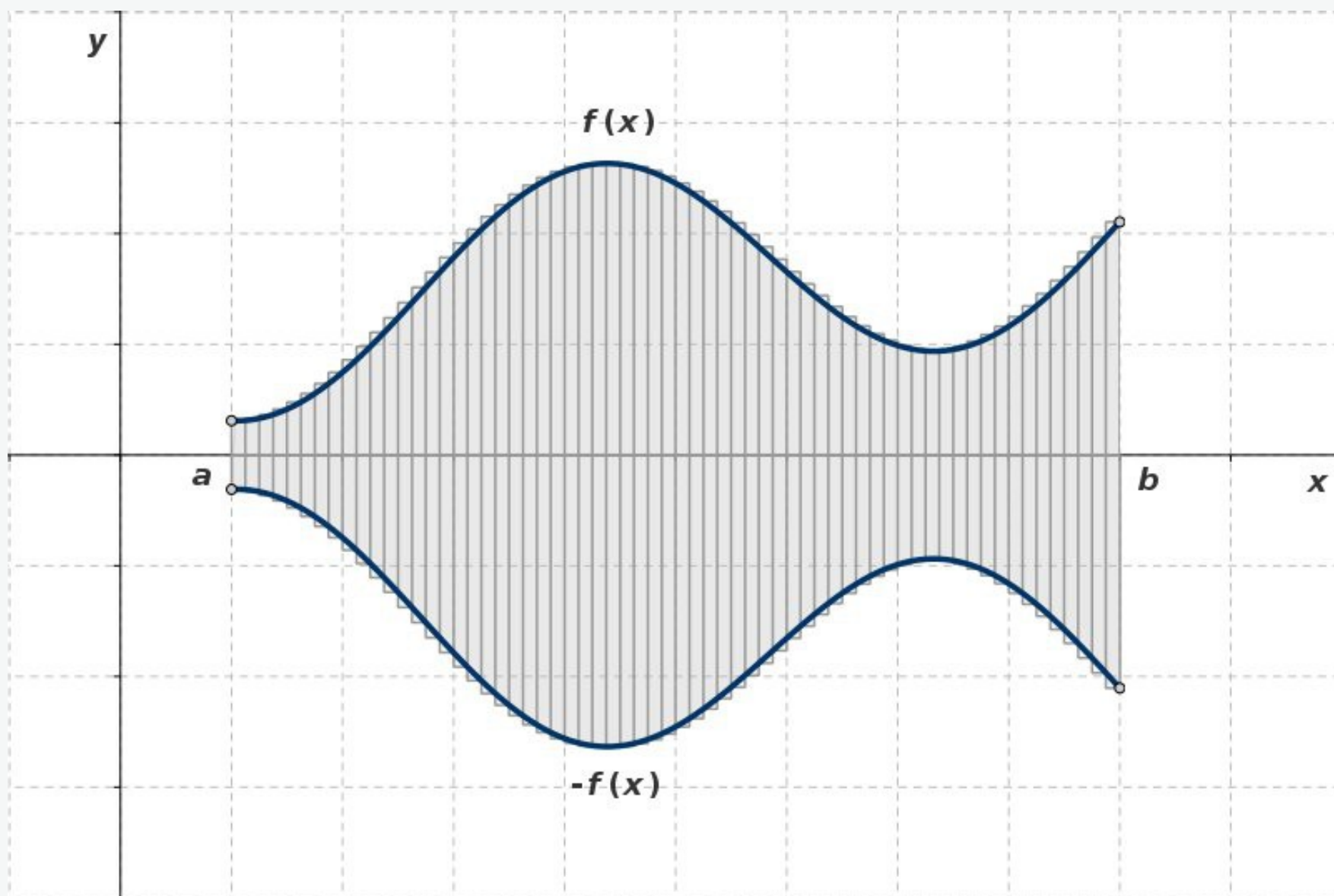


Abb. 5-7: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene. Der Rotationskörper wird durch 64 kreisförmigen Zylinderscheiben ersetzt

Volumen eines Rotationskörpers

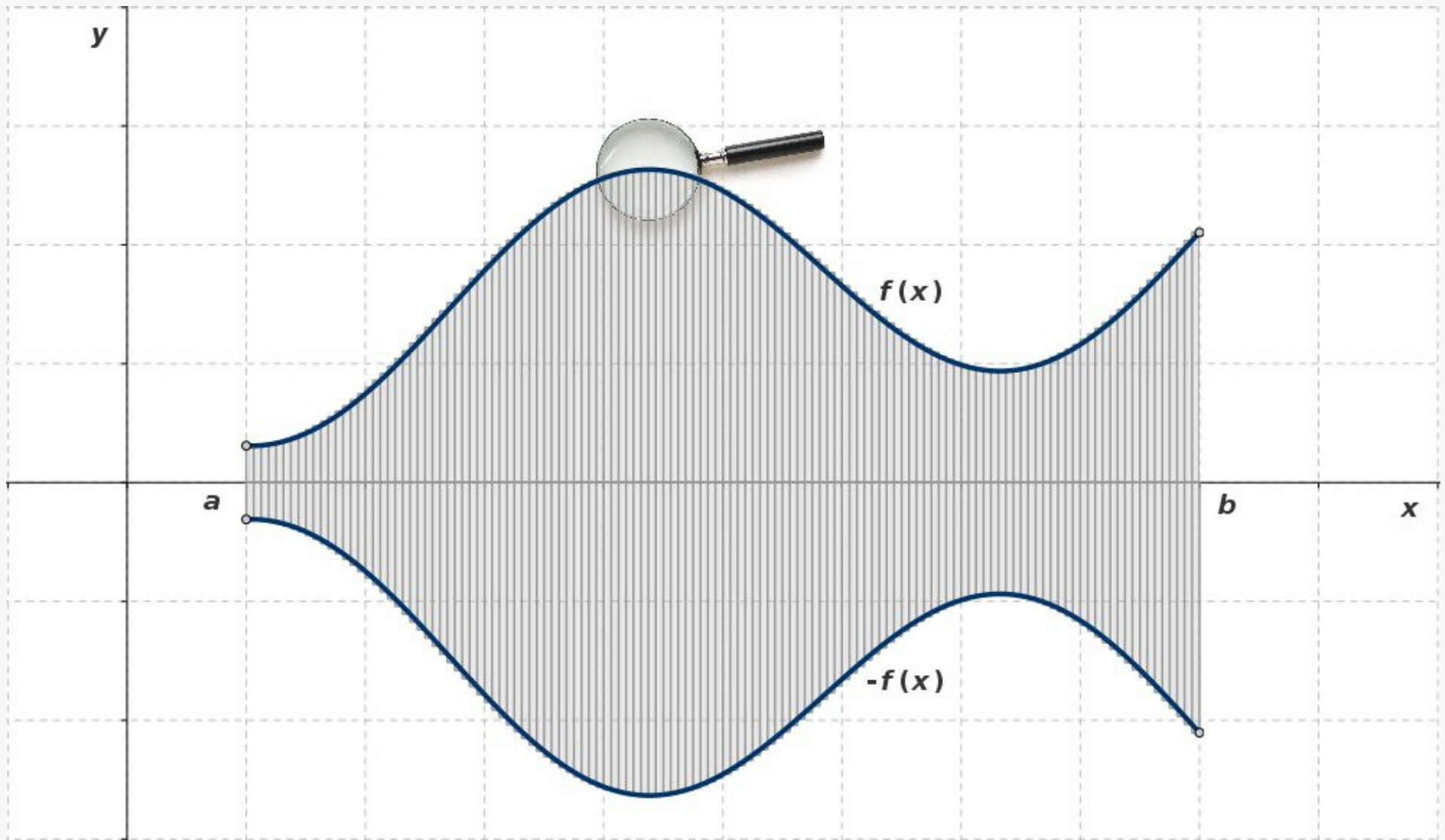


Abb. 5-8: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y -Ebene. Der Rotationskörper wird durch 128 kreisförmigen Zylinderscheiben ersetzt

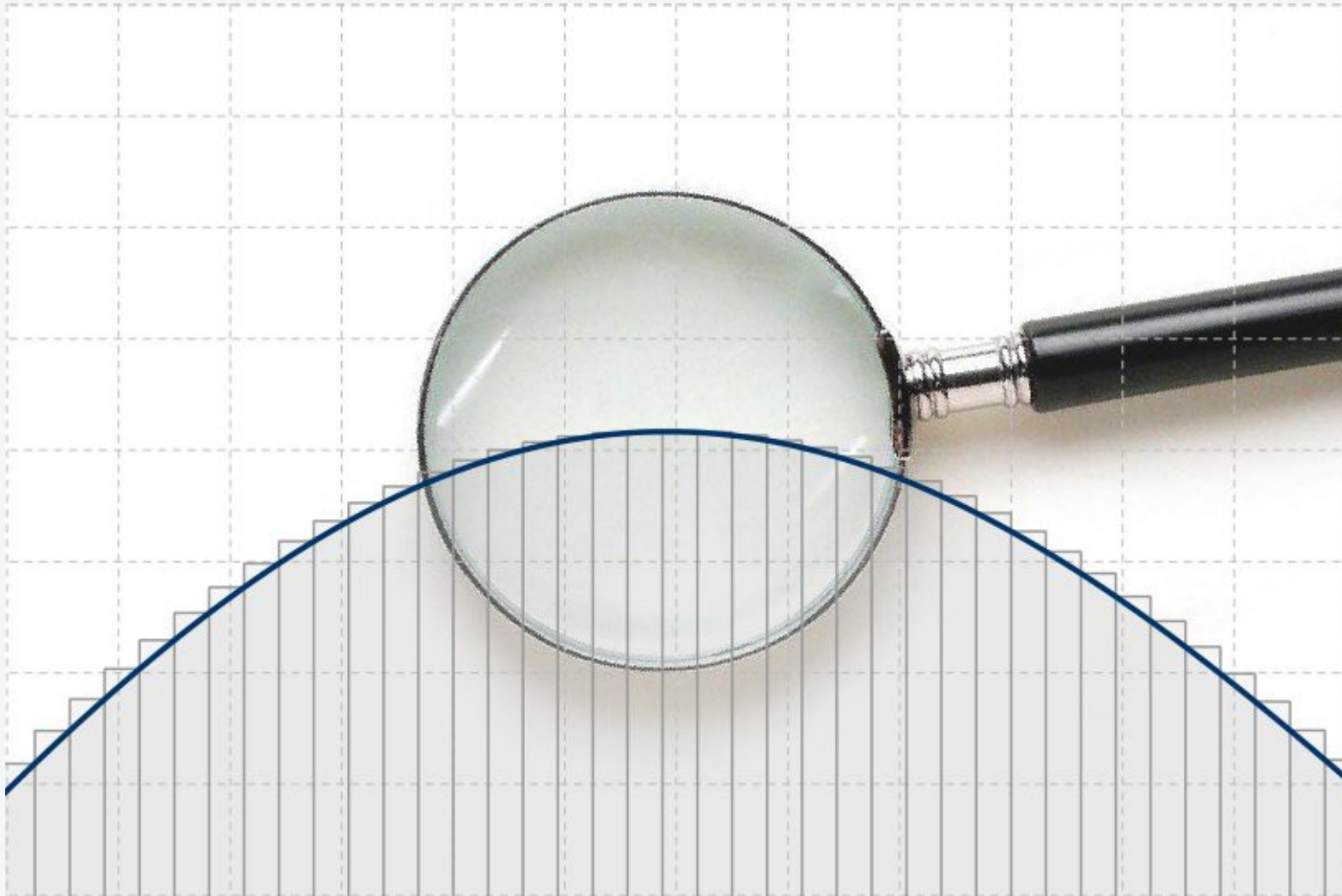


Abb. 5-9: Der Rotationskörper wird durch 128 kreisförmigen Zylinderscheiben ersetzt

Wir zoomen ein, um den Unterschied zwischen dem Rotationskörper und dem “Treppenkörper” zu bemerken.

Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers

Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ geht die Scheibendicke Δx gegen Null, und man erhält für das Rotationsvolumen folgende Formel:

$$\Delta V_x = \pi f^2(x) \Delta x \quad \rightarrow \quad dV_x = \pi f^2(x) dx$$

$$V_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi f^2(x_i) \Delta x_i = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$$

Ist die x -Achse die Rotationachse, liegt der Schwerpunkt

$$\vec{r}_S = \frac{1}{V} \int \vec{r} dV$$

auf der x -Achse: $y_S = 0, \quad z_S = 0$

$$x_S = \frac{1}{V_x} \int_x (V) x dV_x = \frac{\pi}{V_x} \int_a^b x y^2 dx = \frac{\pi}{V_x} \int_a^b x f^2(x) dx$$

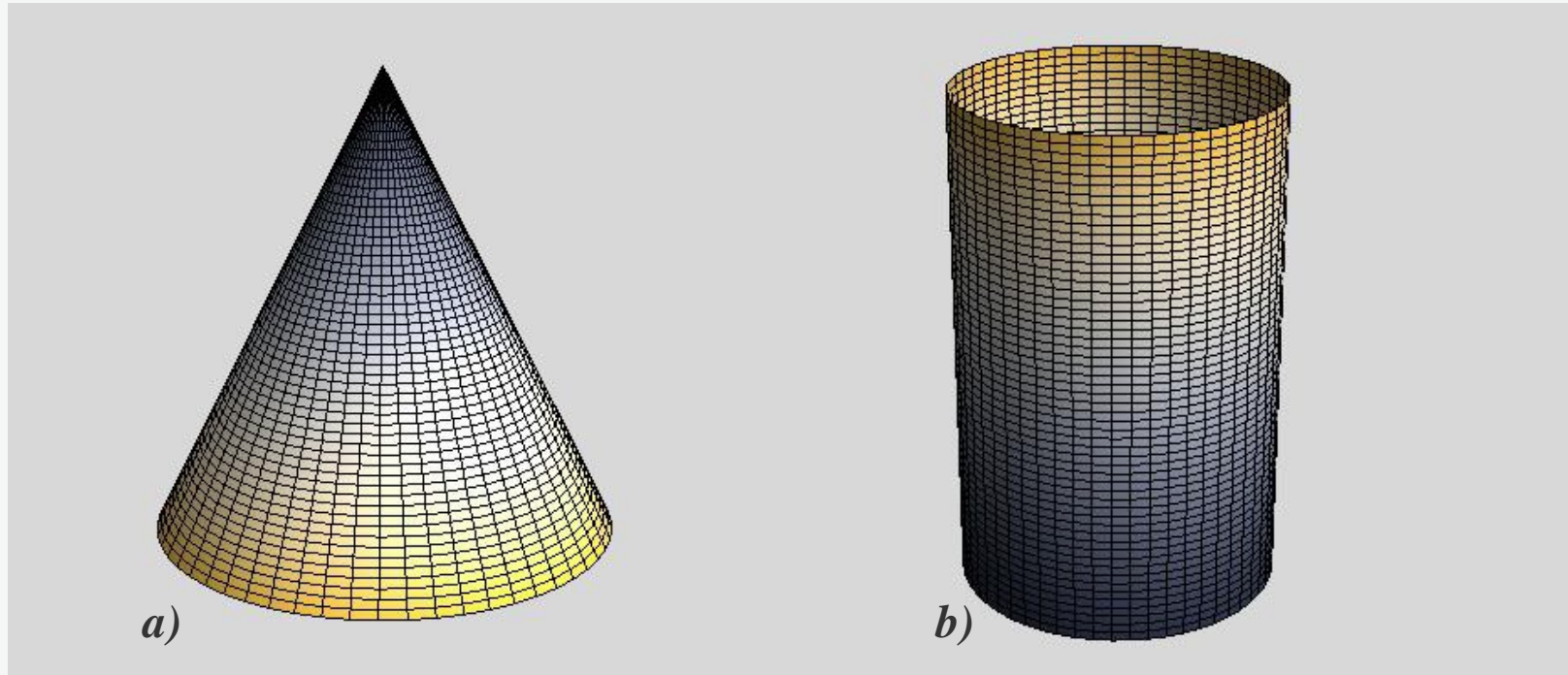


Abb. 6-1: Der Kreiskegel (a), der Zylinder (b)

Zu den in der Mathematik bekannten Rotationskörpern gehören die Kugel, der Kreiskegel, der Zylinder, das Rotationsparaboloid und der Torus.

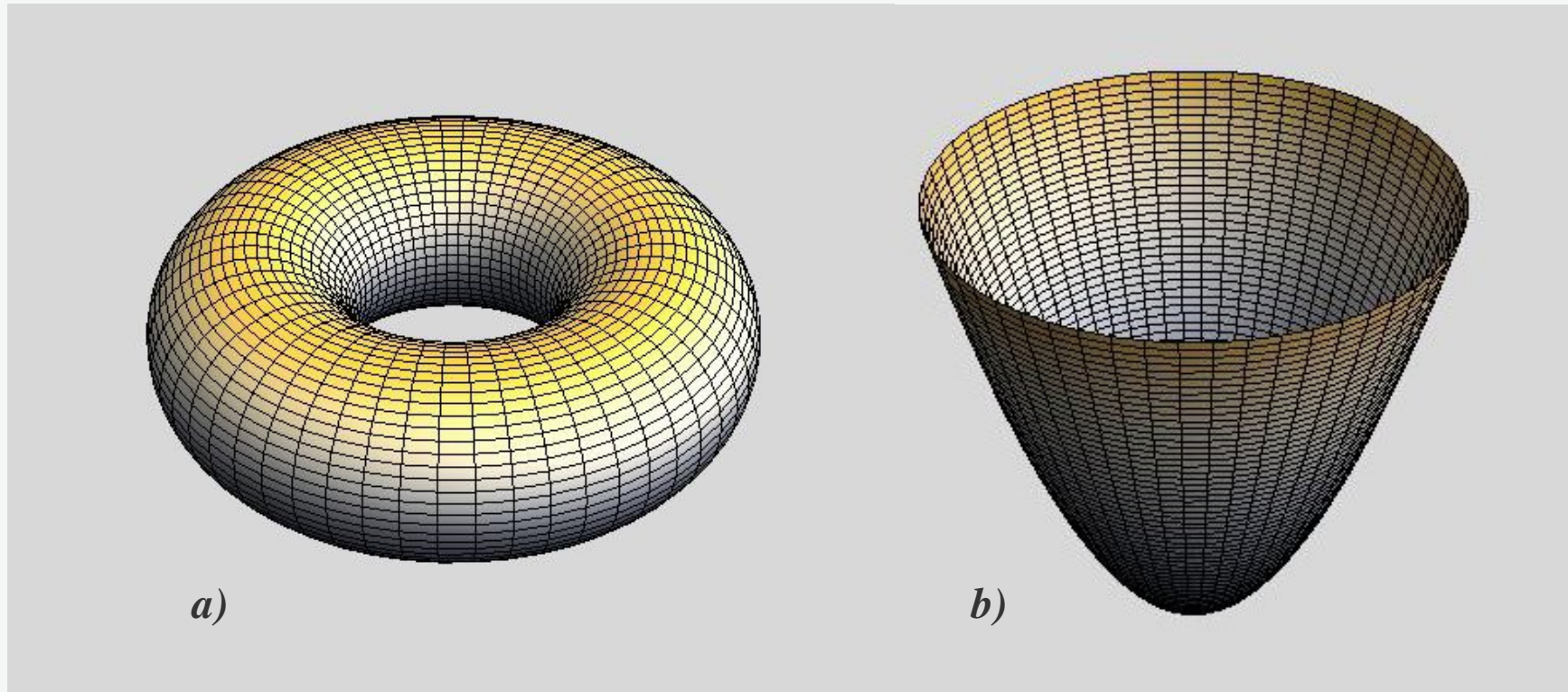


Abb. 6-2: Der Torus (a), der Rotationsparaboloid (b)



Abb. 6-3: Ein Körper, die Vase, die durch die Rotation der ebenen Kurve $y = f(x)$ um die x -Achse entsteht

$$f(x) = \sqrt{4 + 2 \sin(2x)}, \quad x \in [0, \pi]$$



Abb. 6-4: Ein Teil der russischen Kirche in Hamburg mit Kirchenzwiebeln, die als Rotationskörper, mit Mathematica erzeugt wurden.



http://www.postcardfromholland.com/still_life_eggs.jpg

http://art-tavolga.ru/fileadmin/Files/Images/Art/CRW_9288.jpg

Abb. 7-1: Rotationskörper



http://alldayplus.narod.ru/2010/11_28/15.jpg

Abb. 7-2: Kirchenglocke als Rotationskörper



Abb. 7-3: "Hut" als Rotationskörper