Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse entsteht

Aufgabe 19: $f(x) = 2 + \sin(x), \quad x \in [0, 2\pi]$

Aufgabe 20: $f(x) = 0.4x + \sin(2x) + 1, \quad x \in [0, 2\pi]$

Abb. 19-1: Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = 2 + \sin x$ im Intervall $[0, 2\pi]$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} y^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{2\pi} (2 + \sin x)^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{2\pi} (4 + 4 \sin x + \sin^2 x) \, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{9}{2} \int_0^{2\pi} dx + 4 \int_0^{2\pi} \sin x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2x) \, dx \right] = 9 \pi^2$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x\, y^2\, dx = \frac{1}{9\pi} \int_0^{2\pi} x\,(2 + \sin x)^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{9\pi} \int_0^{2\pi} x\,(4 + 4\sin x + \sin^2 x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{9\pi} \left[4 \int_0^{2\pi} x\, dx + 4 \int_0^{2\pi} x \sin x\, dx + \int_0^{2\pi} x \sin^2 x\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{9\pi} \left[2x^2 + 4\,(\sin x - x\cos x) + \frac{x^2}{4} - \frac{\cos^2 x}{4} - \frac{x}{2} \sin x \cos x \right]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{8}{9} + \pi \simeq 2.25\,(\text{LE})$$

$$\vec{r}_S = (\, 2.25,\ 0,\ 0\,)$$

$$\int x \sin x\, dx = \sin x - x\cos x$$

$$\int x \sin^2 x\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 x - \frac{x}{2} \sin x \cos x$$

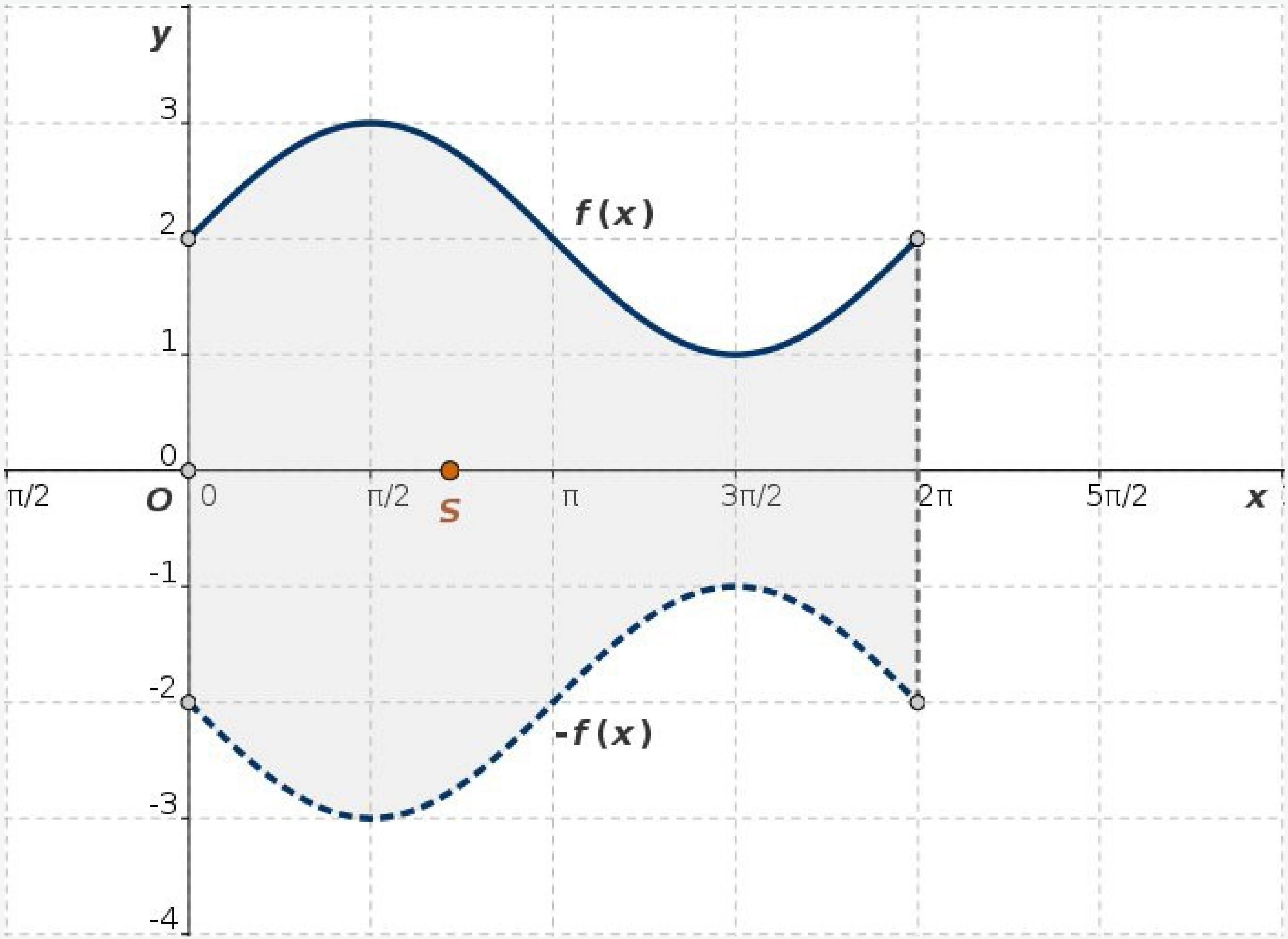

Abb. 19-2: Die Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene; der Schwerpunkt S = (2.25, 0)

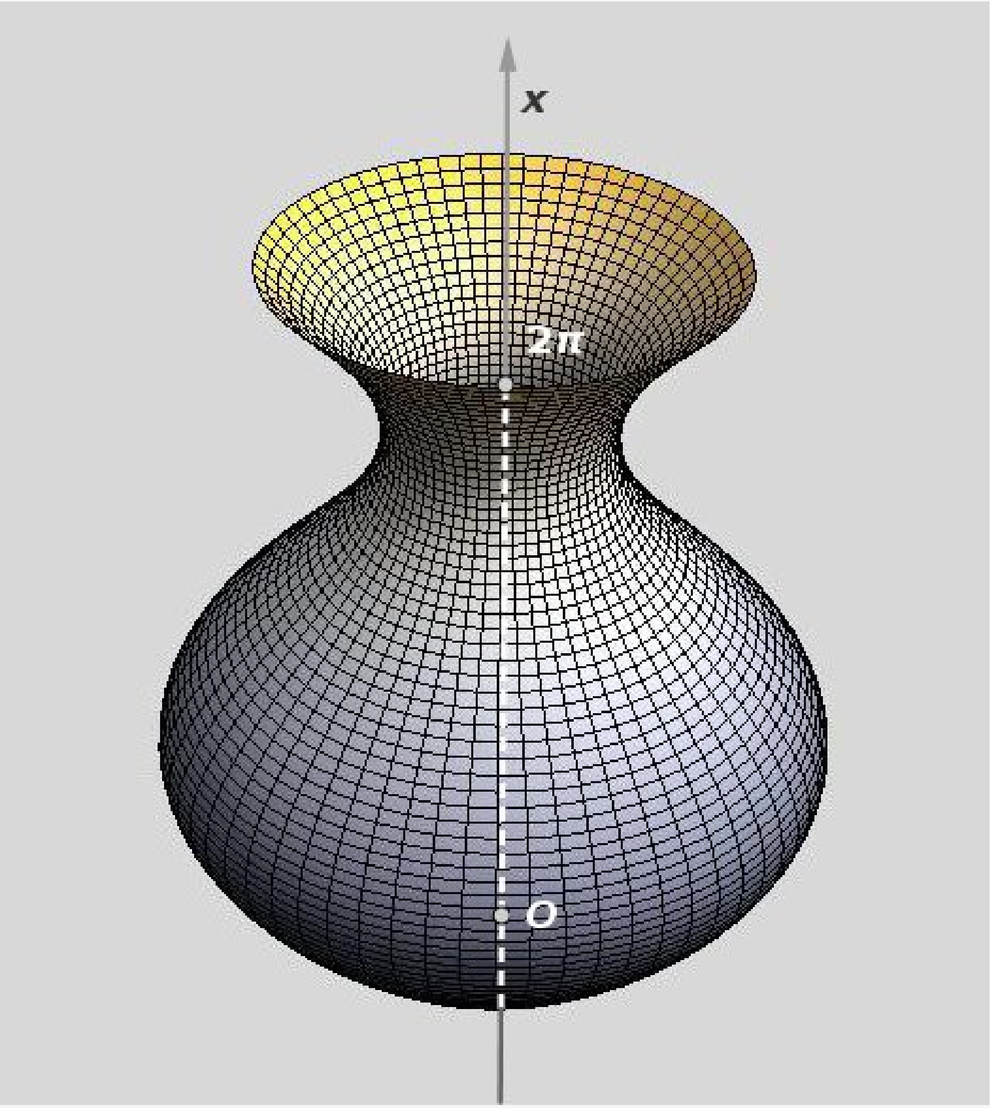

Abb. 19-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = 2 + \sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$ um die x-Achse erzeugter Körper

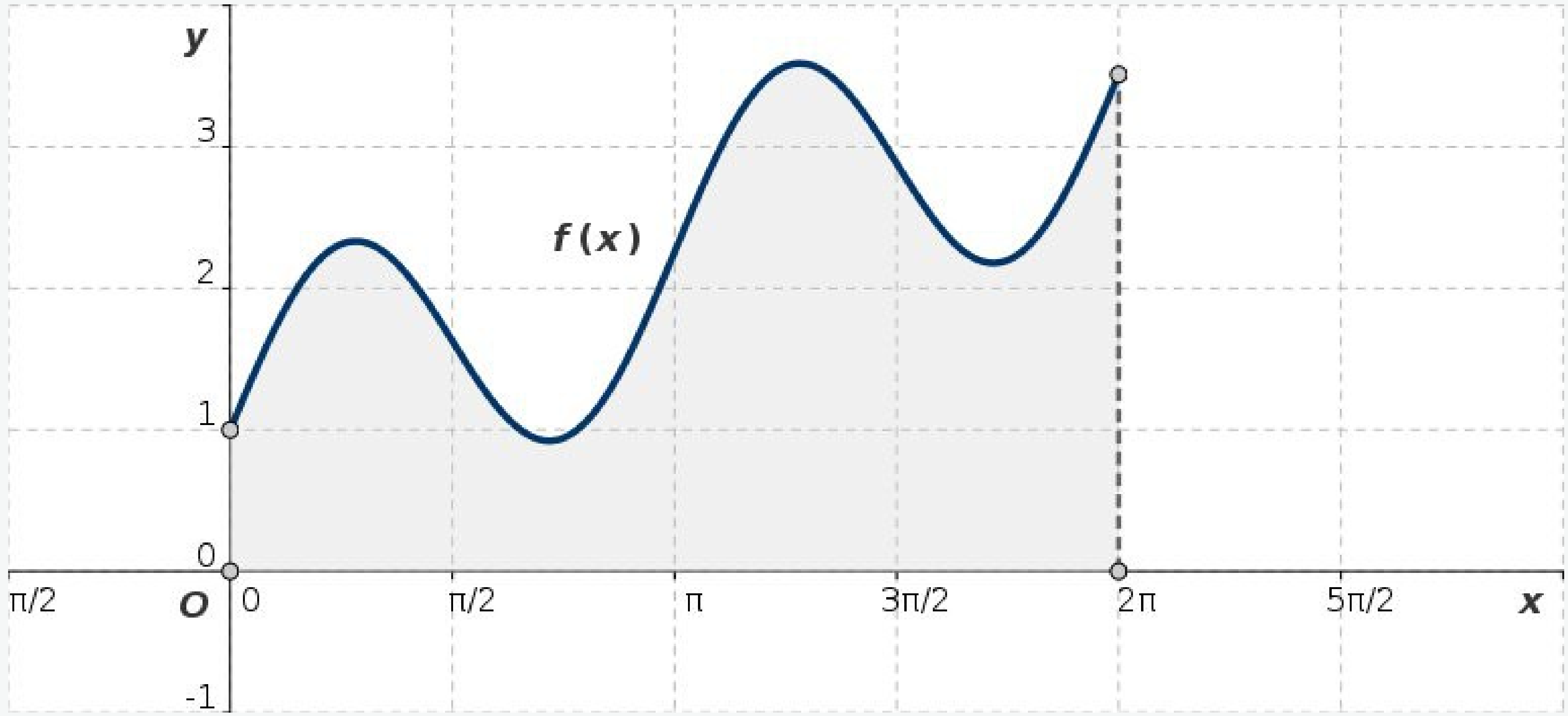

Abb. 20-1: Fläche unter der Kurve mit der Gleichung y =f (x) im Intervall [0, 2π]

$$f(x) = 0.4\,x + \sin(2\,x) + 1$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} y^2\,dx = \pi \cdot \int_0^{2\pi} (0.4\,x + \sin(2\,x) + 1)^2\,dx \simeq 35.93$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^{2\pi} x\,y^2\,dx = \frac{\pi}{35.93} \int_0^{2\pi} x\,(0.4\,x + \sin(2\,x) + 1)^2\,dx \simeq 3.14$$

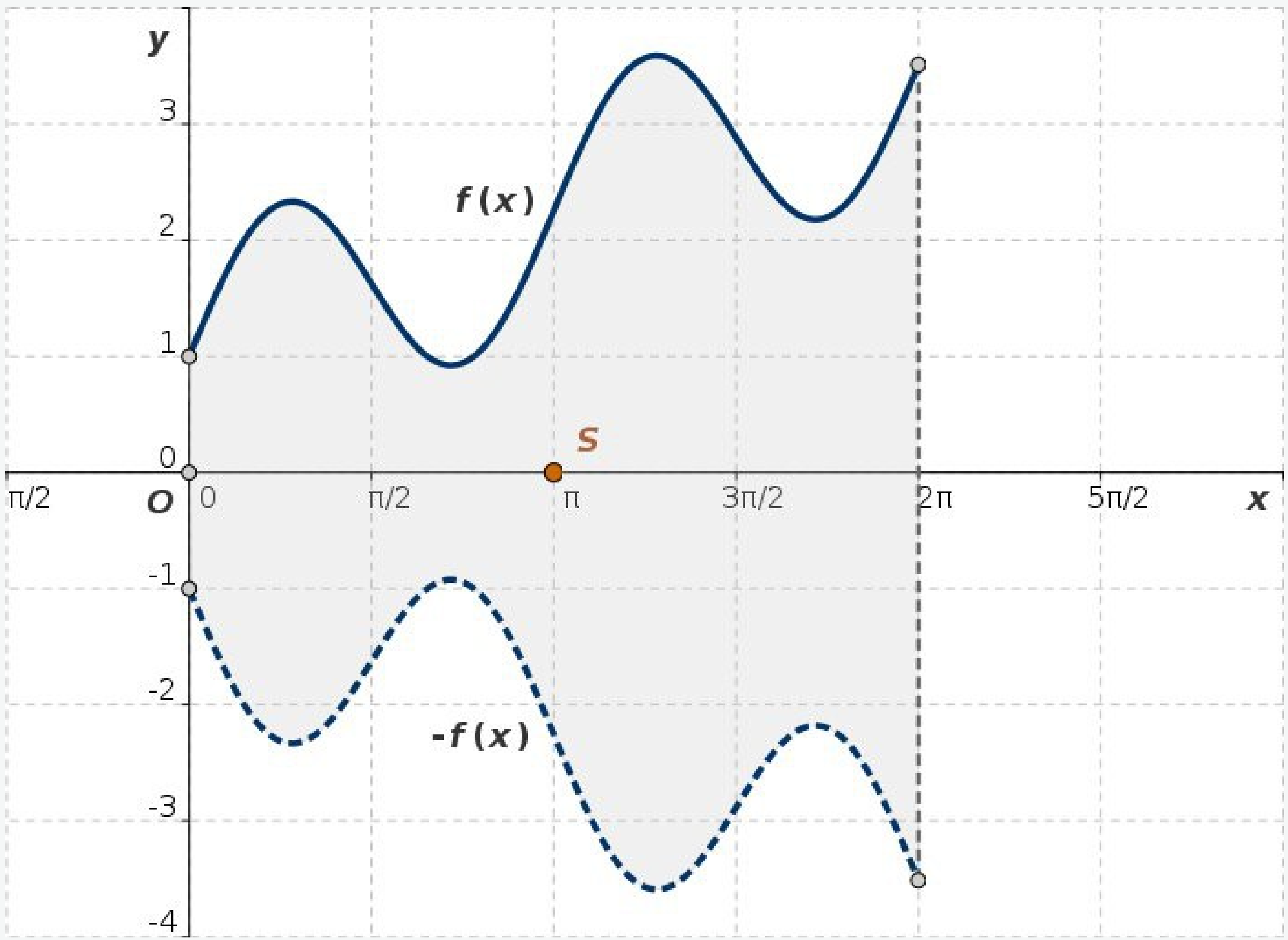

Abb. 20-2: Die Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene; der Schwerpunkt S = (3.14, 0)

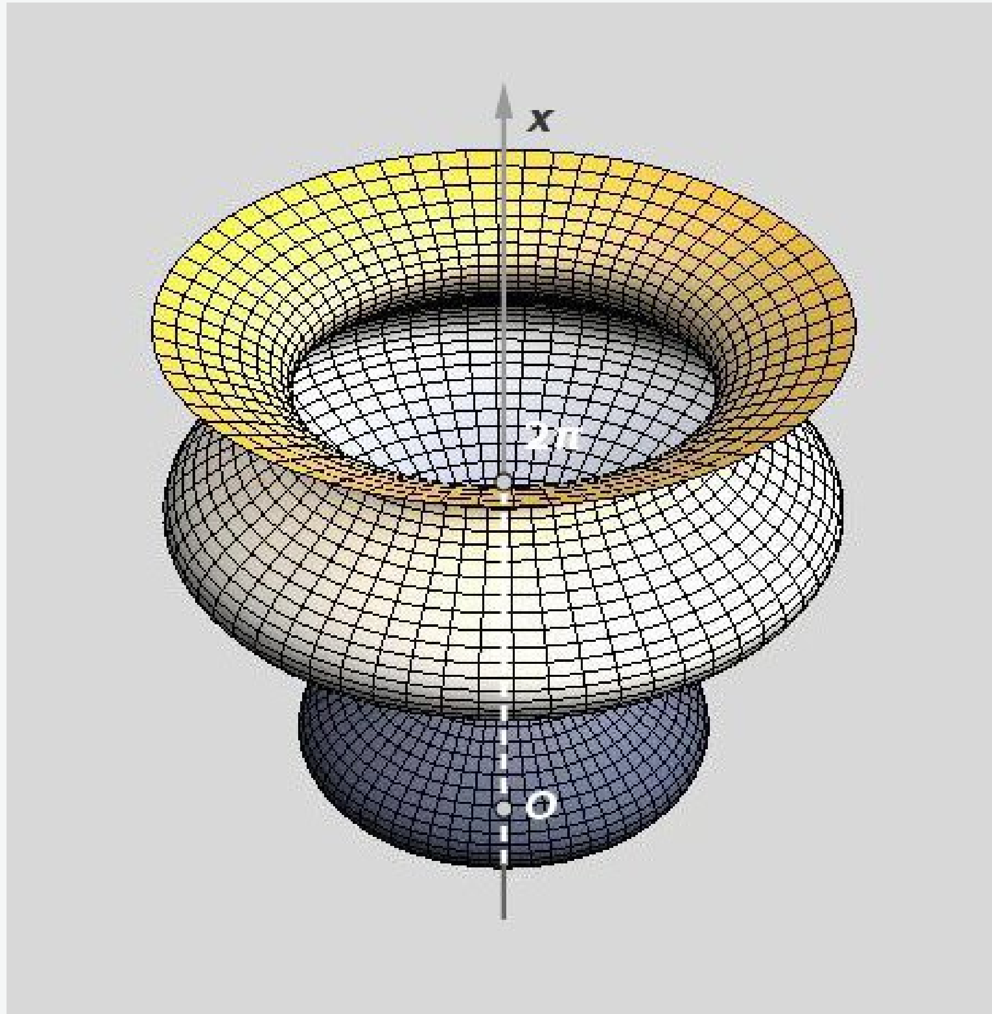

Abb. 20-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ um die x-Achse erzeugter Körper

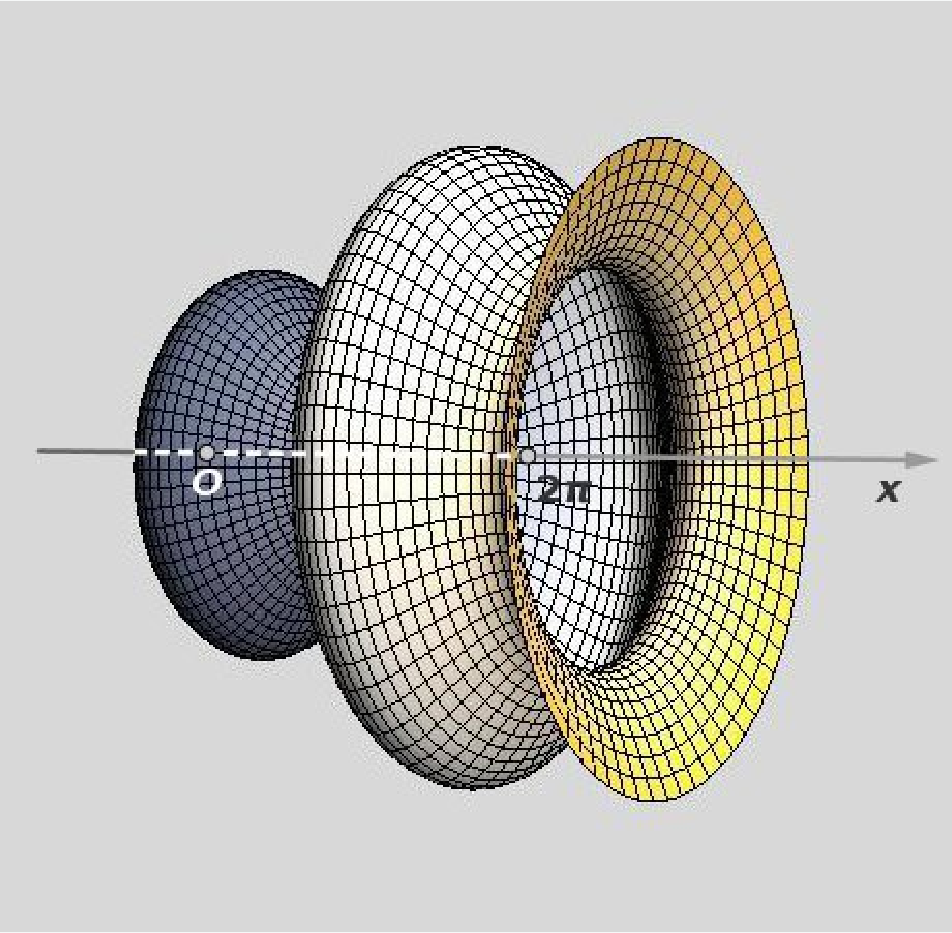

Abb. 20-4: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ um die x-Achse erzeugter Körper