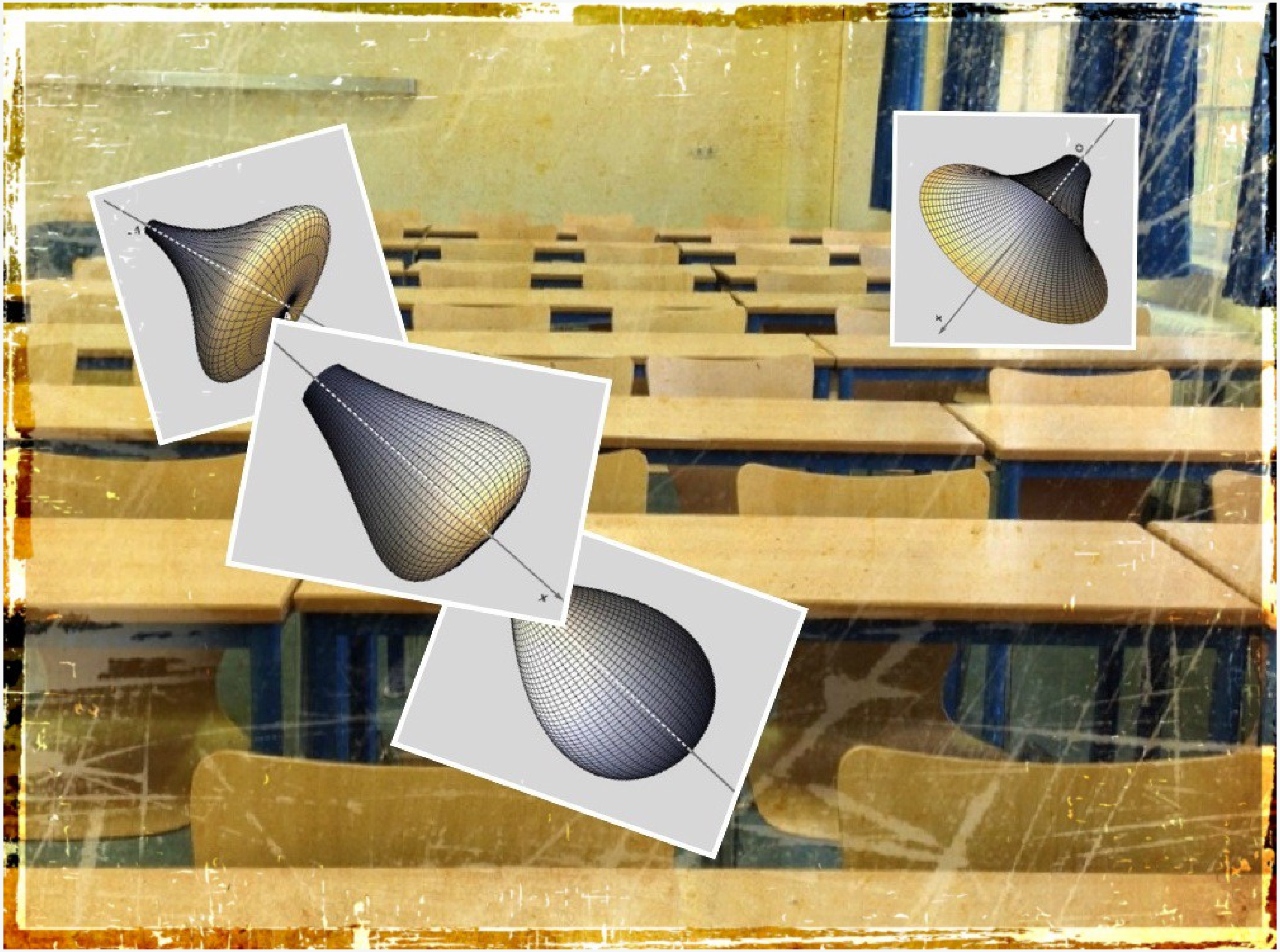

Schwerpunkt eines Rotationskörpers: Aufgaben

Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse entsteht

Aufgabe 5: $f(x) = (4 - x)\sqrt{x}, \quad x \in [0, 4]$

Aufgabe 6: $f(x) = (8 - x)\sqrt{0.1\,x}, \quad x \in [0, 8]$

Aufgabe 7: $f(x) = a\,(b - x)\sqrt{x}, \quad a, b > 0, \quad x \in [0, b]$

Aufgabe 8: $f(x) = e^{\frac{x}{4}}, \quad x \in [0, 7]$

Aufgabe 9: $f(x) = e^{\frac{x}{4}}\sqrt{6 - x}, \quad x \in [-4, 6]$

Aufgabe 10: $f(x) = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{4 - x}, \quad x \in [-4, 4]$

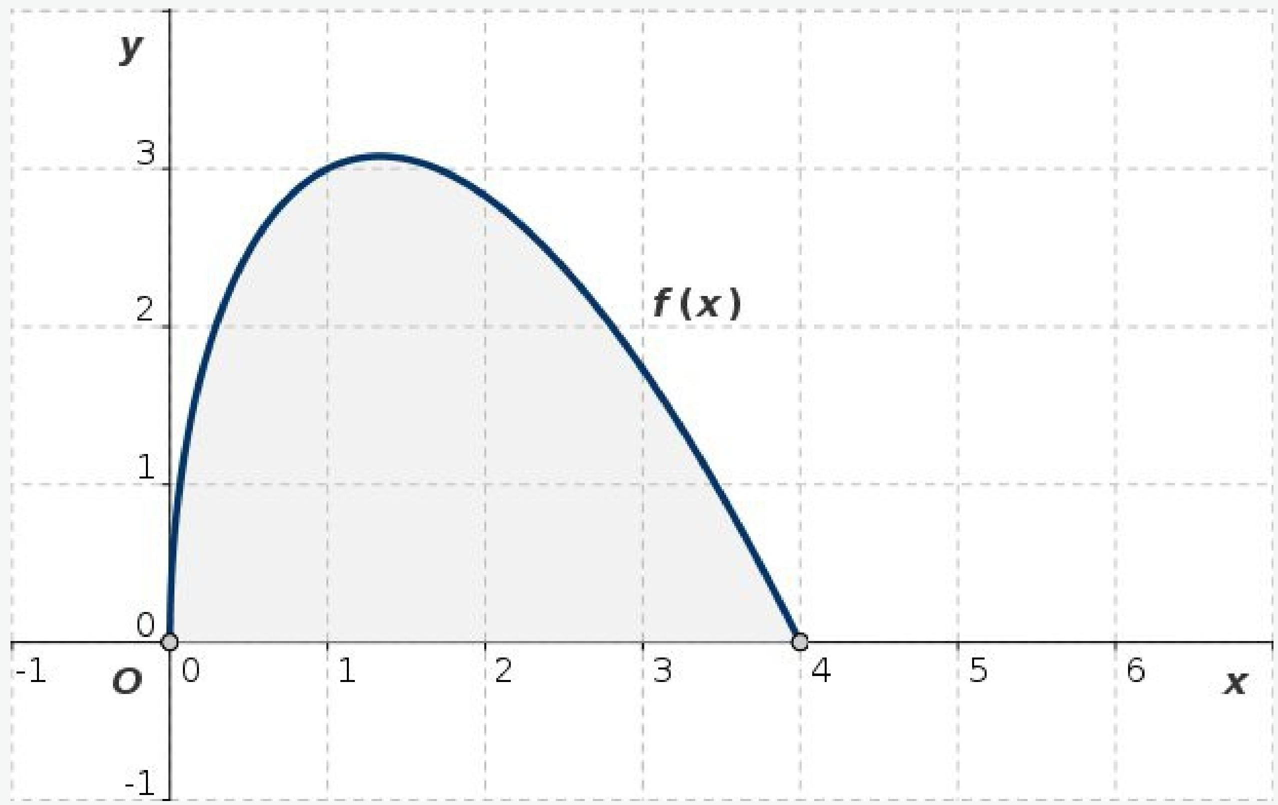

Abb. 5-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [0, 4]

$$f(x) = (4 - x)\sqrt{x}$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^4 y^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^4 (4 - x)^2 x \, dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{8}{3} x^3 + 8x^2 \right]_0^4 = \frac{4^3}{3} \pi \; (\text{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^4 x \, y^2 \, dx = \frac{3}{4^3} \int_0^4 x^2 (4 - x)^2 \, dx = \frac{3}{4^3} \left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16}{3} x^3 \right]_0^4 = \frac{8}{5} \; (\text{LE})$$

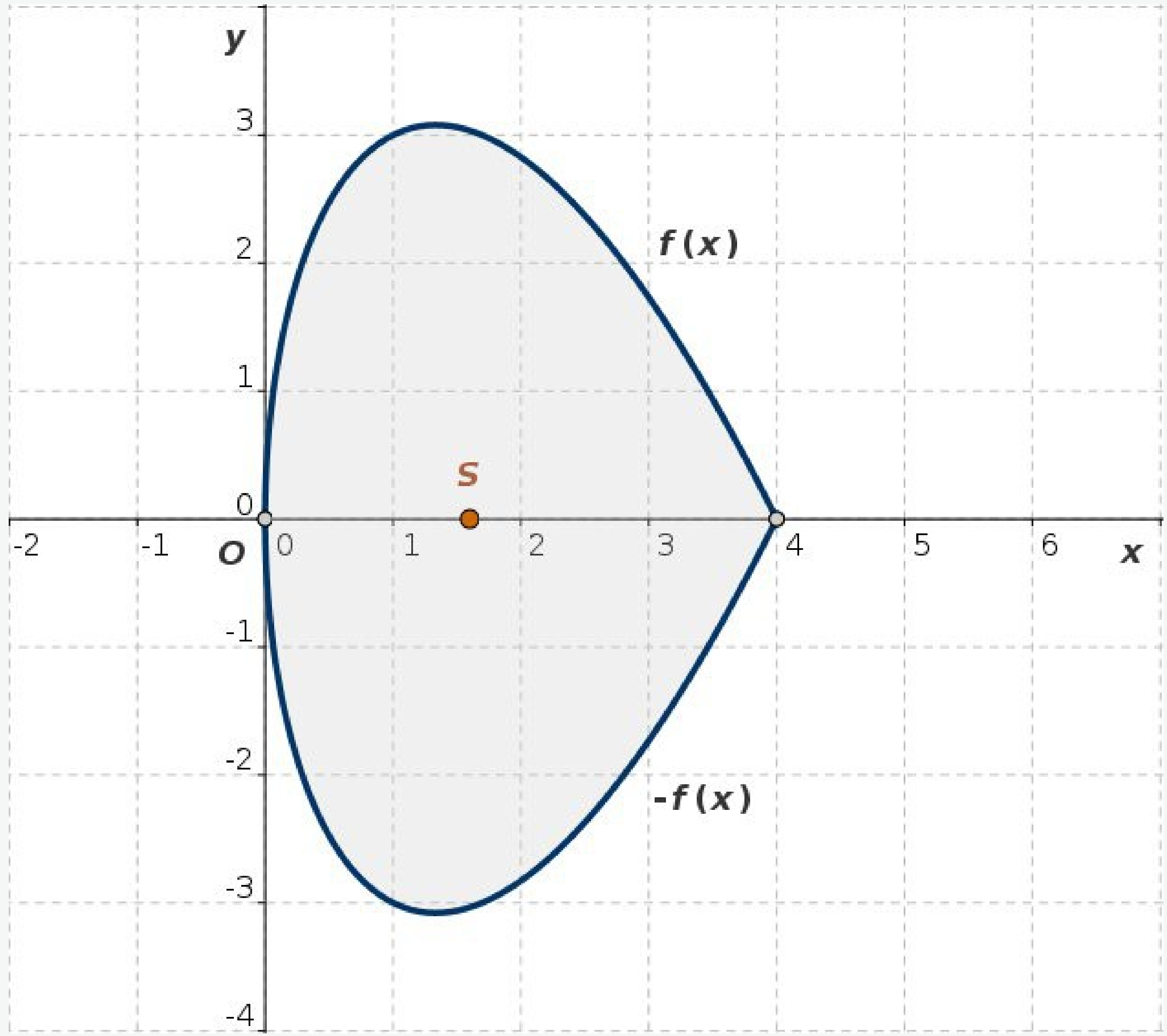

Abb. 5-2: Schnittfläche des Rotationskörpers, der durch Rotation des Kurvenstücks mit der Gleichung $f(x) = (4 - x)\sqrt{x}$ um die x-Achse im Intervall $[0, 4]$ entsteht, mit der x,y-Ebene, Schwerpunkt $S = (1.6, 0, 0)$

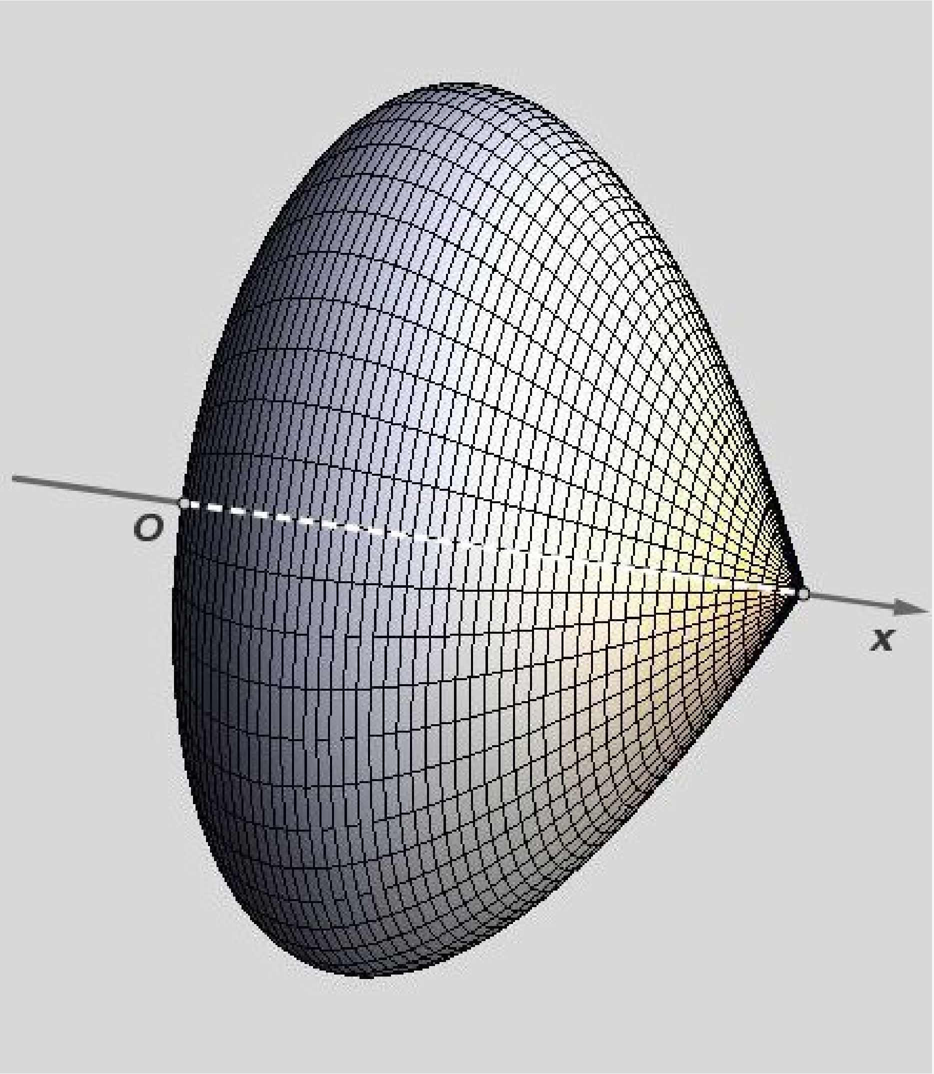

Abb. 5-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \le x \le 4)$ um die x-Achse erzeugter Körper

$$f(x) = (4 - x)\sqrt{x}$$

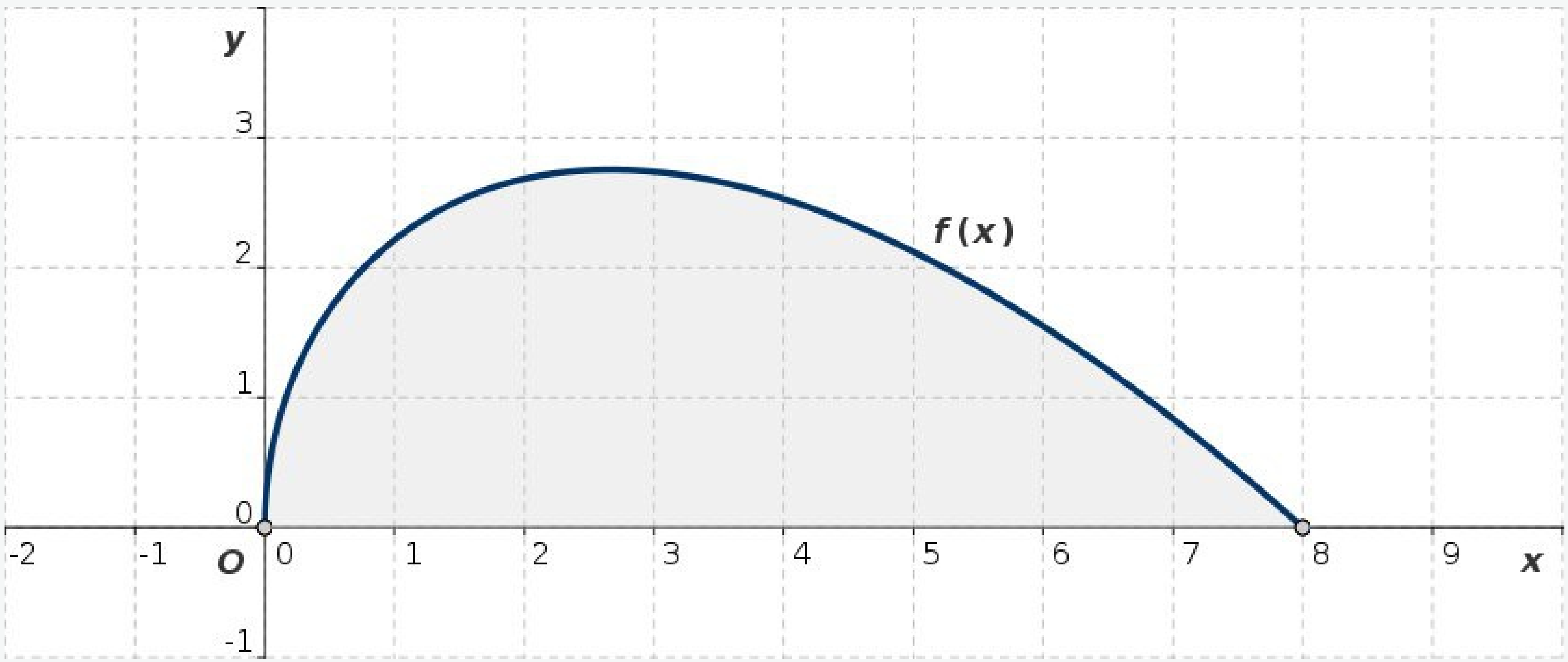

Abb. 6-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung y = f (x) und der x-Achse im Intervall [0, 8]

$$f\,(x) = (8 - x)\sqrt{0.1\,x}$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^8 y^2\, dx = \frac{\pi}{10} \int_0^8 x\,(8 - x)^2\, dx = \frac{\pi}{10}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{16}{3}x^3 + 32\,x^2\right]_0^8 = \frac{512}{15}\,\pi\ \text{(VE)}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x}\int_0^8 x\,y^2\,dx = \frac{3}{2\cdot 512}\int_0^8 x^2(8 - x)^2\,dx = \frac{3}{2\cdot 512}\left[\frac{x^5}{5} - 4\,x^4 + \frac{64}{3}x^3\right]_0^8 =$$

$$= \frac{16}{5} = 3.2\ \text{(LE)}$$

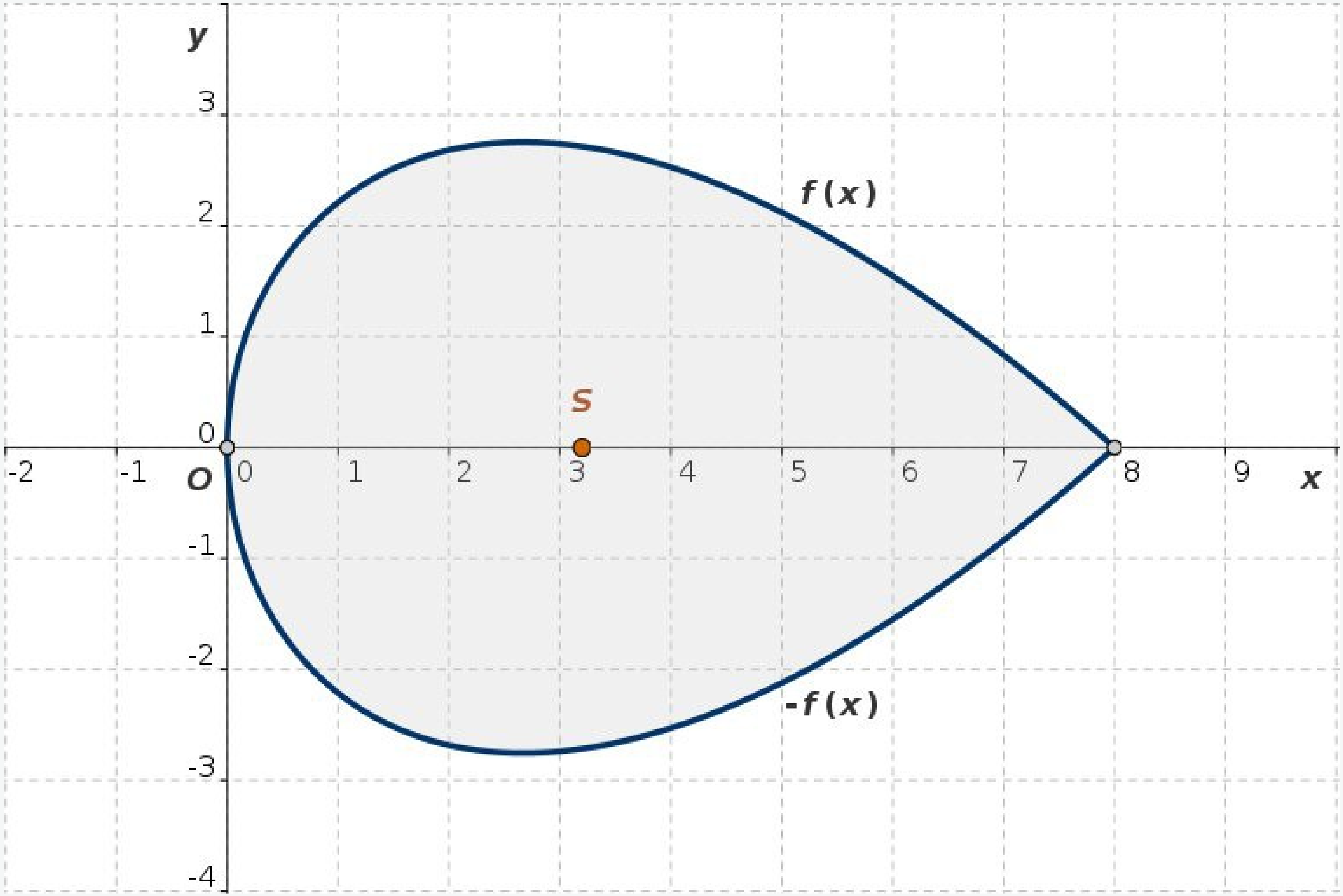

Abb. 6-2: Schnittfläche des Rotationskörpers, der durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ um die x-Achse im Intervall [0, 8] entsteht, mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt $S = (3.2, 0, 0)$

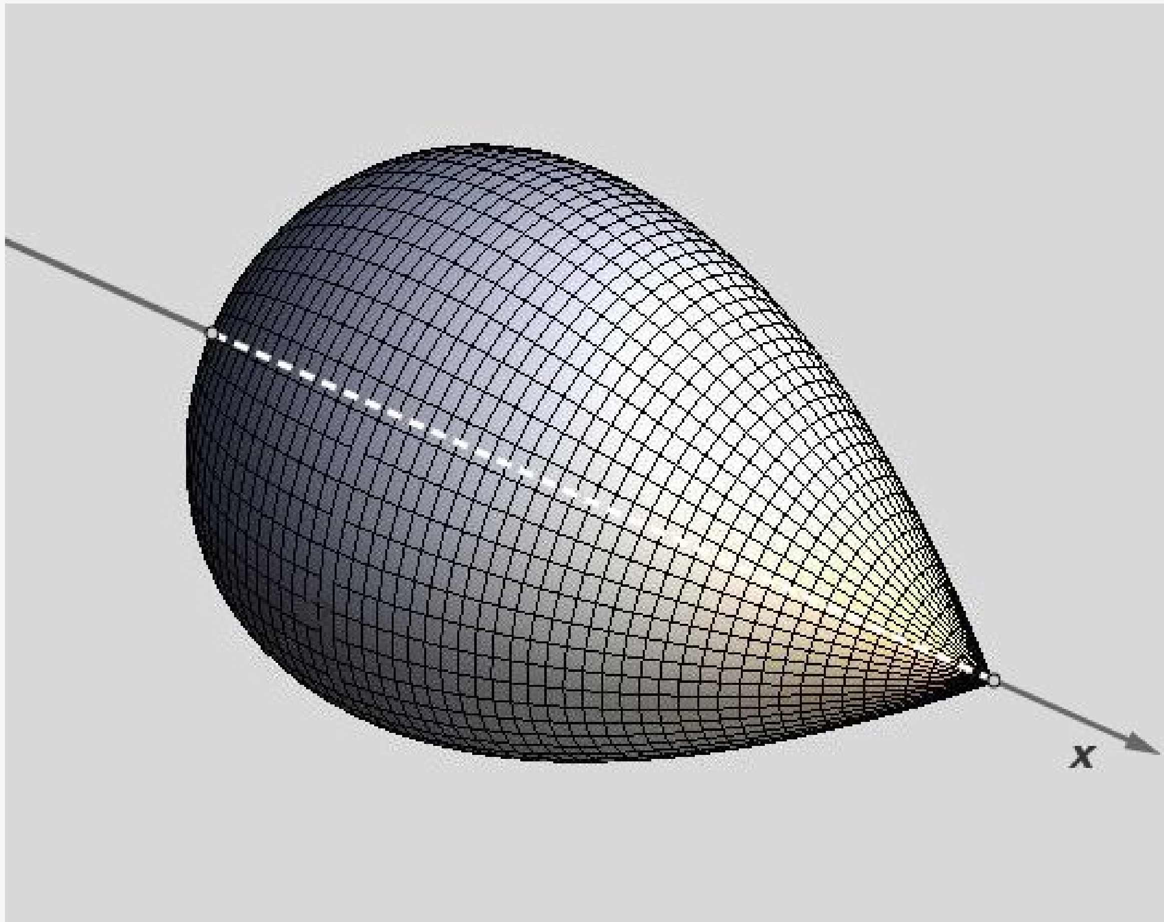

Abb. 6-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \le x \le 8)$ um die x-Achse erzeugter Körper

$$f(x) = (8 - x)\sqrt{0.1\,x}$$

$$f(x) = a\,(b - x)\sqrt{x}\,, \qquad a\,,b > 0, \qquad x \in [0,\ b]$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^b y^2\ dx = \pi\, a^2 \int_0^b (b - x)^2\, x\ dx = \pi\, a^2 \left[\frac{1}{2}\, b^2 x^2 - \frac{2}{3}\, b\, x^3 + \frac{x^4}{4} \right]_0^b =$$

$$= \frac{\pi}{12}\, a^2\, b^4\ (\mathrm{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^b x\, y^2\, dx = \frac{12}{b^4} \int_0^b x^2\, (b - x)^2\, dx = \frac{12}{b^4} \left[\frac{1}{3}\, b^2\, x^3 - \frac{1}{2}\, b\, x^4 + \frac{x^5}{5} \right]_0^b =$$

$$= \frac{2}{5}\, b\ (\mathrm{LE})$$

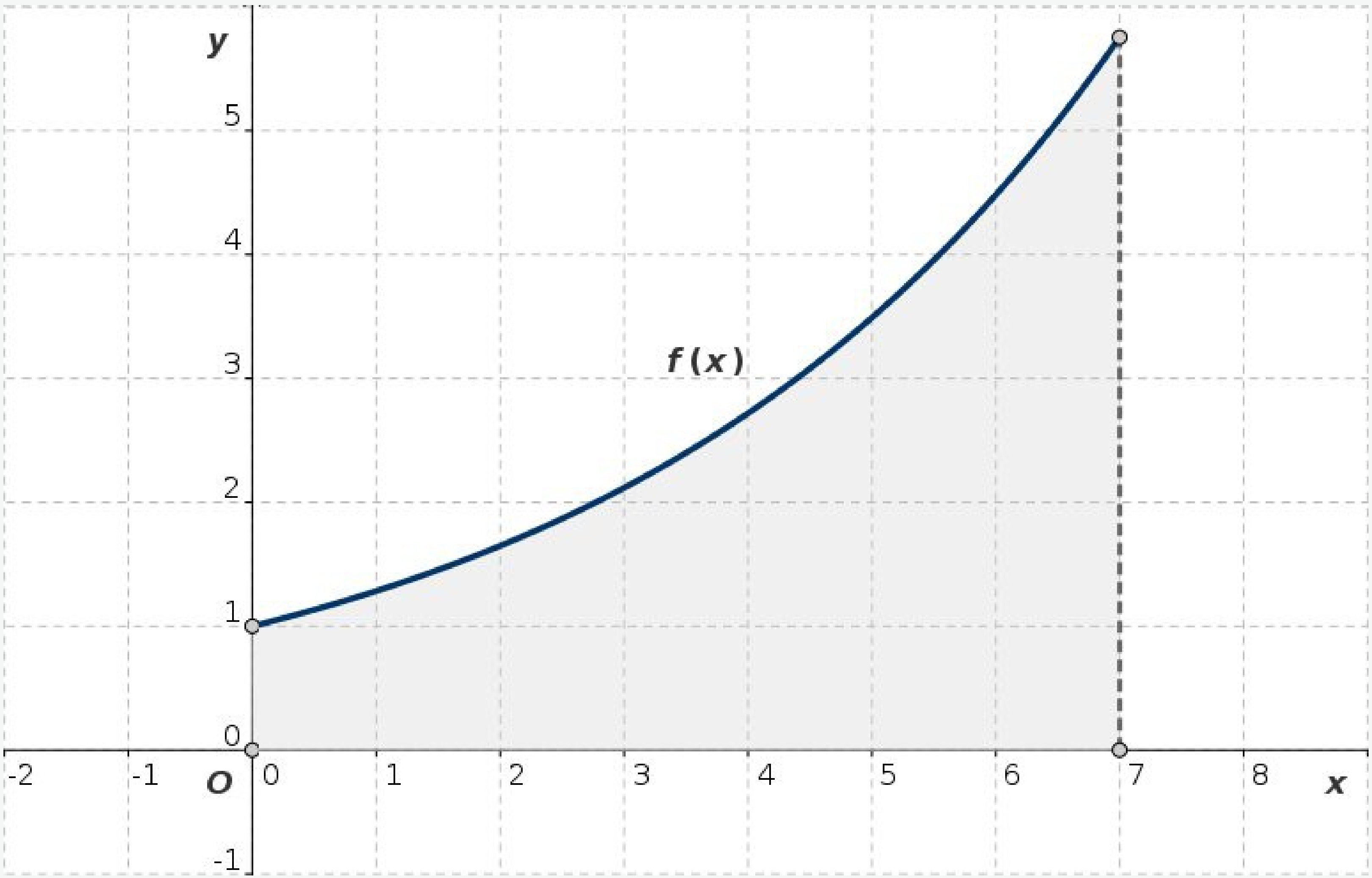

Abb. 8-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [0, 7]

$$f(x) = e^{\frac{x}{4}}$$

$$y = e^{\frac{x}{4}}, \qquad x \in [0,\ 7]$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^7 y^2\ dx = \pi \cdot \int_0^7 e^{x/2}\ dx = 2\pi \left[e^{\frac{x}{2}} \right]_0^7 = 2\pi \left(e^{7/2} - 1 \right) \text{ (VE)}$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_0^7 x\, y^2\, dx = \frac{1}{2\ (e^{7/2} - 1)} \int_0^7 x\, e^{x/2}\ dx =$$

$$= \frac{1}{(e^{7/2} - 1)} \cdot \left[(x - 2)\ e^{\frac{x}{2}} \right]_0^7 = \frac{2 + 5\, e^{7/2}}{(e^{7/2} - 1)} \simeq 5.22 \ \text{ (LE)}$$

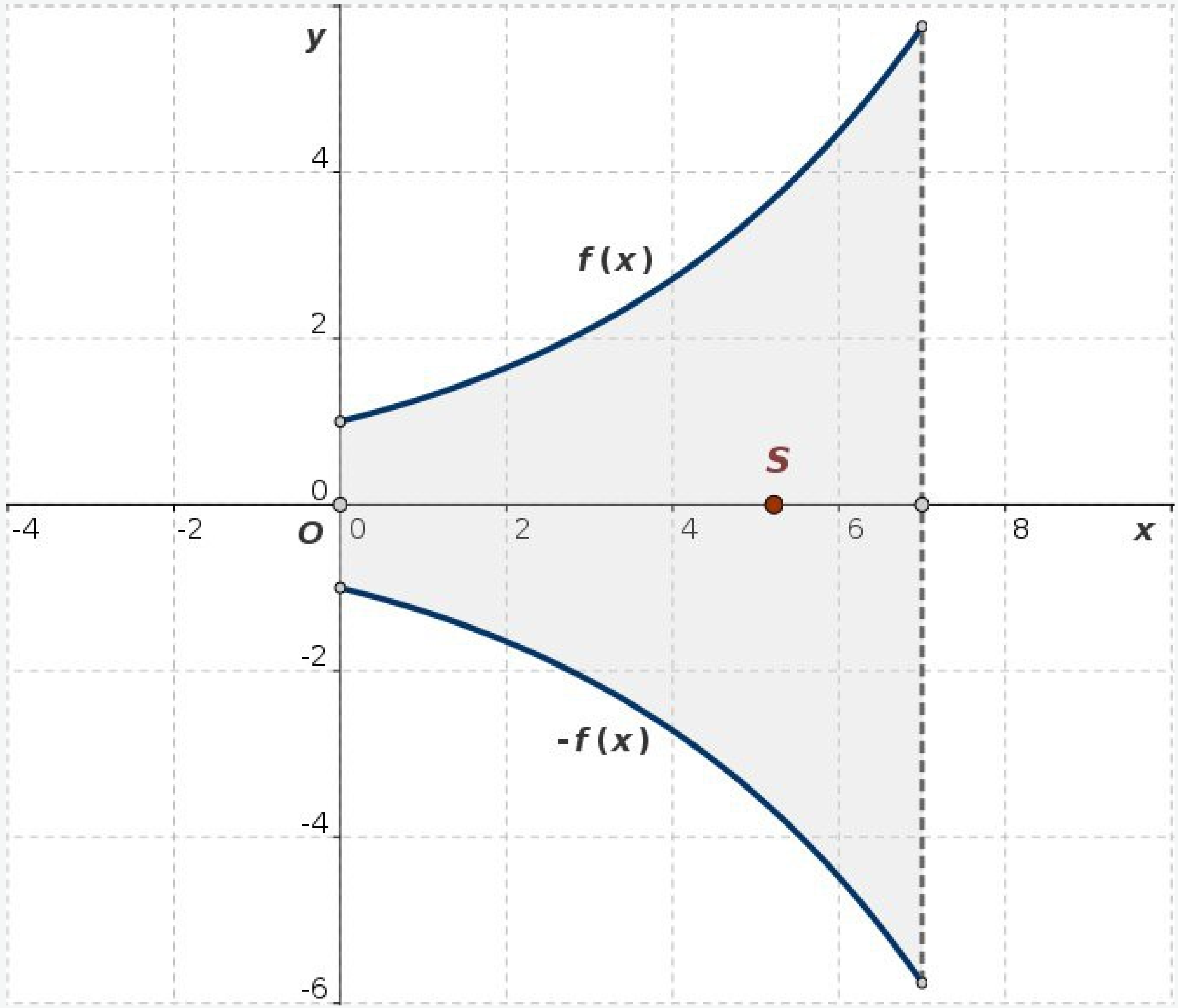

Abb. 8-2: Schnittfläche des Rotationskörpers, der durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ um die x-Achse im Intervall [0, 7] entsteht, mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt $S = (5.22, 0, 0)$

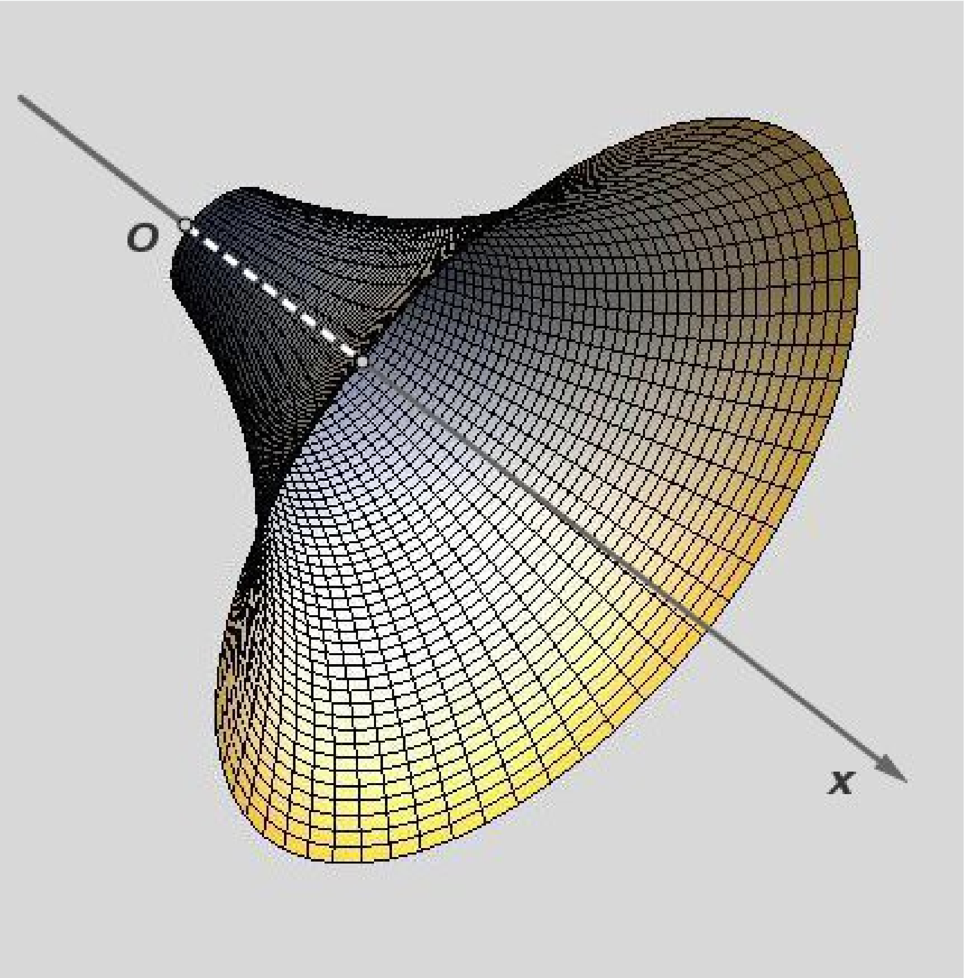

Abb. 8-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(0 \le x \le 7)$ um die x-Achse erzeugter Körper

$$f(x) = e^{\frac{x}{4}}$$

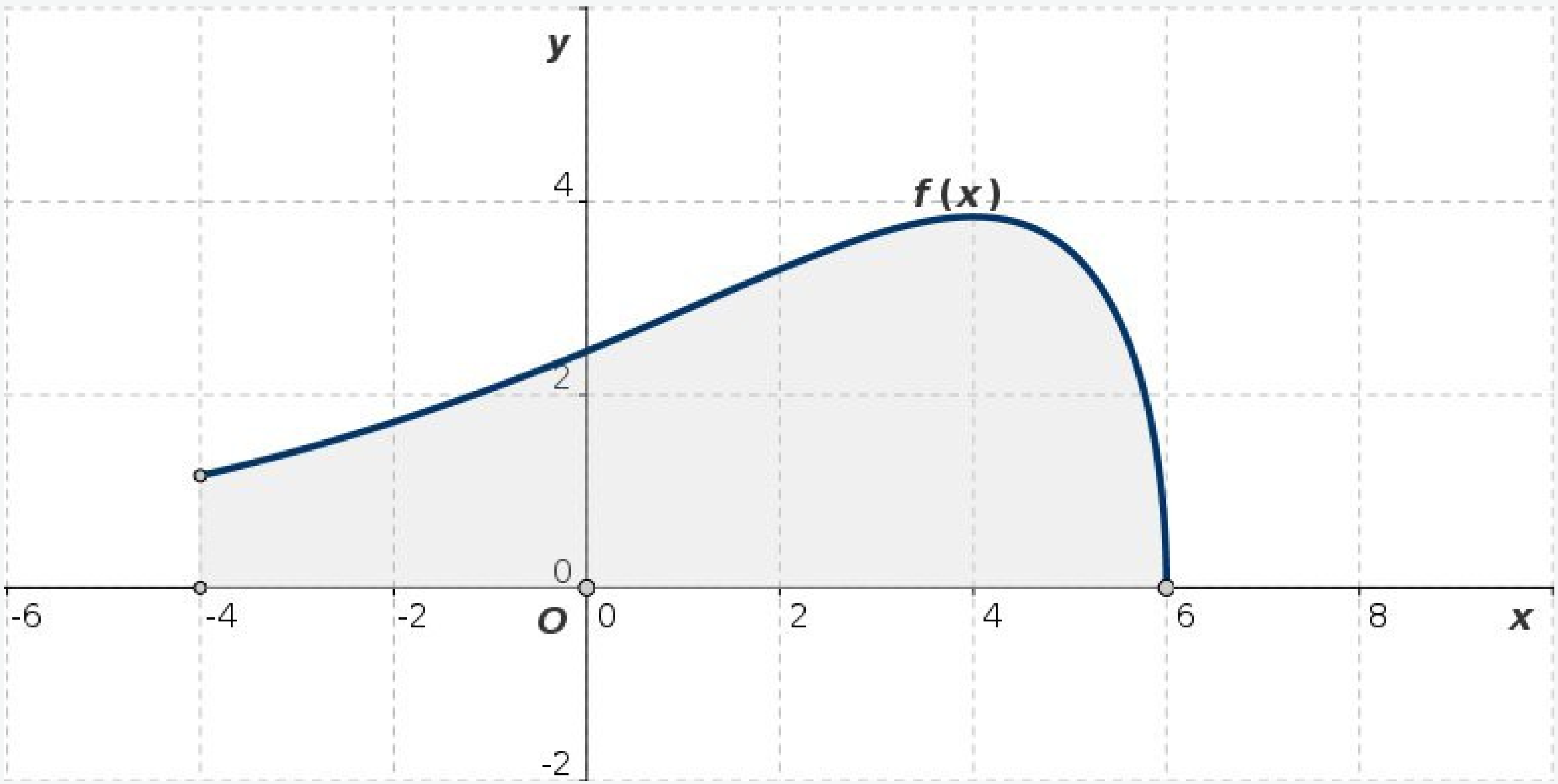

Abb. 9-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [-4, 6]

$$f(x) = e^{\frac{x}{4}} \sqrt{6 - x}$$

$$y = e^{\frac{x}{4}} \sqrt{6 - x}\,, \qquad x \in [-4,\ 6]$$

$$V_x = \pi \cdot \int_{-4}^{6} y^2\ dx = \pi \cdot \int_{-4}^{6} e^{\frac{x}{2}} (6 - x)\ dx = 2\pi \left[(8 - x)\ e^{\frac{x}{2}} \right]_{-4}^{6} =$$

$$= 4\pi\,(e^3 - 6\,e^{-2})\ (\mathrm{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_{-4}^{6} x\,y^2\,dx = \frac{1}{4\,(e^3 - 6\,e^{-2})} \int_{-4}^{6} (6\,x - x^2)\,e^{\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2\,(e^3 - 6\,e^{-2})} \left[(20 - 10\,x + x^2)\,e^{\frac{x}{2}} \right]_{-4}^{6} =$$

$$= \frac{2\,(19\,e^{-2} + e^3)}{e^3 - 6\,e^{-2}} \simeq 2.35\ (\mathrm{LE})$$

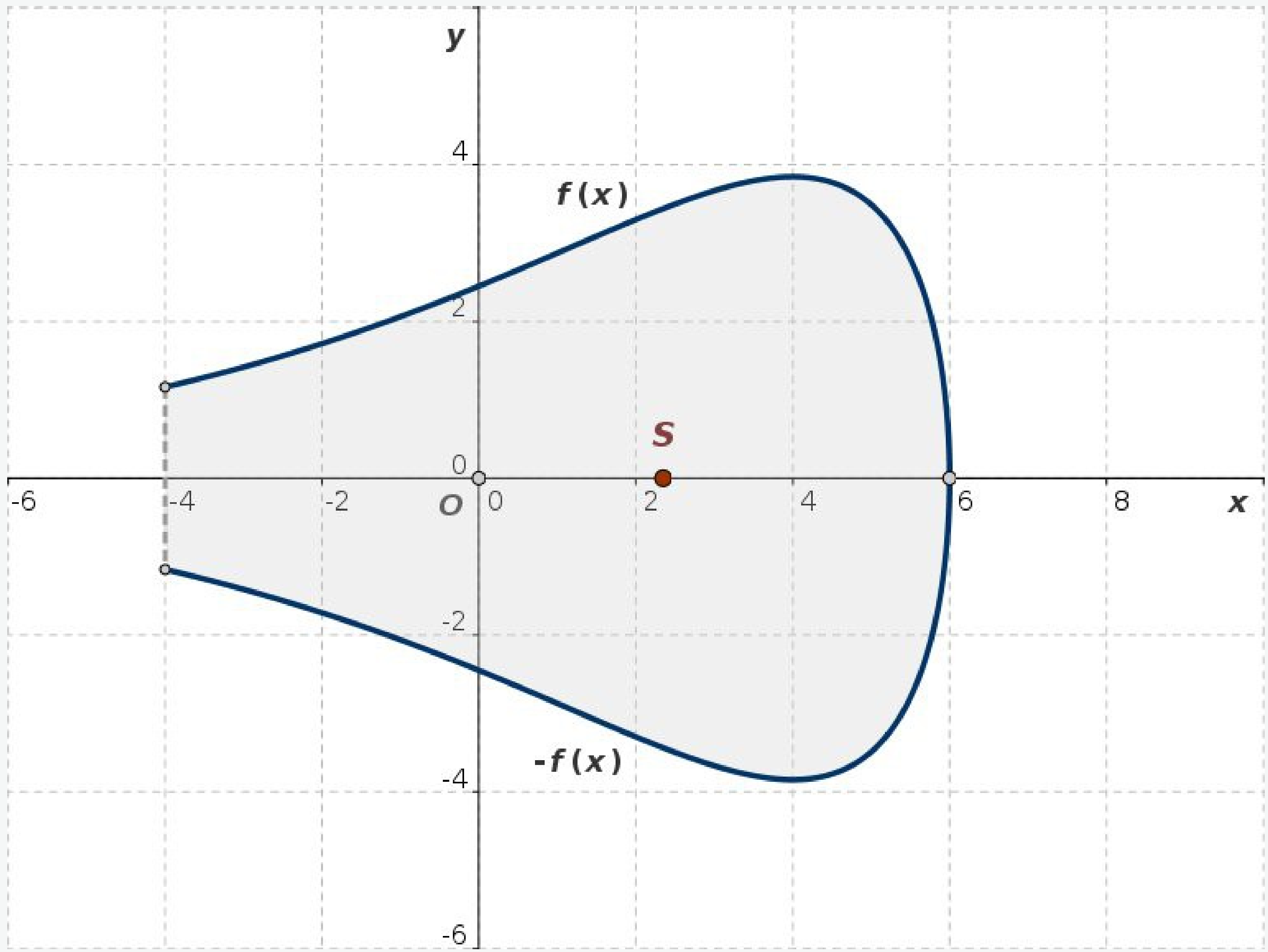

Abb. 9-2: Schnittfläche des Rotationskörpers, der durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ um die x-Achse im Intervall [-4, 6] entsteht, mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt $S = (2.35, 0, 0)$

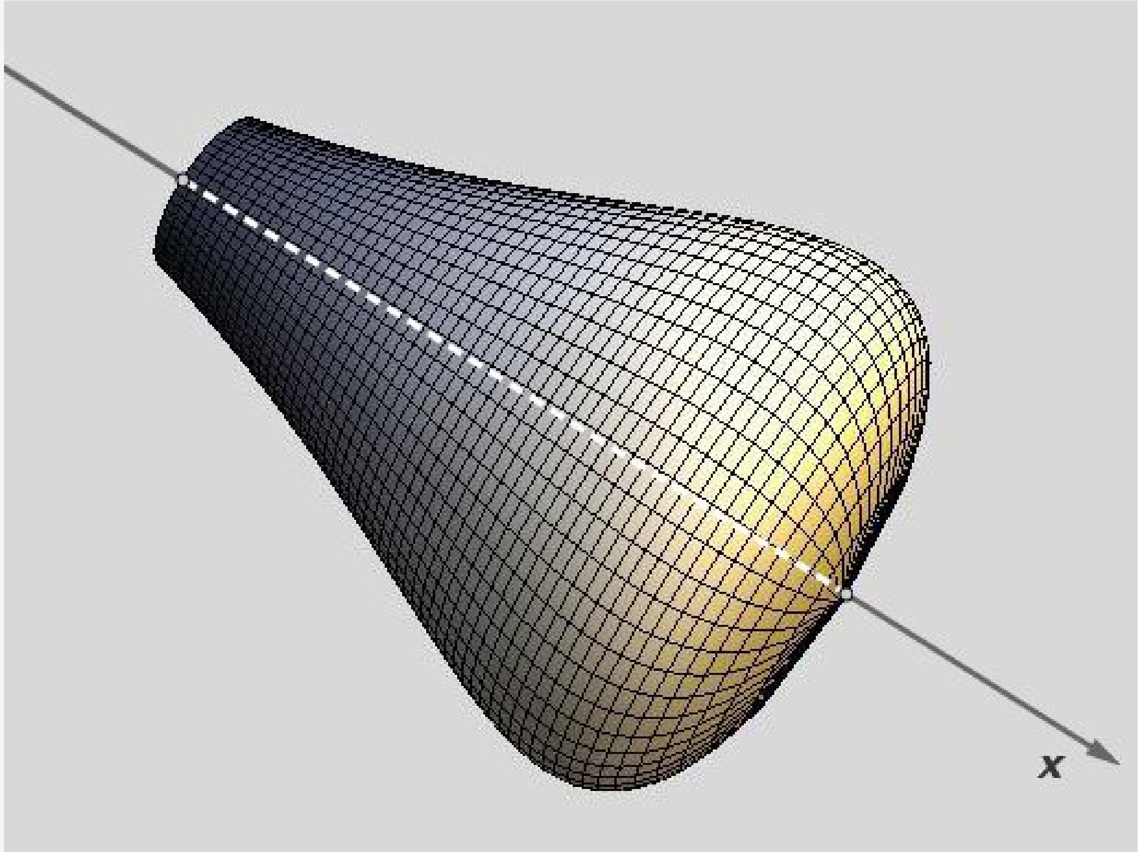

Abb. 9-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(-4 \le x \le 6)$ um die x-Achse erzeugter Körper

$$y = e^{\frac{x}{4}} \sqrt{6 - x}$$

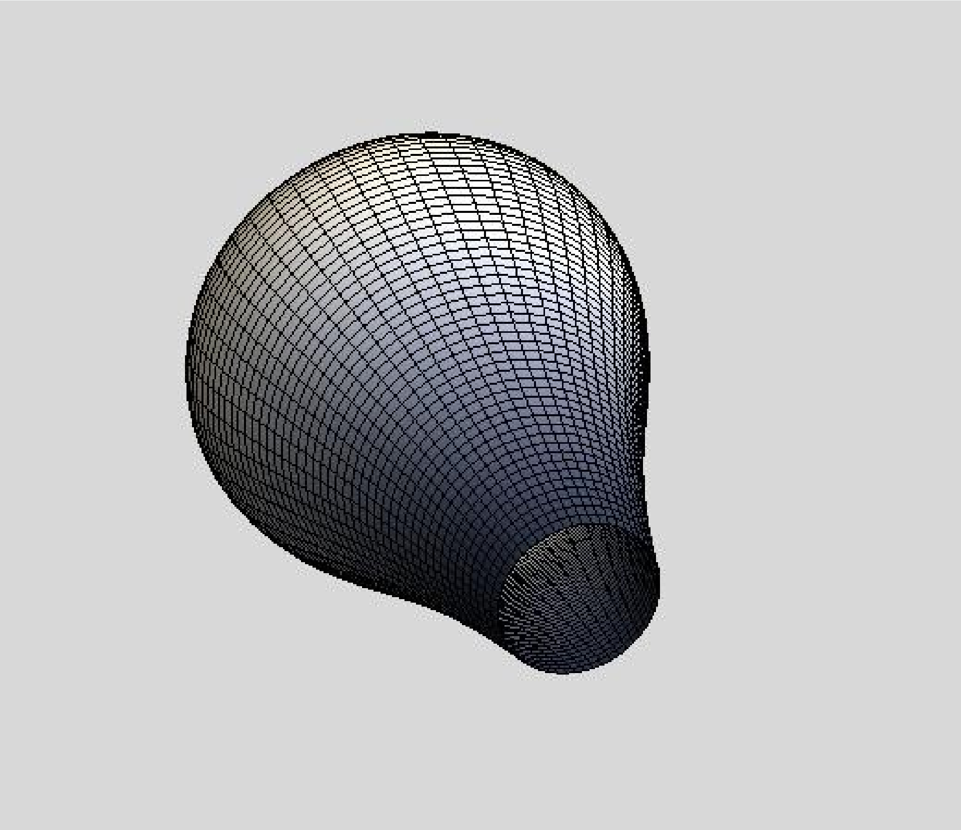

Abb. 9-4: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(-4 \le x \le 6)$ *um die x-Achse erzeugter Körper*

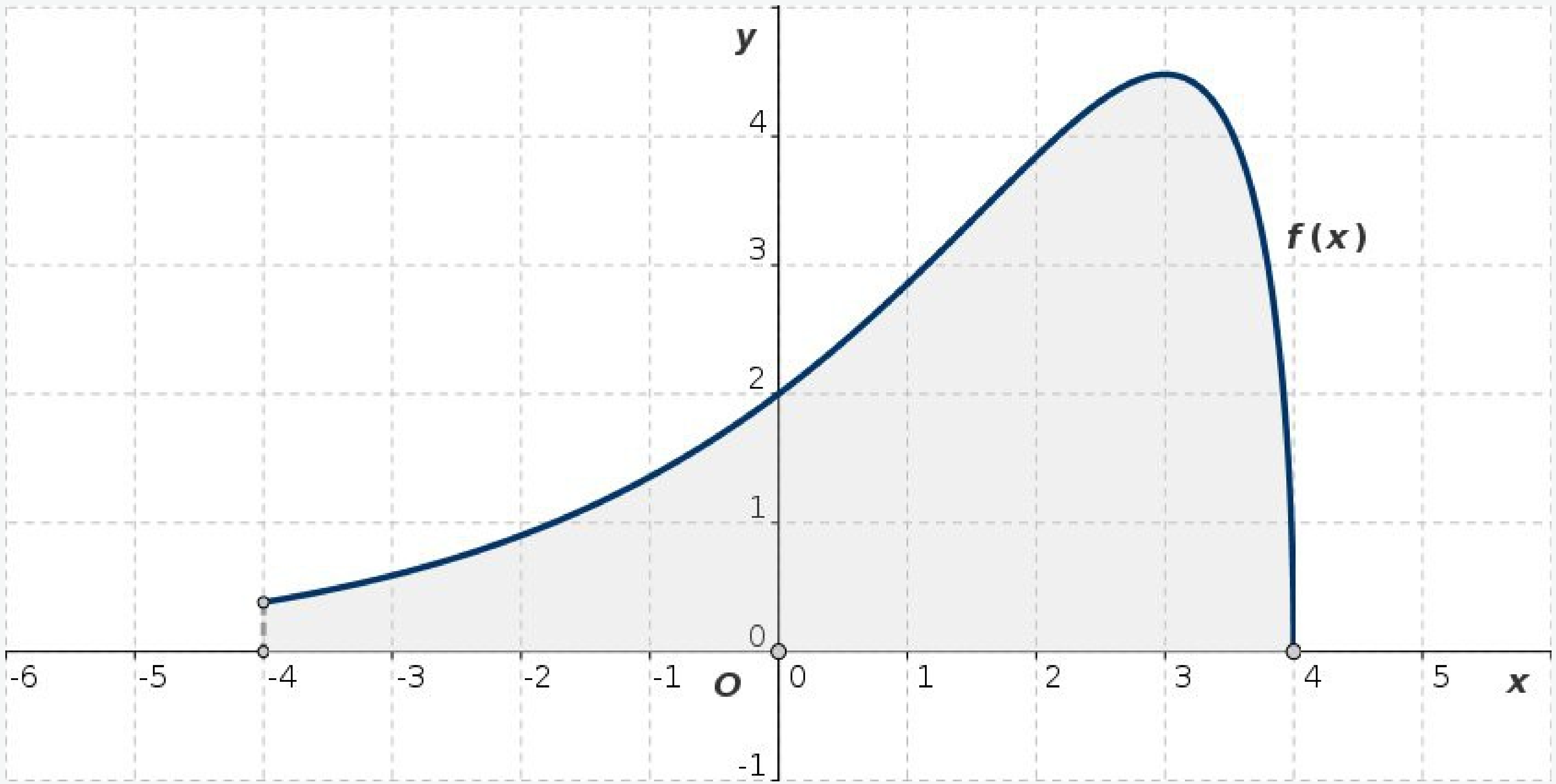

Abb. 10-1: Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung y = f (x) und der x-Achse im Intervall [-4, 4]

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{4 - x}$$

$$y = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{4 - x}\,, \qquad x \in [-4,\ 4]$$

$$V_x = \pi \cdot \int_{-4}^{4} y^2\ dx = \pi \cdot \int_{-4}^{4} e^{x} (4 - x)\ dx = \pi\ \Big[(5 - x)\ e^{x} \Big]_{-4}^{4} =$$

$$= \pi \left(e^{4} - 9\, e^{-4} \right)\ (\mathrm{VE})$$

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_{-4}^{4} x\, y^2\, dx = \frac{1}{e^4 - 9\, e^{-4}} \int_{-4}^{4} (4\, x - x^2)\, e^{x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{9\, e^{-4} - e^{4}} \Big[(6 - 6\, x + x^2)\, e^{x} \Big]_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{2\,(23\, e^{-4} + e^{4})}{e^4 - 9\, e^{-4}} \simeq 2.02\ (\mathrm{LE})$$

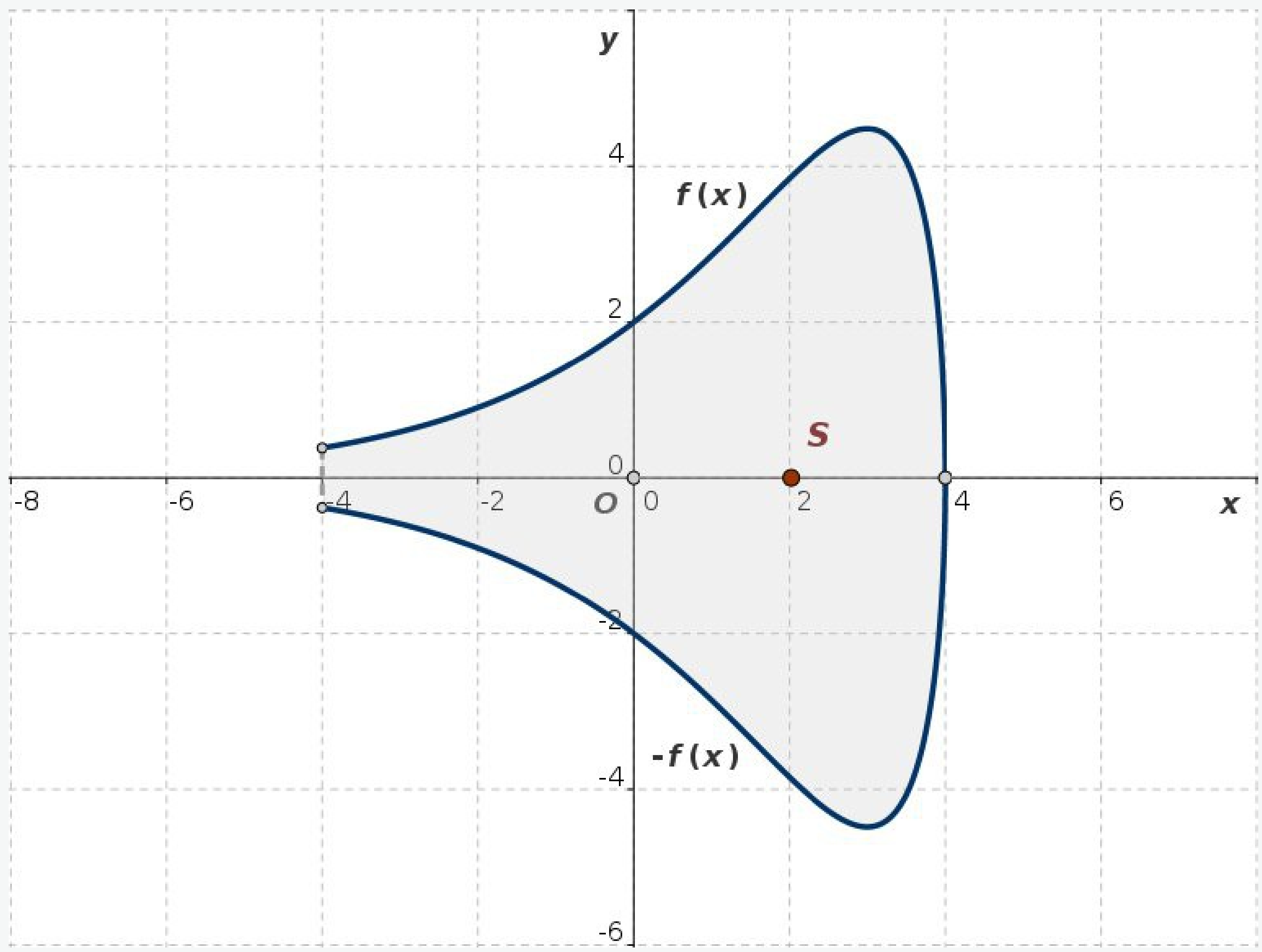

Abb. 10-2: Schnittfläche des Rotationskörpers, der durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ um die x-Achse im Intervall [-4, 4] entsteht, mit der x,y-Ebene. Schwerpunkt $S = (2.02, 0, 0)$

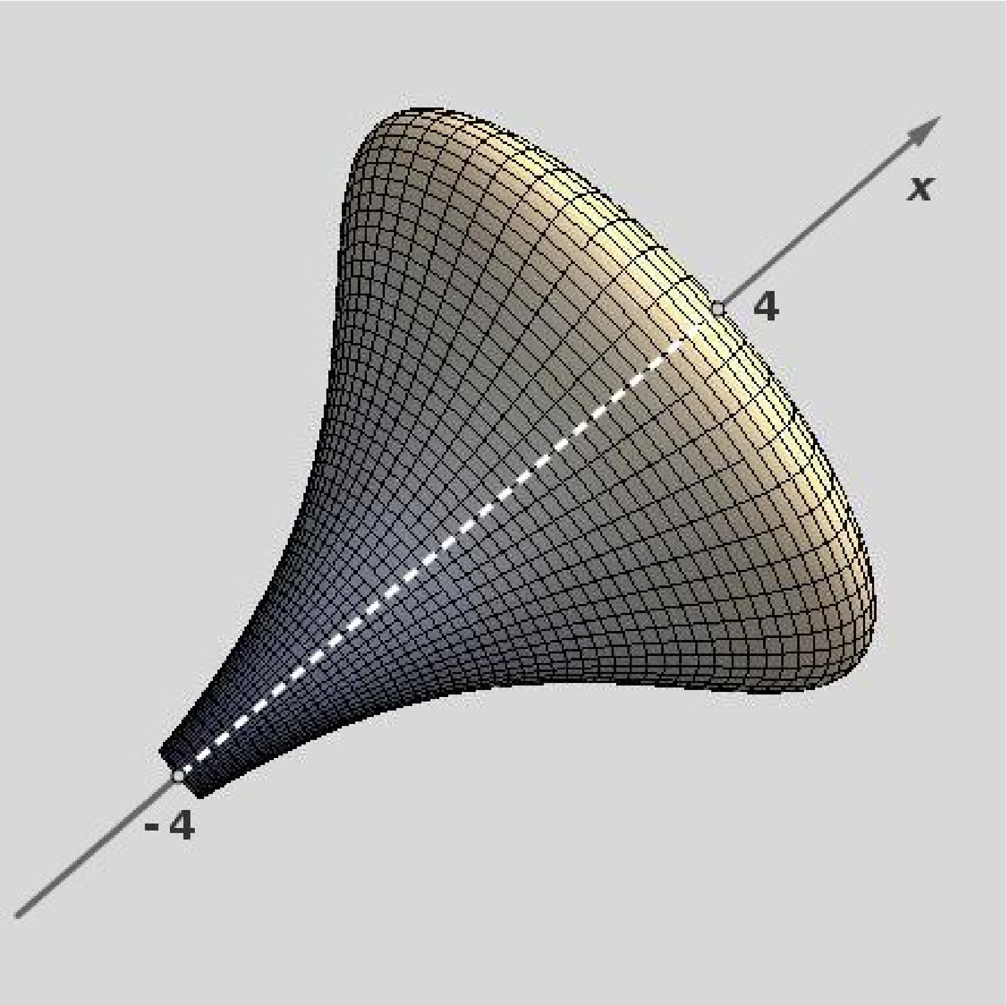

Abb. 10-3: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ $(-4 \leq x \leq 4)$ um die x-Achse erzeugter Körper

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{4 - x}$$

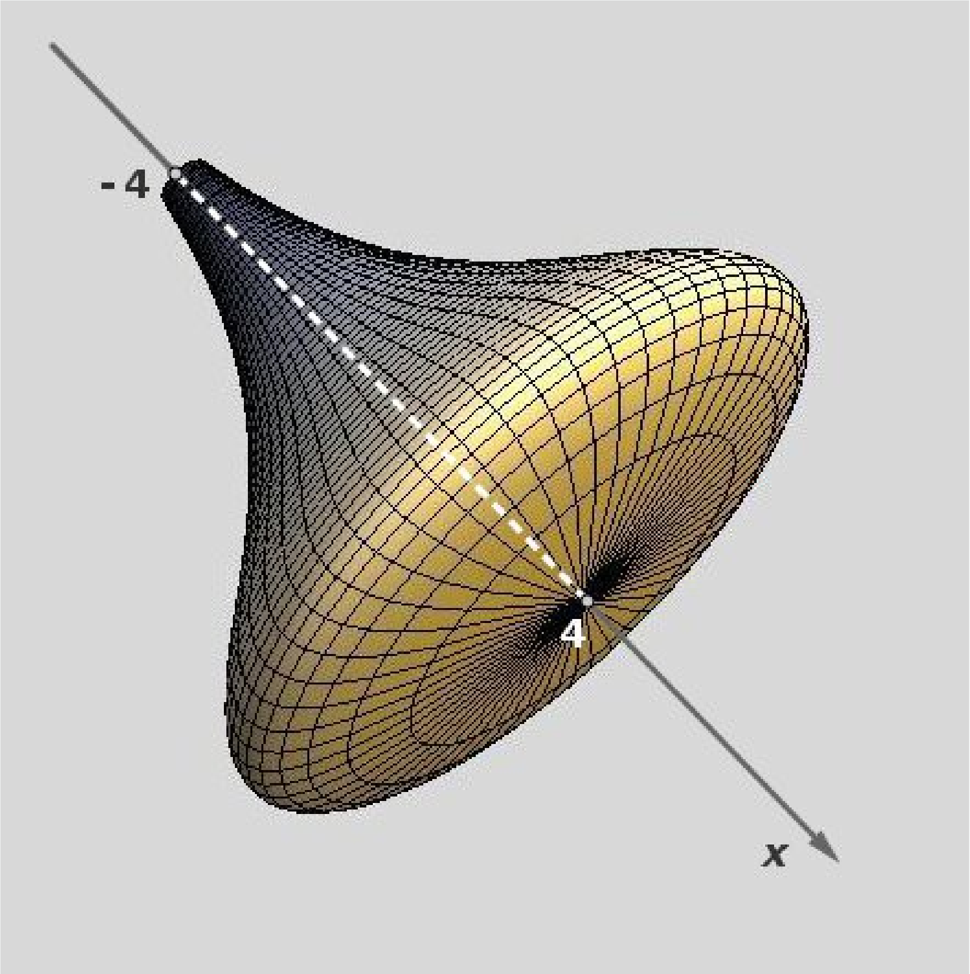

Abb. 10-4: Durch Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$ ($-4 \le x \le 4$) um die x-Achse erzeugter Körper

http://livingtools.de/images/product_images/original_images/menu_wein_dekanter_karaffe_1705_0.jpg

Abb. 10-5: Weindekanter als Körper