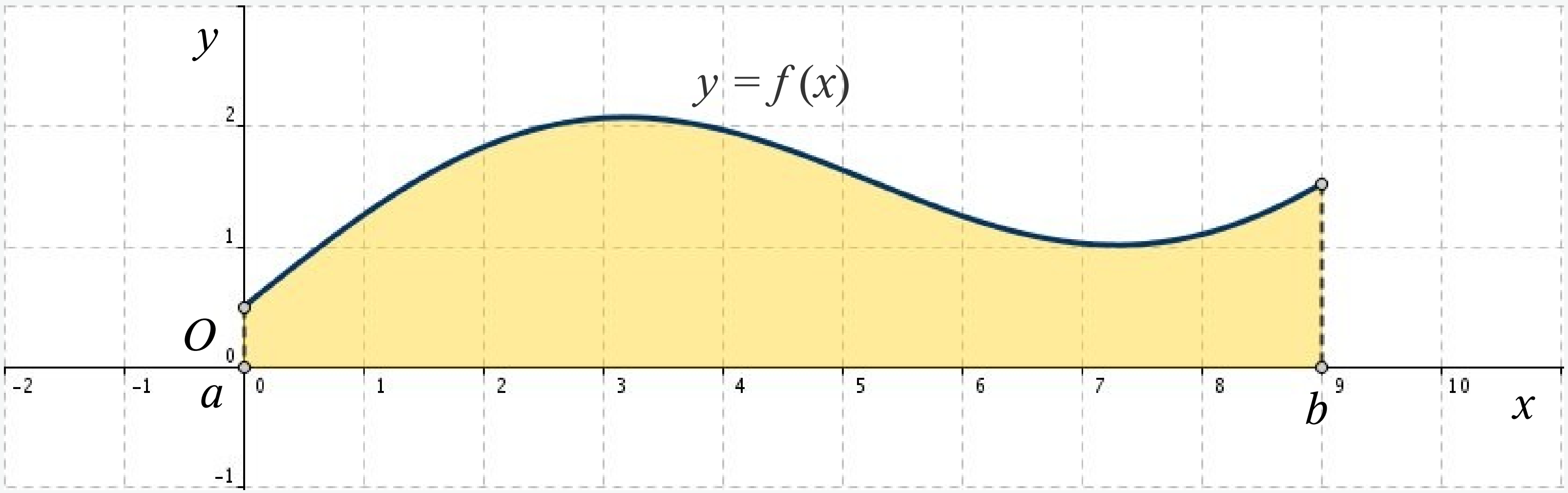


Abb. 10: Eine auf dem Intervall $[a, b]$ *stetige Funktion* $y = f(x)$

Die über dem Intervall $[a, b]$ gelegene Kurve mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper.

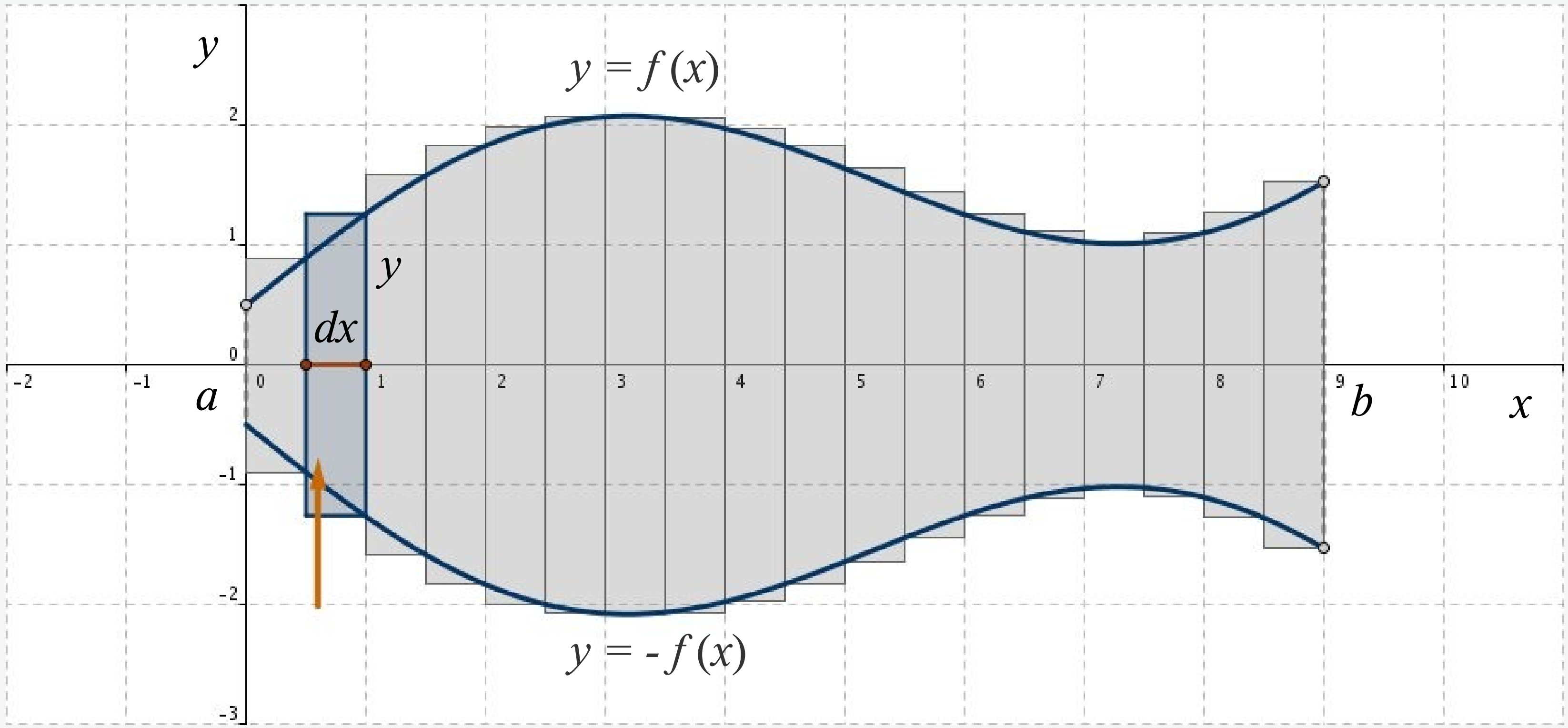


Abb. 11: Schnittfläche des Rotationskörpers mit der x,y-Ebene. Der Rotationskörper wird durch kreisförmige Zylinderscheiben ersetzt

Der Rotationskörper wird durch Schnitte senkrecht zur Drehachse in Scheiben gleicher Dicke zerlegt. Jede Scheibe wird durch eine kreisförmige Zylinderscheibe gleicher Dicke ersetzt. Das Massenträgheitsmoment einer Zylinderscheibe ist

$$J_{Zylinderscheibe} = \frac{1}{2} m R^2, \qquad R \to y = f(x), \quad m \to dm$$

$$dJ_x = \frac{1}{2} y^2 \, dm, \qquad dm = \pi \rho y^2 \, dx$$

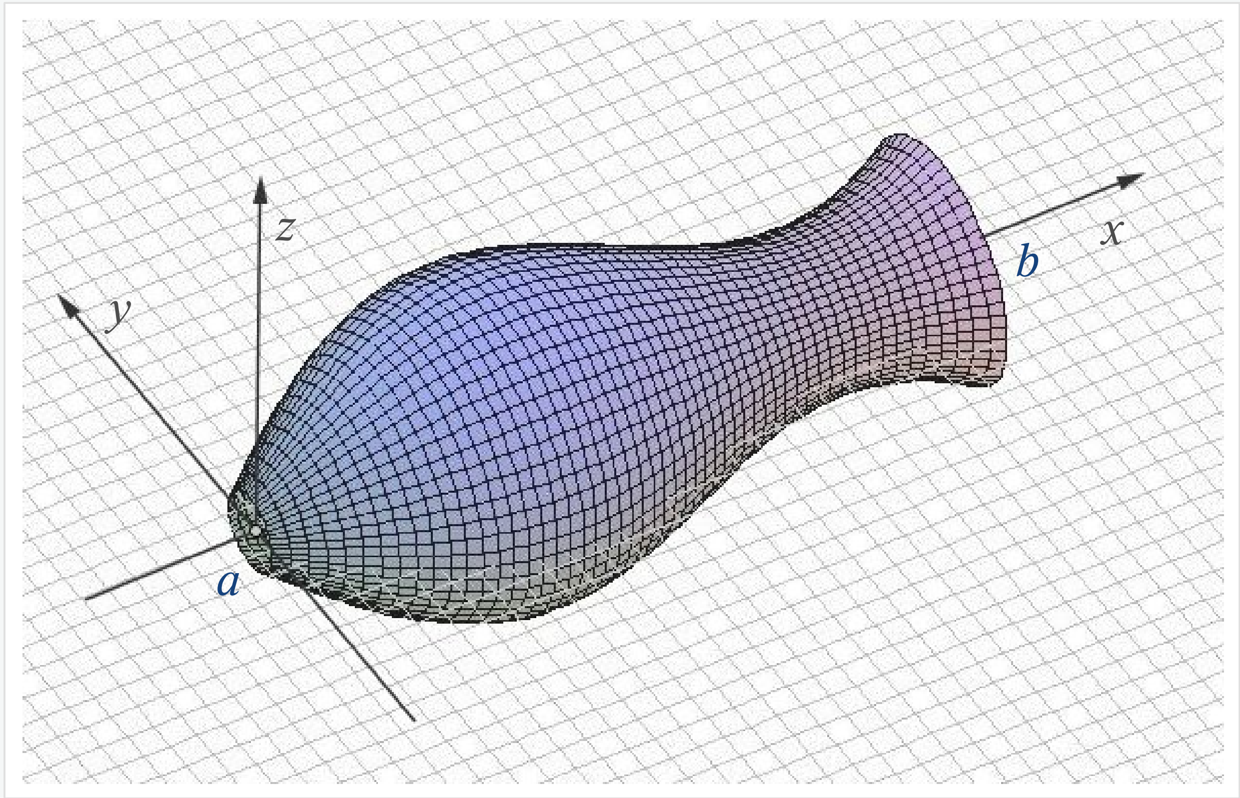


Abb. 12: Ein Körper, der durch die Rotation der ebenen Kurve $y = f(x)$ (Abb. 11) um die x-Achse entsteht

Das Massenträgheitsmoment bezüglich der x-Achse (Rotationsachse)

$$J_x = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_a^b y^4\,dx = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_a^b f^4(x)\,dx$$

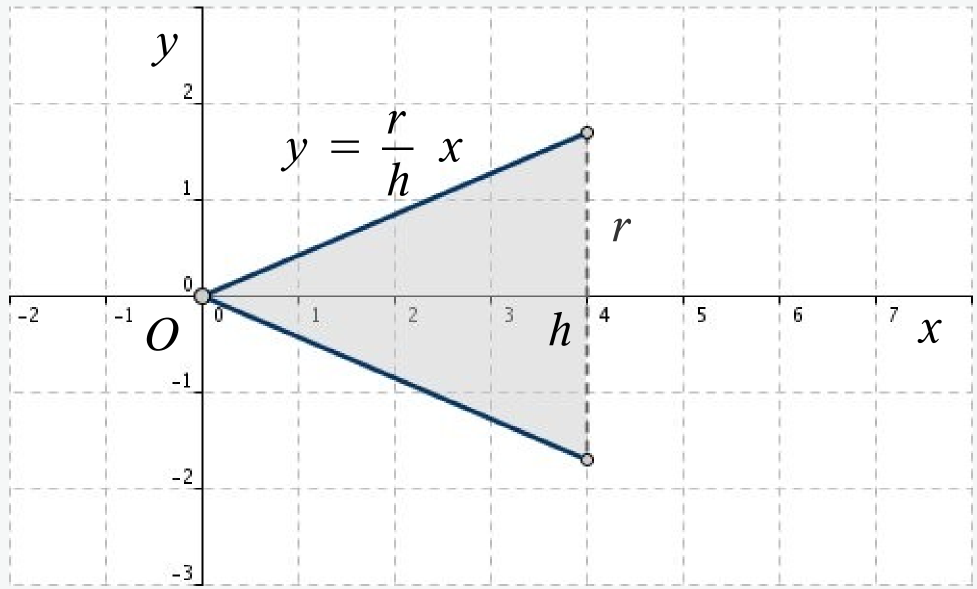


Abb. 13: Schnittfläche eines durch Rotation des Geradenstücks $y = r\,x/h$ $(0 \le x \le h)$ erzeugten Kegel mit der x,y-Ebene

$$J_x = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_0^h y^4\, dx = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h}\, x \right)^4 dx = \frac{\pi}{10}\,\rho\, r^4\, h = \frac{3}{10}\, m\, r^2$$

$$V_x = \frac{\pi\, r^2\, h}{3}, \qquad m = \rho\, V_x$$

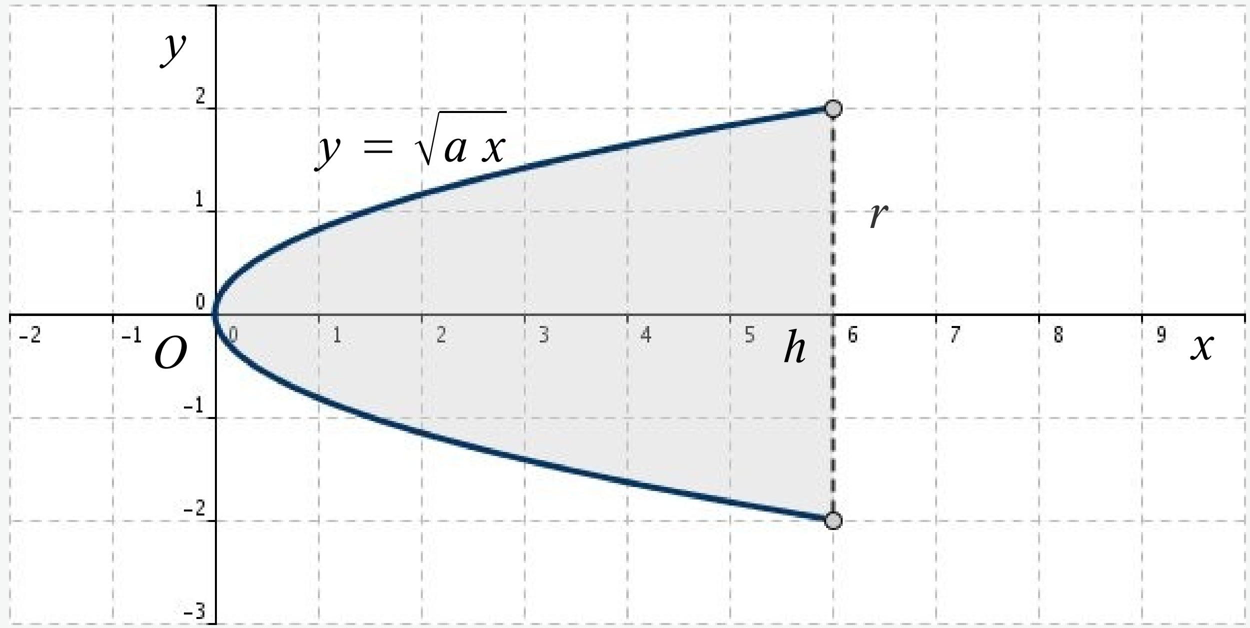


Abb. 14: Schnittfläche eines durch Rotation des Kurvenstücks y = (ax)½ (0 ≤ x ≤ h) um die x-Achse erzeugten Paraboloids

$$J_x = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho\cdot\int_0^h y^4\;dx = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho\int_0^h \left(\sqrt{a\,x}\,\right)^4 dx = \frac{\pi}{6}\,\rho\,a^2\,h^3 = \frac{m\,r^2}{3}$$

$$V_x = \frac{\pi}{2}\,a\,h^2, \qquad m = \rho\,V_x, \qquad a\,h = r^2$$

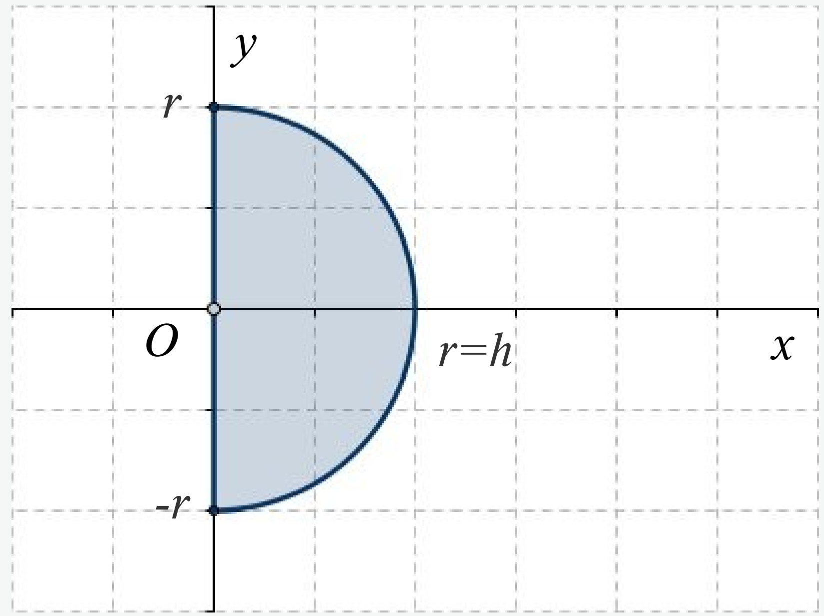


Abb. 15: Schnittfläche einer durch Rotation des Viertelkreises y = (r² – x²)½ (0 ≤ x ≤ r) um die x-Achse erzeugten Halbkugel

$$J_x = \frac{1}{2}\pi\rho \cdot \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^4 dx = \frac{2}{5} m r^2$$

$$V_{Halbkugel} = \frac{2}{3}\pi r^3, \quad m_{Halbkugel} = \rho V_{Halbkugel} = \frac{2}{3}\pi\rho r^3$$

Auch für die Vollkugel der Masse M gilt:

$$J_{x\,,\,Kugel} = \frac{2}{5} m r^2$$

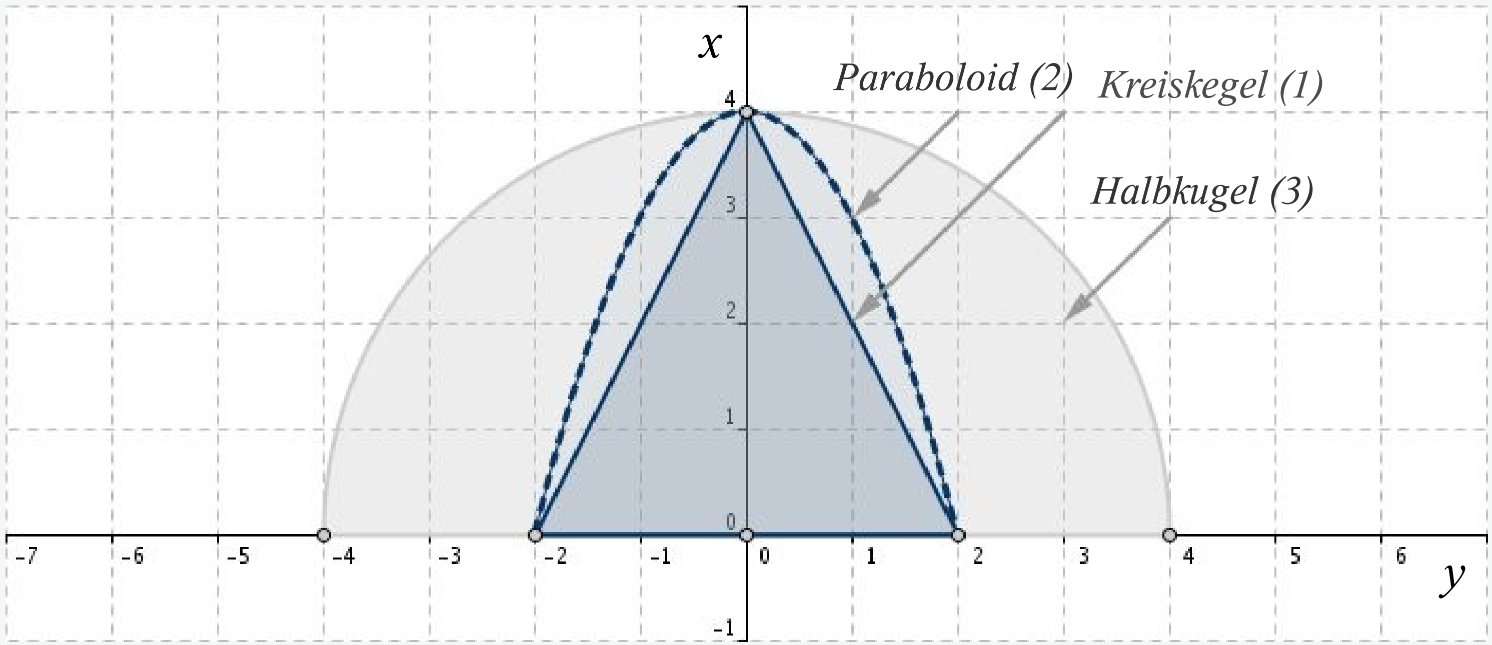


Abb. 16: Schnittflächen der x,y-Ebene mit den Rotationskörpern: Kegel (1), Paraboloid (2) und Halbkugel (3)

$$J_{x\,,\,Kegel} = \frac{3}{10}\, m\, r^2$$

$$J_{x\,,\,Paraboloid} = \frac{1}{3}\, m\, r^2$$

$$J_{x\,,\,Halbkugel} = \frac{2}{5}\, m\, r^2$$

Jakob Steiner
(1796-1863)

Die Berechnung des Trägheitsmoments kann in vielen Fällen durch einen Satz vereinfacht werden, der das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt mit dem Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen anderen, zur ersten parallelen Achse verknüpft.

Dieser Satz heißt im Deutschen, nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Steiner, der Satz von Steiner, in der englischsprachigen Literatur findet man ihn unter der Bezeichnung Parallel-Axis Theorem.

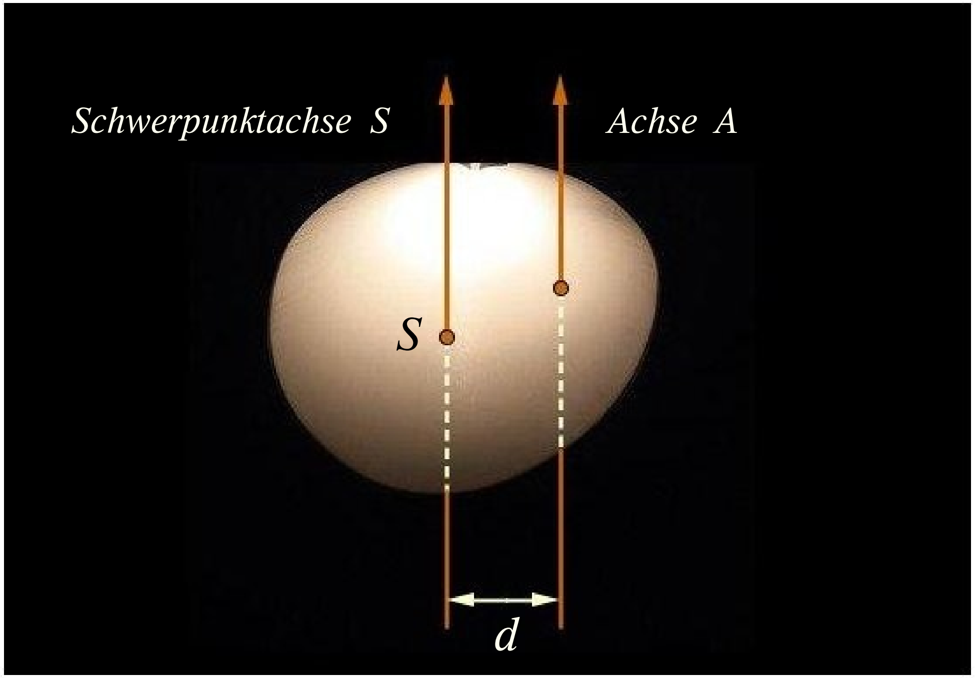


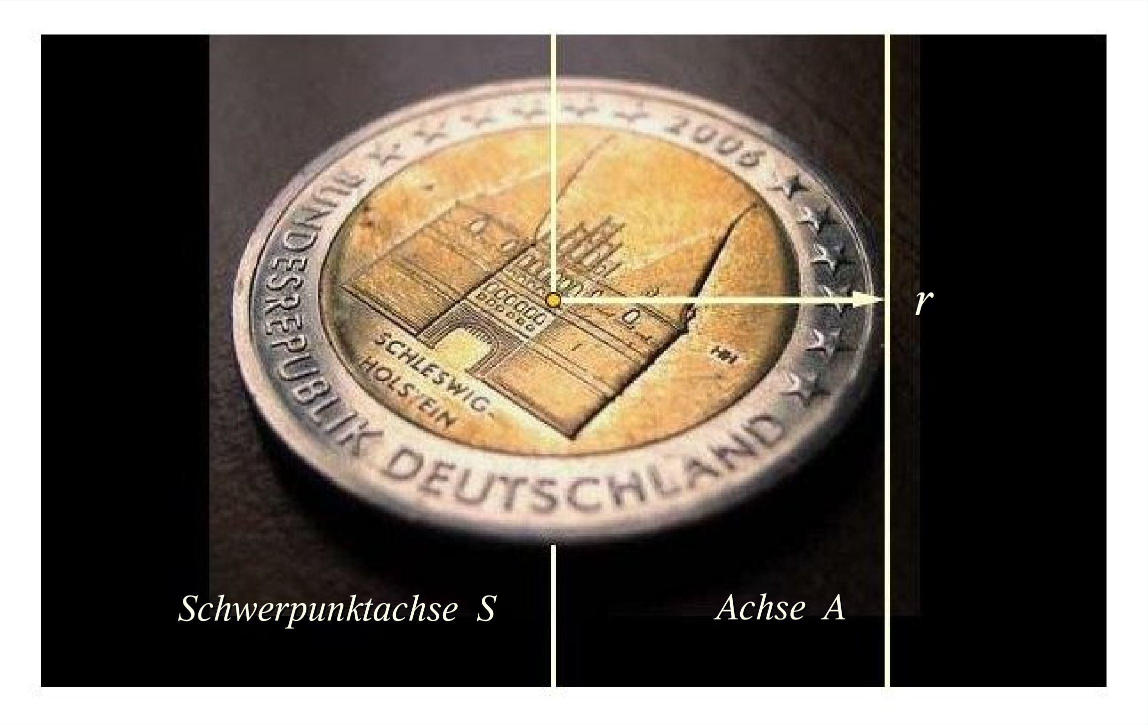
Abb. 17: Zum Satz von Steiner

Satz von Steiner für Massenträgheitsmomente: $J_A = J_S + m\,d^2$

J_S – Massenträgheitsmoment des Körpers, bezogen auf die Achse S

J_A – Massenträgheitsmoment des Körpers, bezogen auf die Achse A

m – Masse des Körpers, d – Abstand der beiden parallelen Achsen



http://perceptual.de/wp-content/2008/04/muenze2.jpg

Abb. 18: Zur Bestimmung des Massenträgheitsmoments einer Münze vom Radius R und der Masse m bezüglich der Achse A

Das Massenträgheitsmoment einer massiven kreisformigen Scheibe der Masse M mit Radius r, bezogen auf die Achse A, ist

$$J_A = J_S + m\,d^2 = \frac{1}{2}\,m\,r^2 + m\,r^2 = \frac{3}{2}\,m\,r^2, \qquad J_S = \frac{1}{2}\,m\,r^2, \qquad d = r$$

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\,\theta}{dt}$

Tangentialgeschwindigkeit $v = r\,\omega$

Kinetische Energie einer Drehbewegung $E_{rot} = \frac{1}{2}\,J\,\omega^2$

Trägheitsmoment eines Systems von n Massenpunkten $J = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2$

Trägheitsmoment eines starren Körpers $J = \int r^2\, dm$