http://www.youtube.com/watch?v=NaocMb7JSXE&feature=PlayList&p=D30D6966531D5DAF&playnext=1&playnext_from=PL&index=8

Massenträgheitsmomente homogener Körper

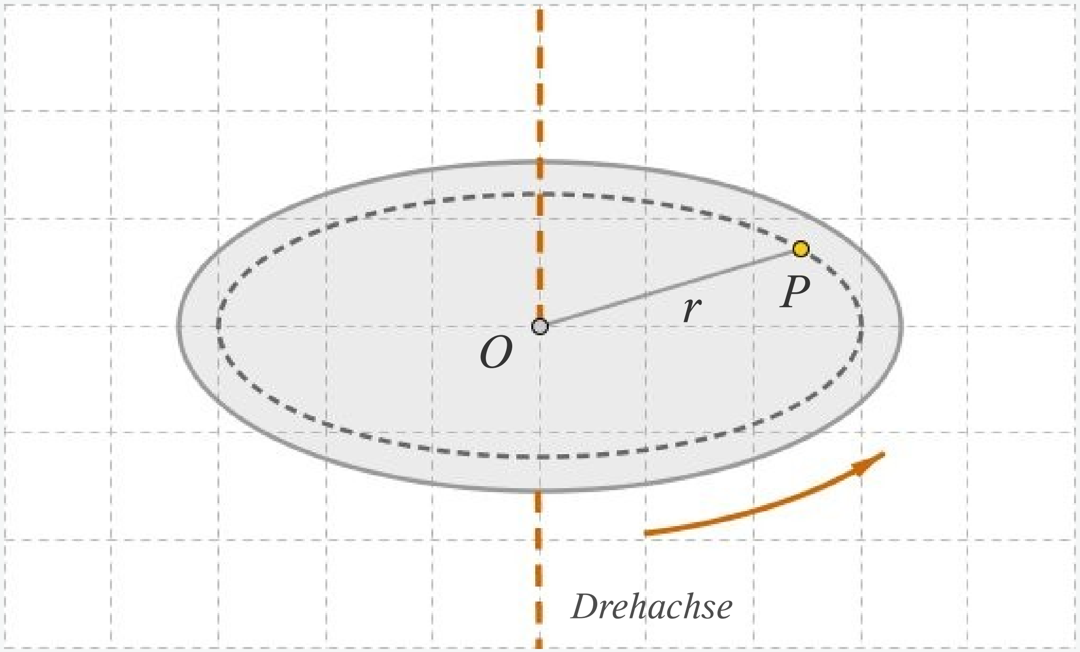

Abb. 1-1: Eine Scheibe rotiert um eine senkrecht zu ihr stehende feste Achse durch ihren Mittelpunkt im Punkt O

Unter einer reinen Drehbewegung verstehen wir, dass sich alle Punkte in dem Körper auf Kreisbahnen bewegen, wie der Punkt P auf der rotierenden Scheibe, und dass die Mittelpunkte dieser Kreisbahnen alle auf einer Linie, der so genannten Drehachse, liegen.

Abb. 3: Zur Darstellung des Unterschiedes zwischen dem Abstand zur Drehachse und dem Abstand zum Koordinatenursprung

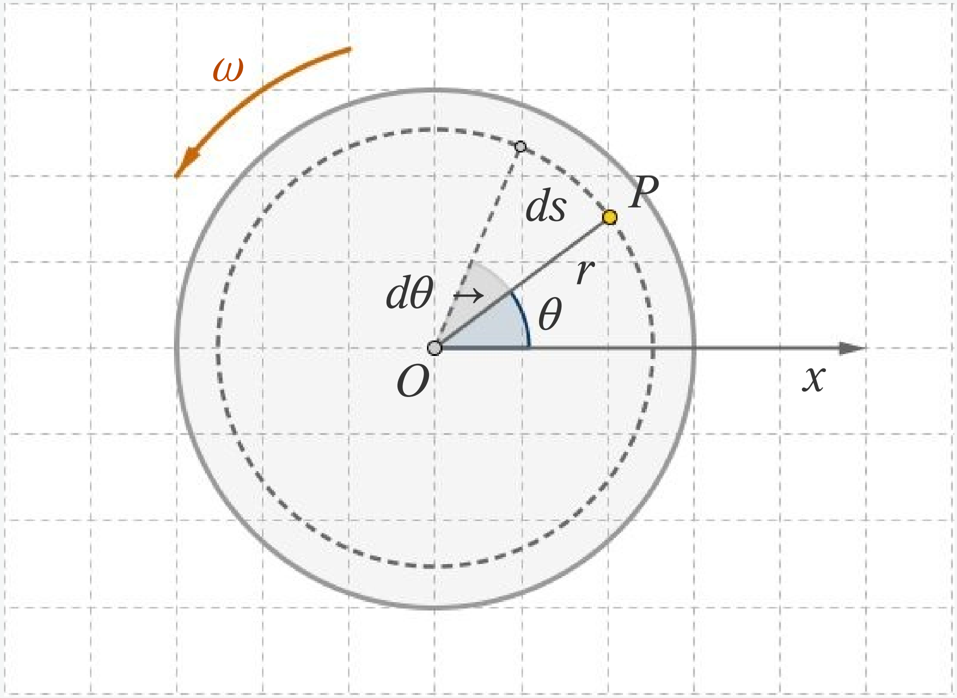

Abb. 4: Eine Scheibe rotiert um eine Achse durch ihren Mittelpunkt. Ein Punkt P legt in der Zeit dt die Strecke ds zurück, die von seinem Abstand r von der Drehachse abhängt.

Wenn sich die Scheibe dreht, bewegt sich der Punkt auf einem Kreisbogen der Länge $ds = r\,d\theta$ $([\theta] = rad)$.

Die Geschwindigkeit, mit der sich der Winkel ändert, ist für alle Punkte der Scheibe gleich

$$\omega = \frac{d\,\theta}{dt}, \qquad [\omega] = \frac{rad}{s}$$

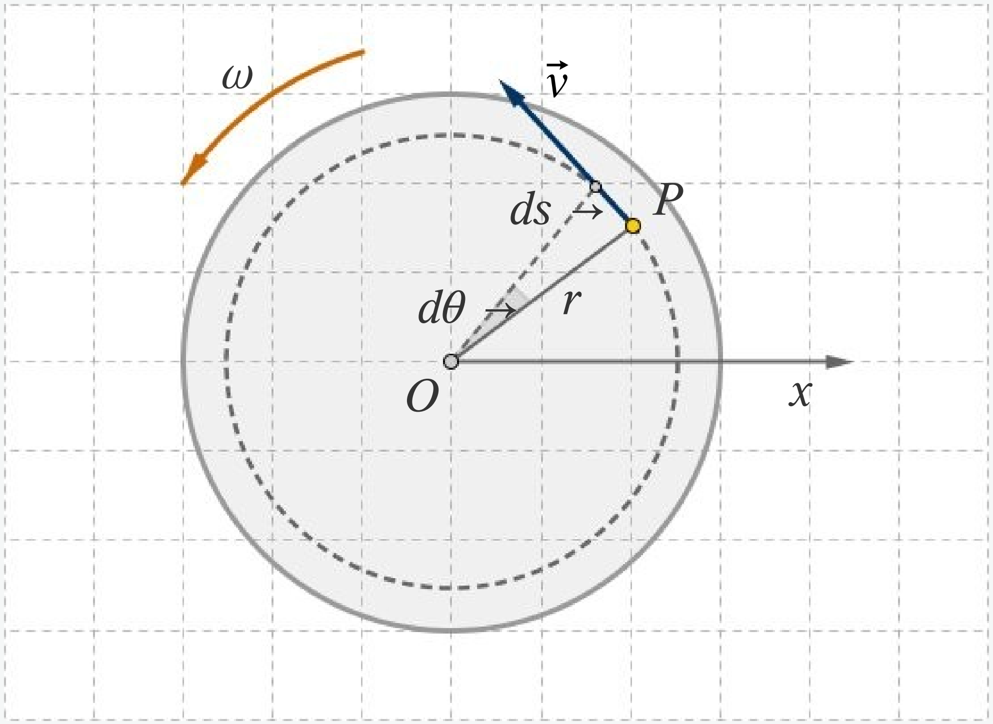

Abb. 5-1: Ein Massenpunkt P auf einer rotierenden Scheibe hat zu jedem Zeitpunkt eine lineare Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$

Wenn sich der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, hat jeder Massenpunkt eine lineare Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, deren Richtung tangential zu seiner Kreisbahn ist. Der Betrag der linearen Geschwindigkeit ist

$$v = \frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\,\theta}{dt} = r\,\omega$$

Linear- und Winkelgeschwindigkeit stehen in Beziehung zueinander!

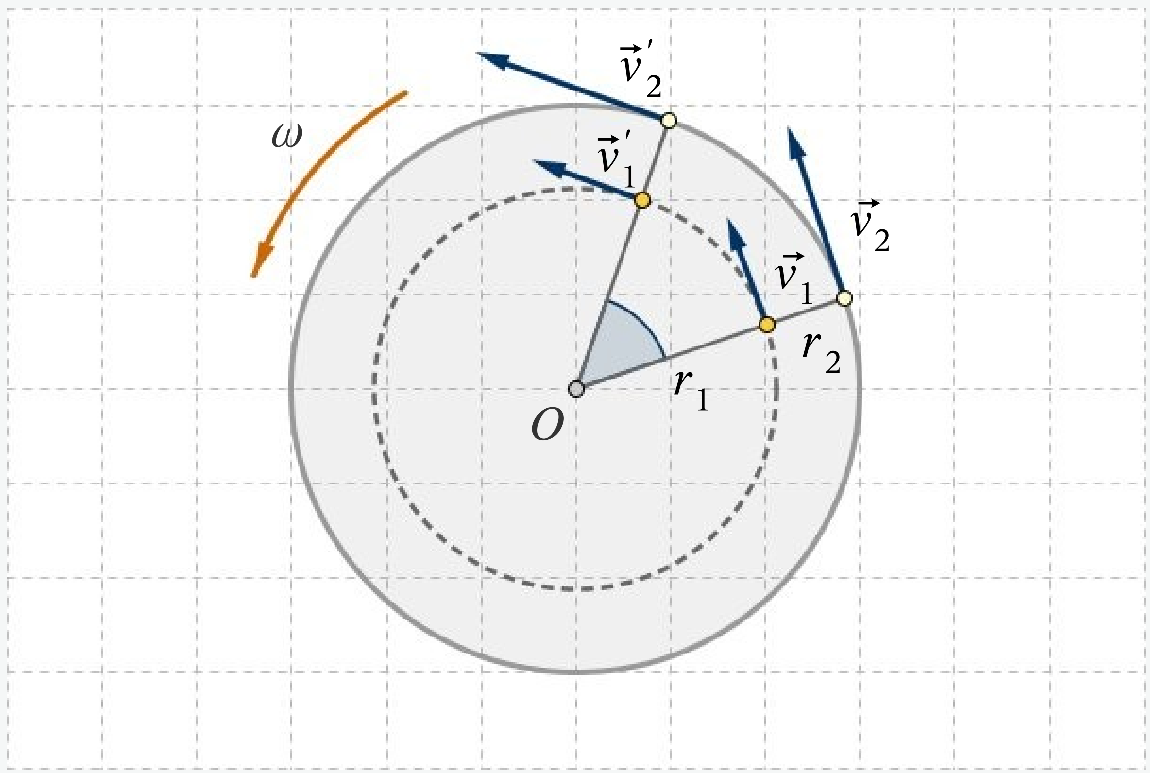

Abb. 5-2: Eine Scheibe dreht sich gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn. Zwei Punkte auf der Scheibe befinden sich in unterschiedlichen Abständen vom Mittelpunkt

Obwohl ω für jeden Punkt in einem rotierenden Körper zu jedem Zeitpunkt gleicht ist, ist die lineare Geschwindigkeit v für weiter von der Drehachse entfernt liegende Punkte größer

$$v = r\,\omega : \qquad r_2 > r_1 , \quad v_2 > v_1$$

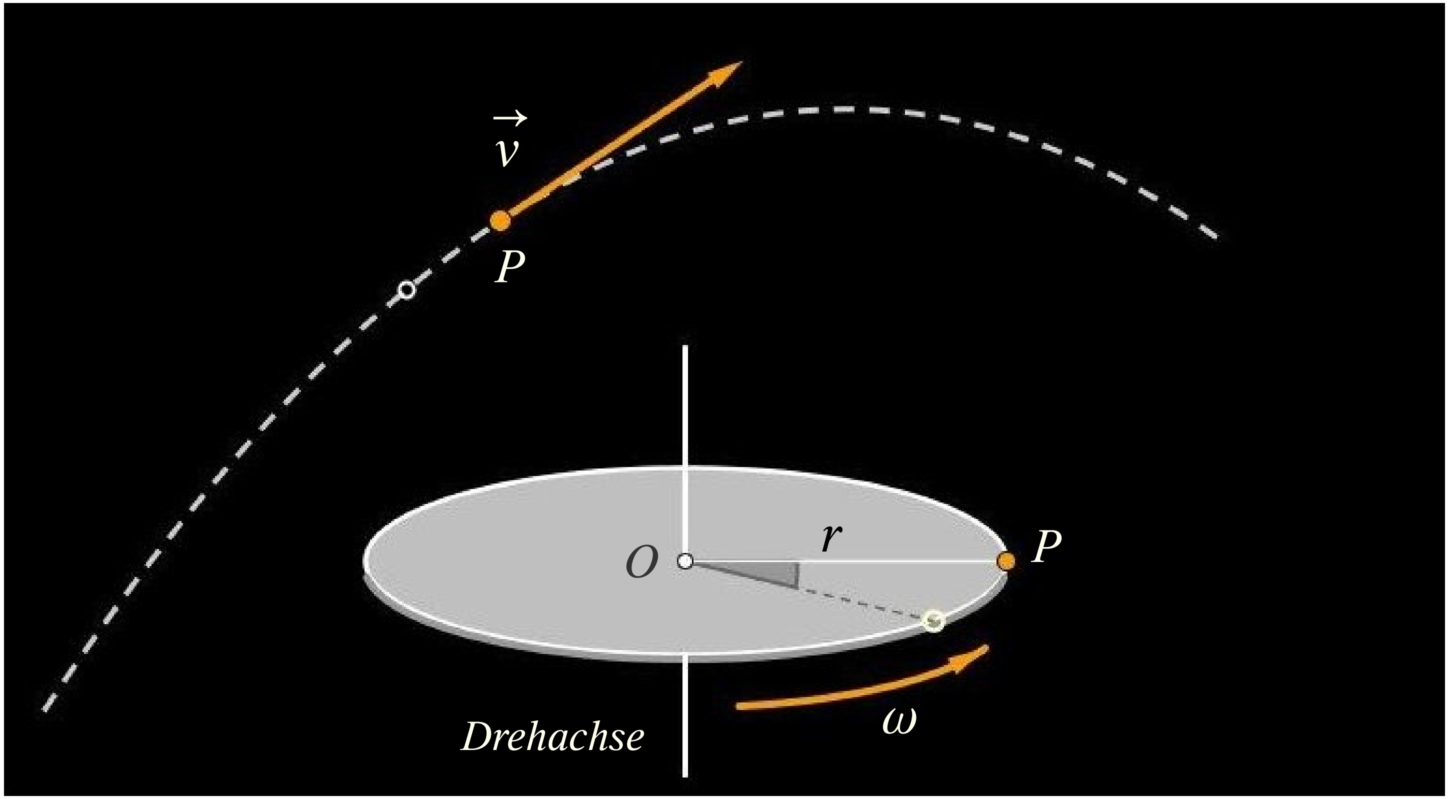

Abb. 6: Zur Translations- und Drehbewegung eines Massenpunktes P

Kinetische Energie eines Massenpunktes i : $E_{trans} = \dfrac{m_i \, v_i^2}{2}$

Kinetische Energie des Körpers: $E_{trans} = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, v_i^2 = \dfrac{v^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i = \dfrac{m \, v^2}{2}$

Die kinetische Energie der Rotationsbewegung

Solange sich jeder Massenpunkt eines Körpers mit der gleichen Geschwindigkeit wie die anderen Massenpunkte bewegt, ist die kinetische Energie einfach zu bestimmen. Im Fall einer Rotationsbewegung sind die Bewegungen der einzelnen Massenpunkte zwar noch ähnlich – sie bewegen sich alle auf Kreisbahnen um die Drehachse –, aber ihre Bahngeschwindigkeiten sind verschieden. Trotzdem ist es möglich, die Energiebeiträge der einzelnen Massenpunkte zu einem übersichtlichen Ausdruck zusammenzufassen.

Die kinetische Energie der Rotationsbewegung

Die kinetische Energie (Rotationsenergie) eines starren Körpers, der um eine feste Achse rotiert, ist die Summe der kinetischen Energien aller Massenpunkte, die zusammen den Körper bilden

$$E_{rot\,,\,i} = \frac{m_i\, v_i^2}{2}\,, \qquad v_i = r_i\, \omega$$

$$E_{rot} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{m_i\, v_i^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2}\, J\, \omega^2$$

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2\,, \qquad [J] = kg \cdot \mathrm{m}^2$$

Das Massenträgheitsmoment oder Trägheitsmoment J hängt von der Massenverteilung des Körpers bezüglich der Drehachse ab.

Das Massenträgheitsmoment

$$E_{trans} = \frac{m\ v^2}{2}, \qquad E_{rot} = \frac{1}{2} J\,\omega^2$$

Im Unterschied zur Translationsbewegung kann man bei einer Drehbewegung die Masse eines Körpers nicht als in seinem Schwerpunkt konzentriert betrachten.

Das Trägheitsmoment J bezüglich einer Achse ist ein Maß für den Widerstand, den ein Körper einer Änderung seiner Drehbewegung um diese Achse entgegensetzt. Es beschreibt für eine Rotationsbewegung eine Eigenschaft von Körpern, die der trägen Masse bei Translationsbewegungen entspricht.

Im Fall eines homogenen Körpers mit der konstanten Dichte ρ wird das Trägheitsmoment bestimmt durch ein Integral

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i\ r_i^2 \quad \rightarrow \quad J = \int_{(V)} r^2\ dm = \rho \int_{(V)} r^2\ dV$$

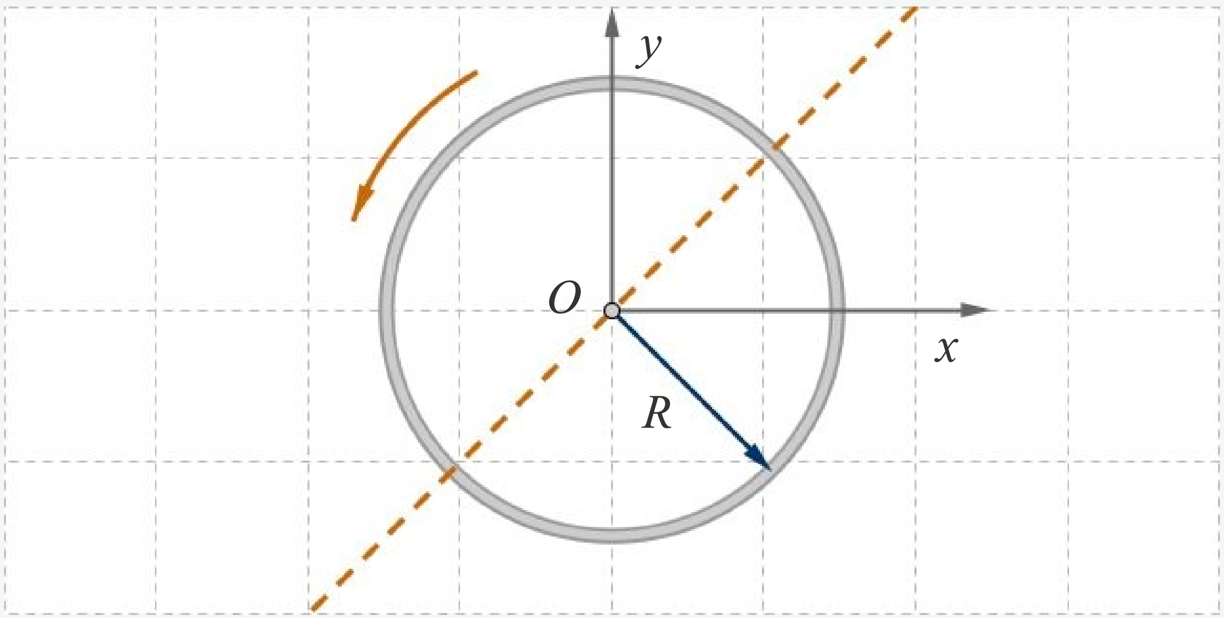

Abb. 7: Ein Ring rotiert um eine feste Achse, die senkrecht zu seiner Ebene steht und durch den Mittelpunkt verläuft

Die Masse des Ringes ist im Abstand $r = R$ von der Drehachse konzentriert. Das Trägheitsmoment ist dann

$$J = \int_{(m)} r^2 \, dm = R^2 \int_{(m)} dm = R^2 m$$

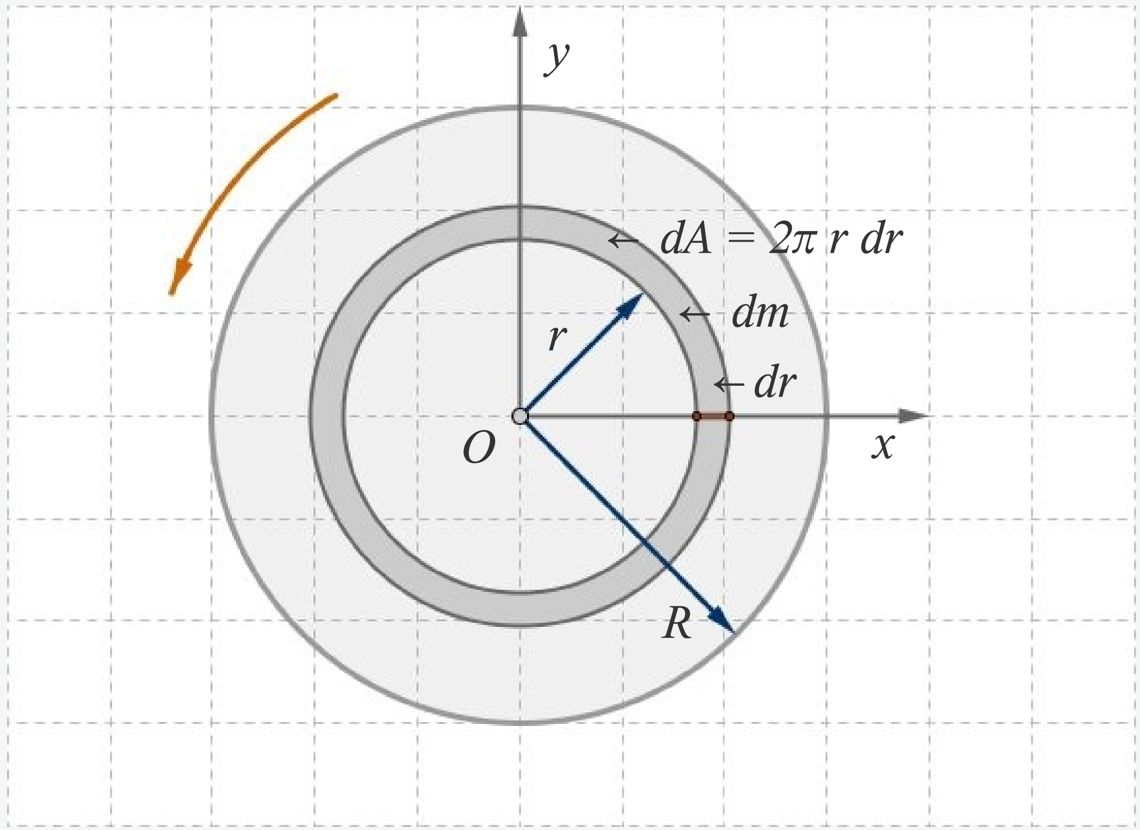

Abb. 8: Zur Berechnung des Trägheitsmoments einer Scheibe mit dem Radius R und konstanter Dichte ρ, die sich um eine senkrecht stehende Achse dreht.

$$dJ = r^2\, dm\,, \quad dm = 2\,\pi\, r\, \rho\, h\, dr\,, \quad J = \int_{(m)} r^2\, dm = \frac{1}{2}\,\pi\,\rho\, h\, R^4 = \frac{1}{2}\, m\, R^2$$

J ist gerade halb so groß wie beim Ring.

m – die Scheibenmasse, h – die Höhe der Scheibe, R – der Radius

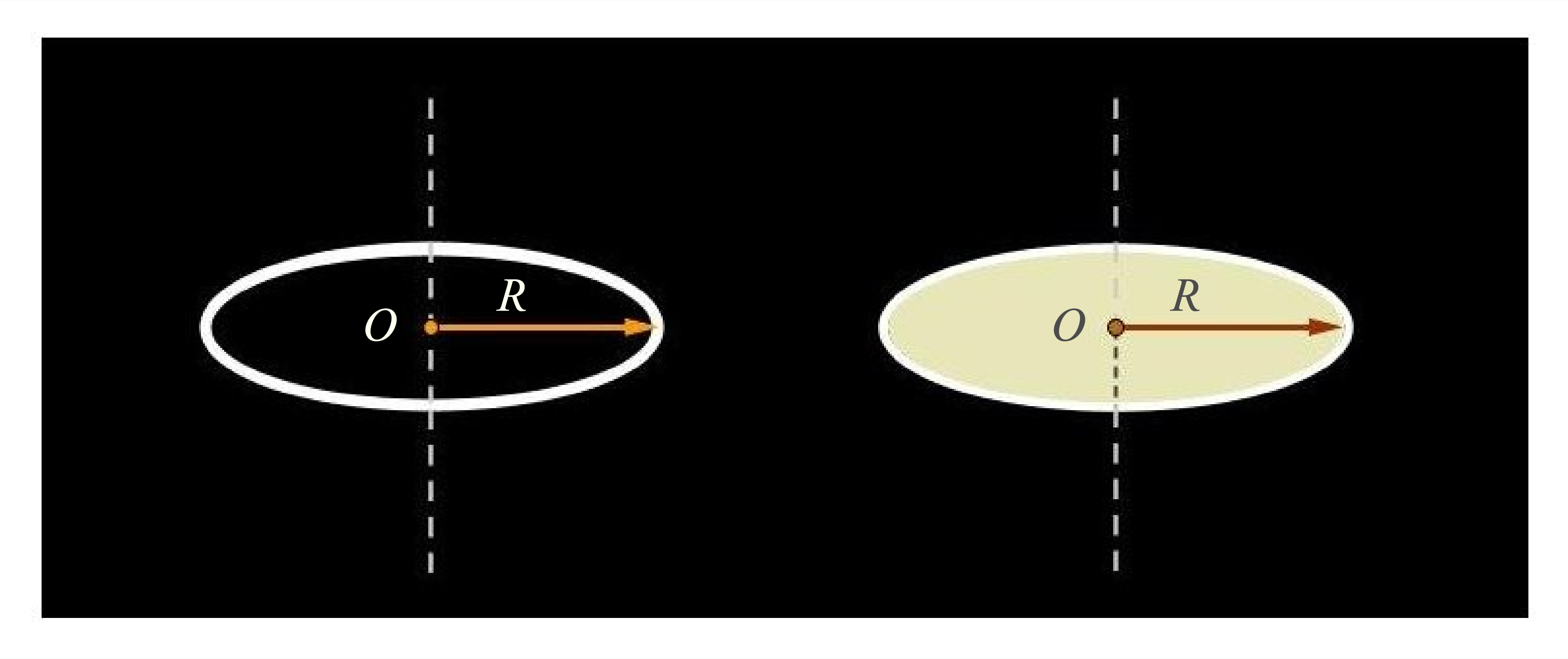

Abb. 9: Ring und Scheibe

$$J_{Ring} = m\,R^2 \qquad J_{Scheibe} = \frac{1}{2}\,m\,R^2$$