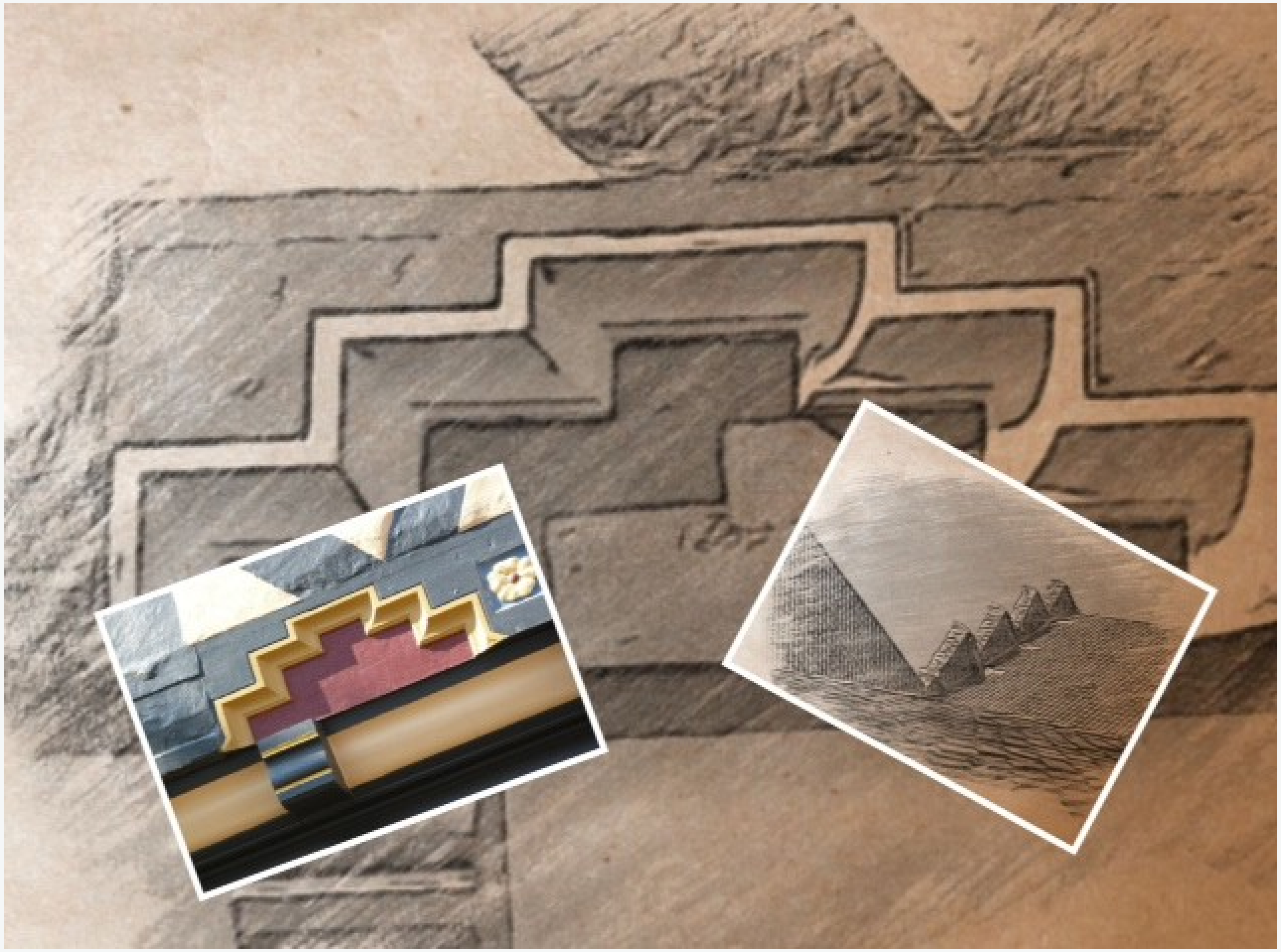


Integrierbare Funktionen

Bisher haben wir nie die Frage gestellt, ob die betrachteten Funktionen integrierbar sind.

Die Frage nach der Existenz des bestimmten Integrals kann man mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen bestimmter Integration und Flächeninhalt veranschaulichen. Voraussetzung für die Integrierbarkeit ist die Beschränktheit der Funktion $f(x)$ im Integrationsintervall $[a, b]$, d.h. $f(x)$ darf keine Polstelle besitzen. An einer Polstelle schließt die Funktion keine Fläche ein, sodass dann nicht mehr von einem bestimmten Integral gesprochen werden kann. Ist $f(x)$ darüber hinaus in $[a, b]$ stetig, so existiert das bestimmte Integral. Für die Integrierbarkeit genügt auch die stückweise Stetigkeit, d.h. die Stetigkeit darf in endlich vielen Punkten zwischen a und b verletzt sein. In den Unstetigkeitsstellen stellt man sich die Fläche durch eine vertikale Linie begrenzt vor, sodass der eingeschlossene Flächeninhalt endlich ist.

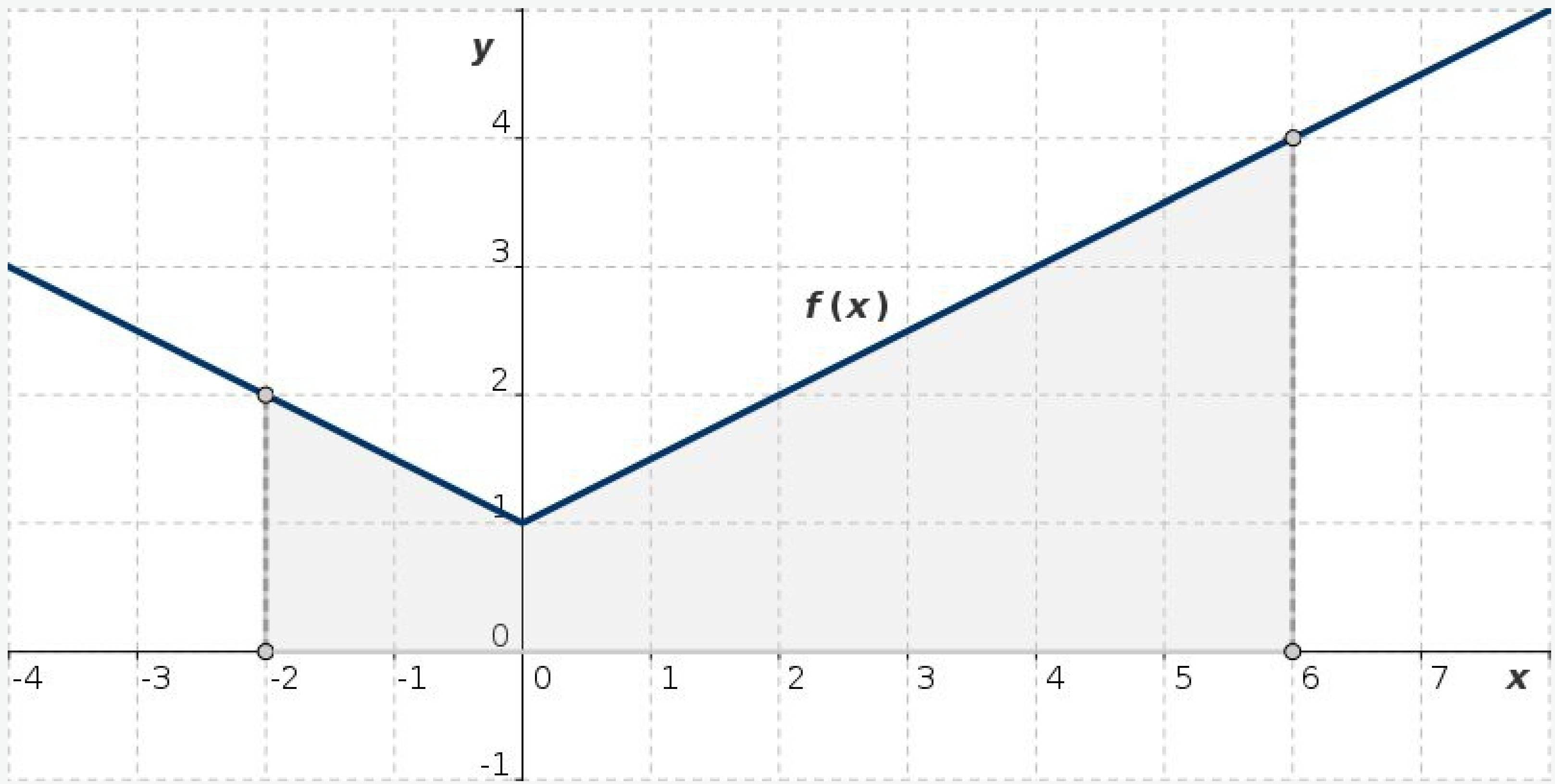


Abb. 1-1: Fläche zwischen der Funktion $f(x) = | x |/2 + 1$ und der x-Achse im Intervall [-2, 6]

Die Funktion $y = f(x)$ ist im Intervall [-2, 6] integrierbar, da sie in diesem Bereich beschränkt und stetig ist. Sie ist zwar im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar, doch hat dies keinen Einfluss auf die Integrierbarkeit.

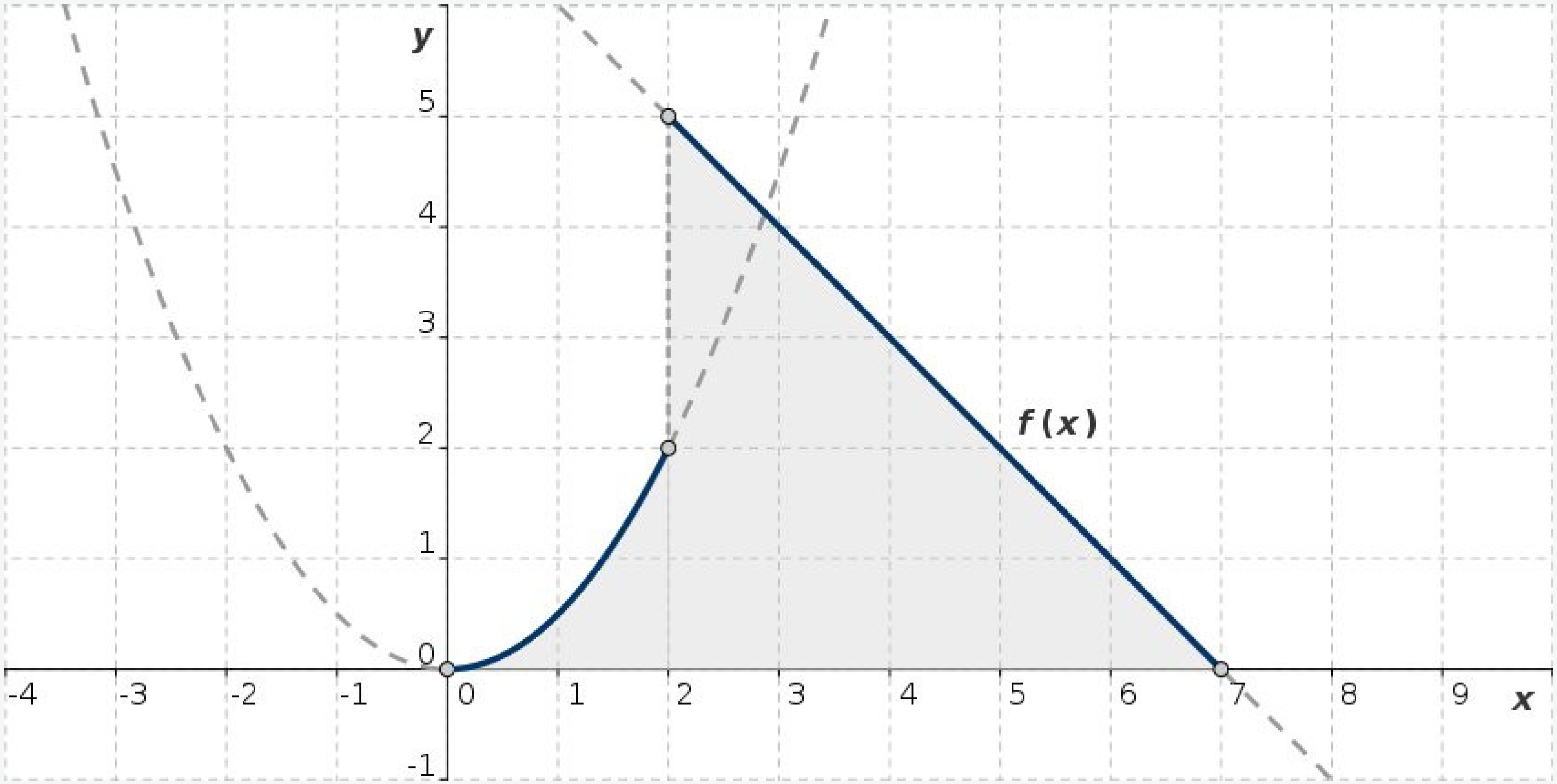


Abb. 1-2: Fläche zwischen der Funktion f (x) und der x-Achse im Intervall [0, 7]

$$f(x) = \begin{cases} 0.5\,x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 7 - x, & 2 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$$

Die Funktion $f(x)$ ist im Intervall [0, 7] integrierbar. Sie ist im Integrationsgebiet beschränkt und stückweise stetig. Bei $x = 2$ ist eine Unstetigkeitsstelle. Das Integral beschreibt den Flächenhalt unterhalb des Graphen (*Abb.* 1-2).

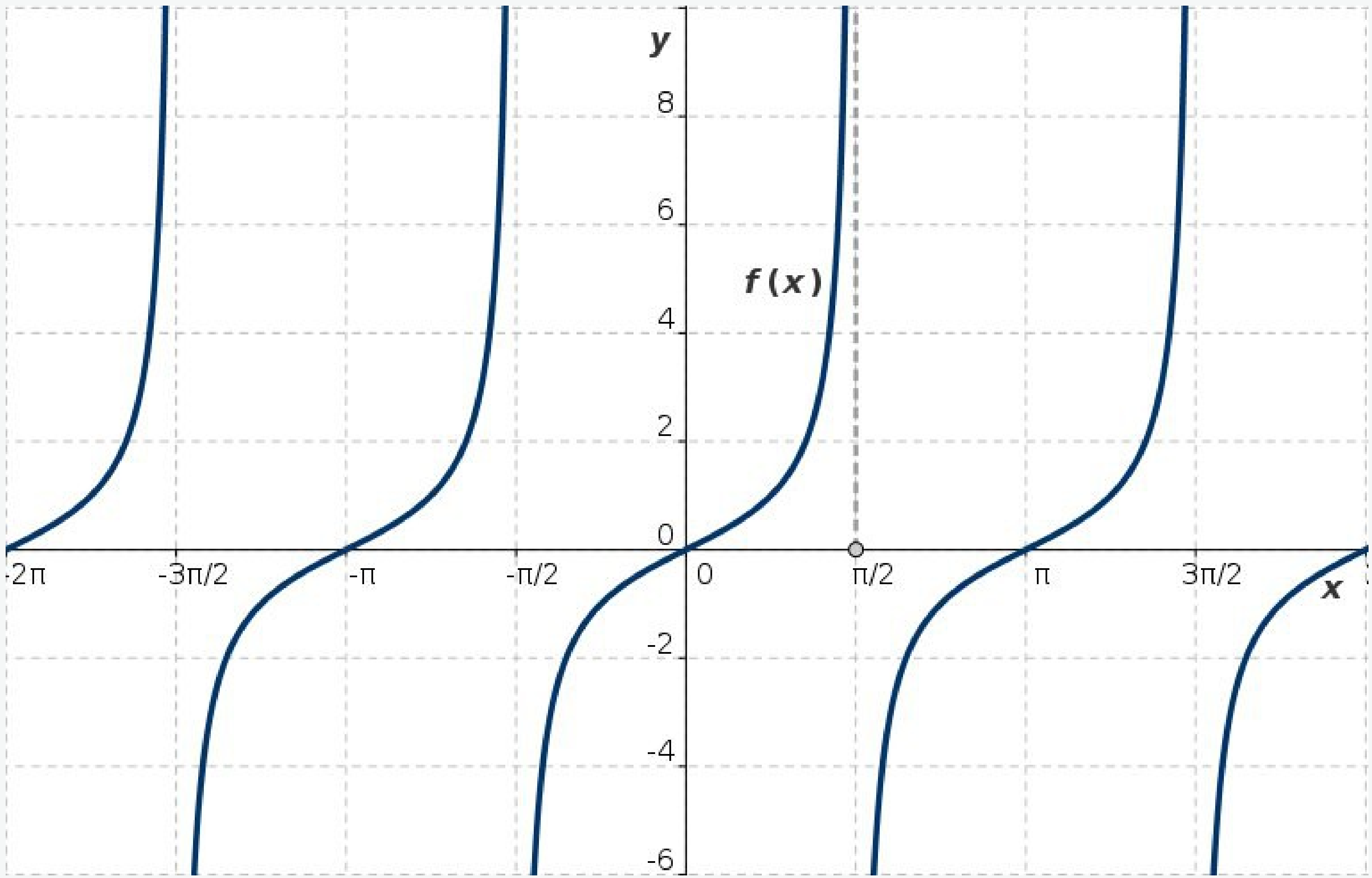
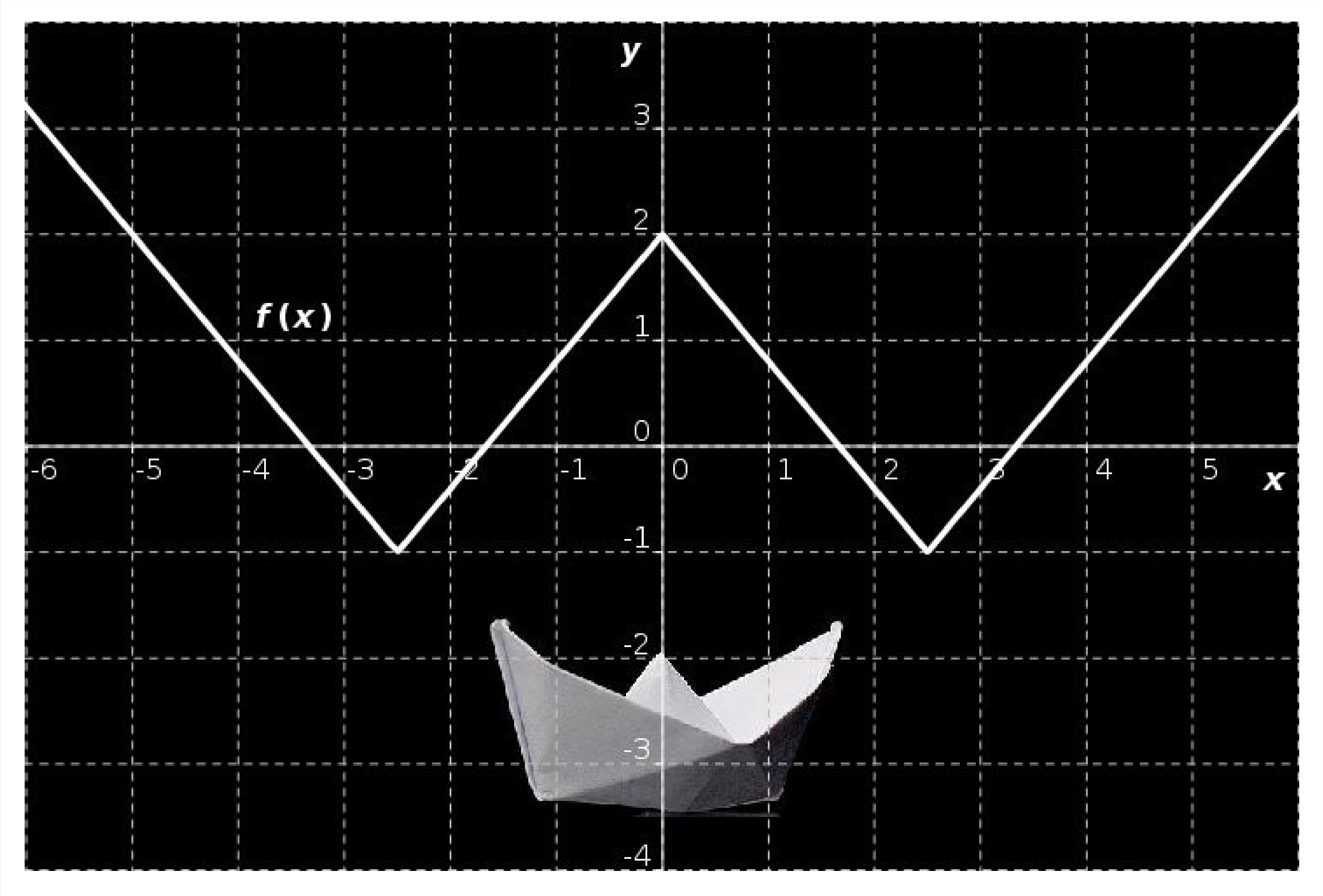


Abb. 1-3: Die Funktion $f(x) = \tan x$

Die Funktion $y = \tan x$ ist im Intervall $[0, \pi/2]$ nicht integrierbar, denn sie hat bei $x = \pi/2$ eine Polstelle und ist dort nicht beschränkt.

Wenn Mathematiker darüber sprechen, ob eine Funktion integrierbar ist, sprechen sie nicht über die Schwierigkeit, ein Integral über diese Funktion zu berechnen. Wenn sie sagen, eine Funktion ist integrierbar, meinen sie nur, dass das Integral wohldefiniert ist – das heißt, dass es mathematisch sinnvoll ist.



http://view.stern.de/de/picture/1628617/Schwarzweissfoto-Schiff-Boot-Weiss-Still-Papier-%B0-510x510.jpg

Aufgabe 1: Bestimmen Sie, welche der folgenden Funktionen integrierbar sind

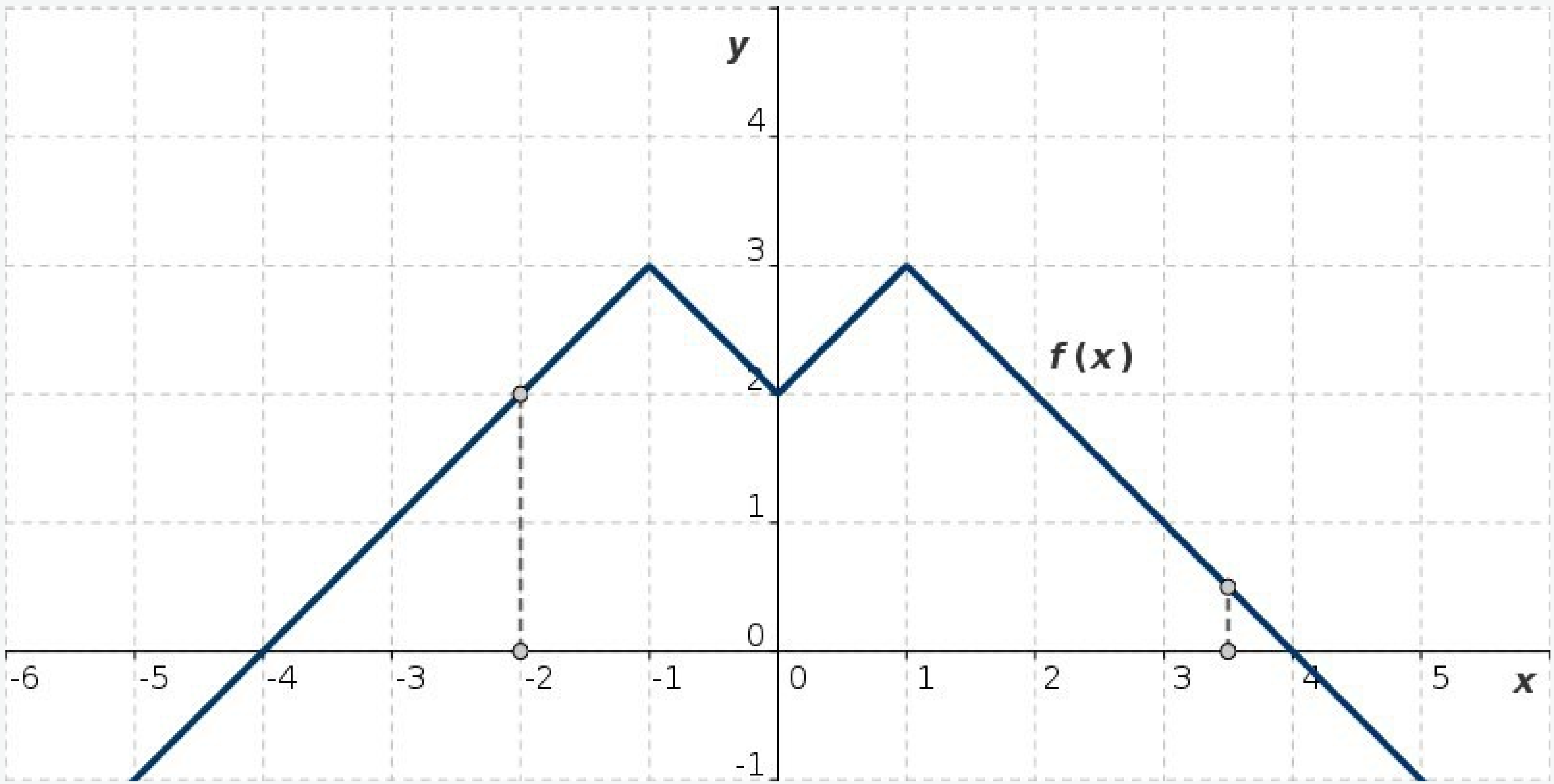


Abb. 2-1a: Die Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = -||x| - 1| + 3, \qquad I = [-2,\ 3.5]$$

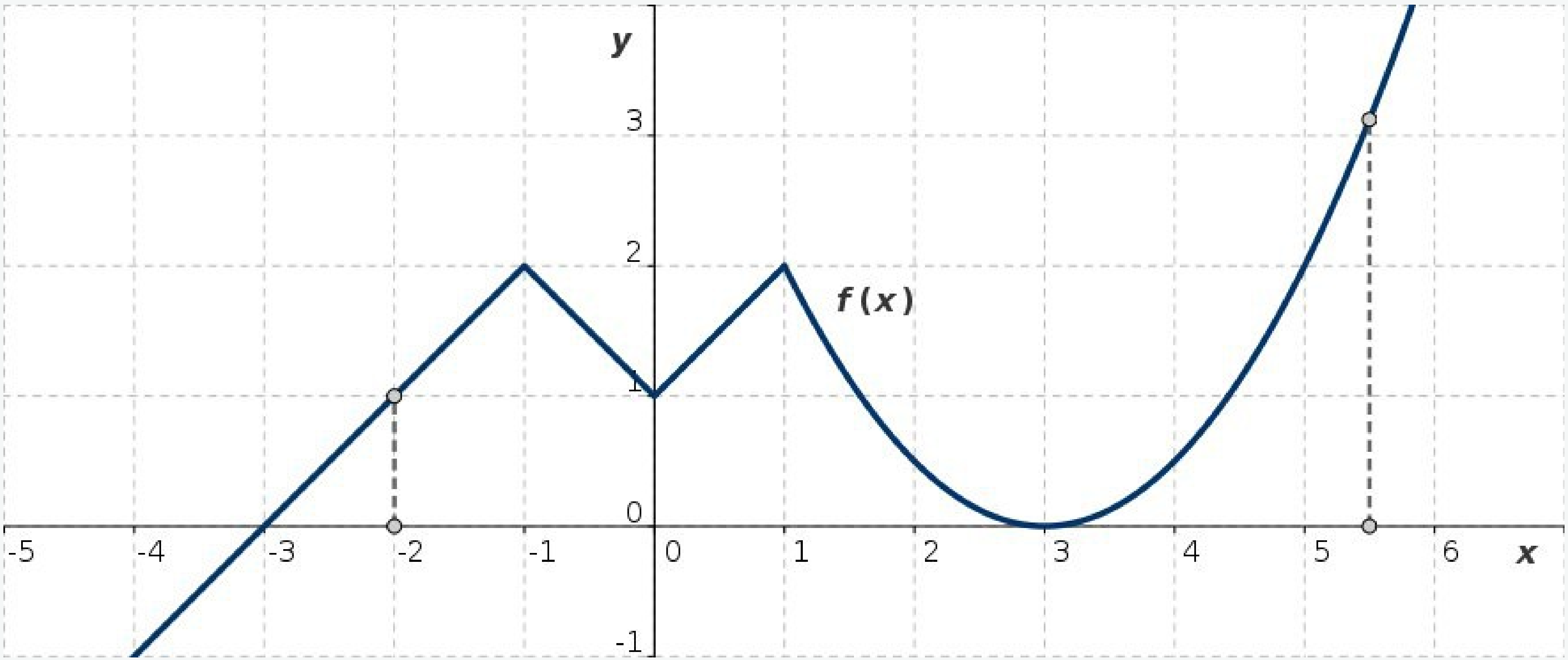


Abb. 2-2a: Die zusammengesetzte Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -\big|\,|x| - 1\,\big| + 2, & [-2,\ 1] \\ \dfrac{1}{2}(x-3)^2, & [1,\ 5.5] \end{cases}$$

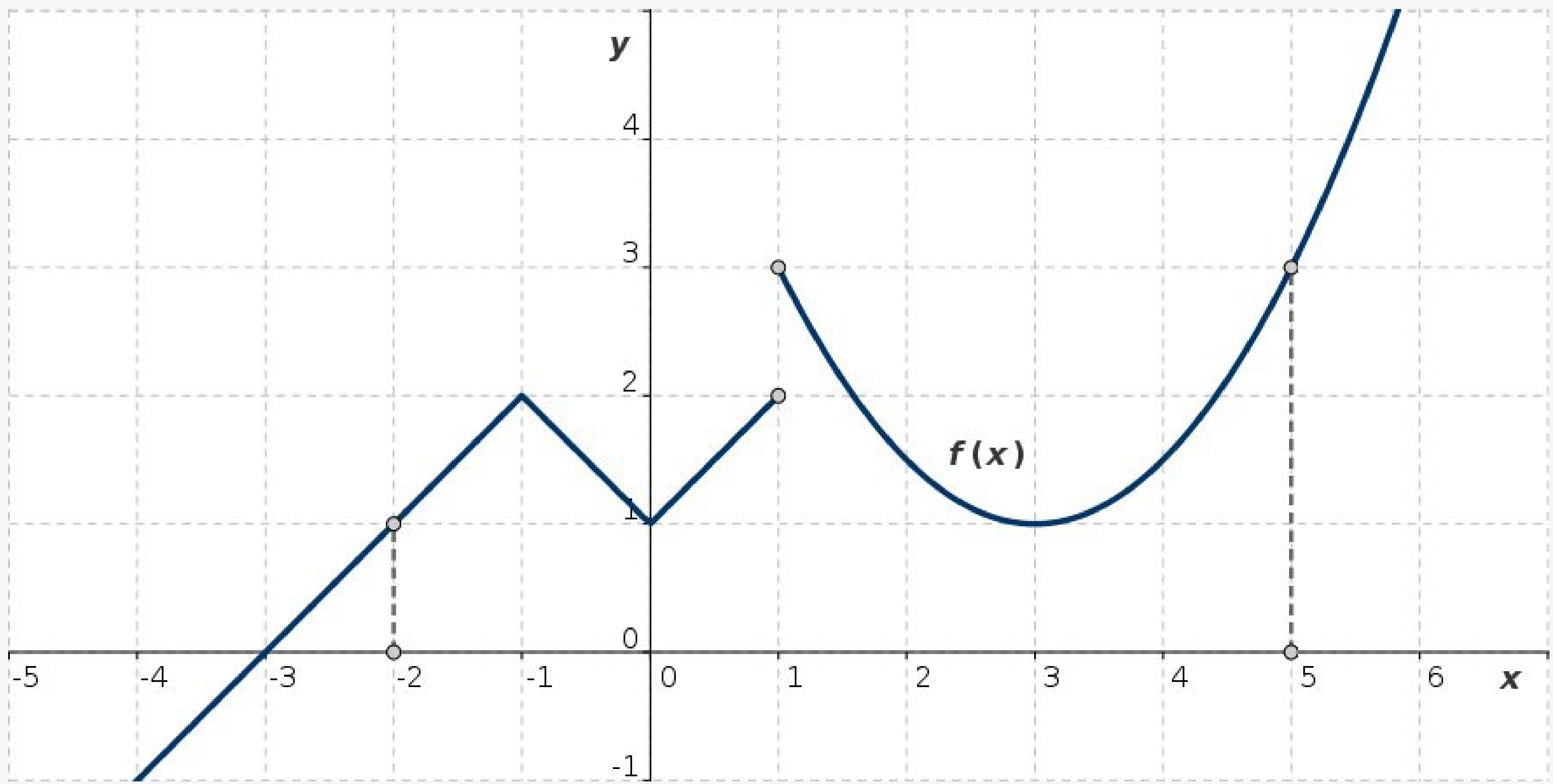


Abb. 2-3a: Die zusammengesetzte Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -\big|\,|x| - 1\,\big| + 2, & [-2,\ 1] \\ \dfrac{1}{2}(x-3)^2 + 1, & [1,\ 5] \end{cases}$$

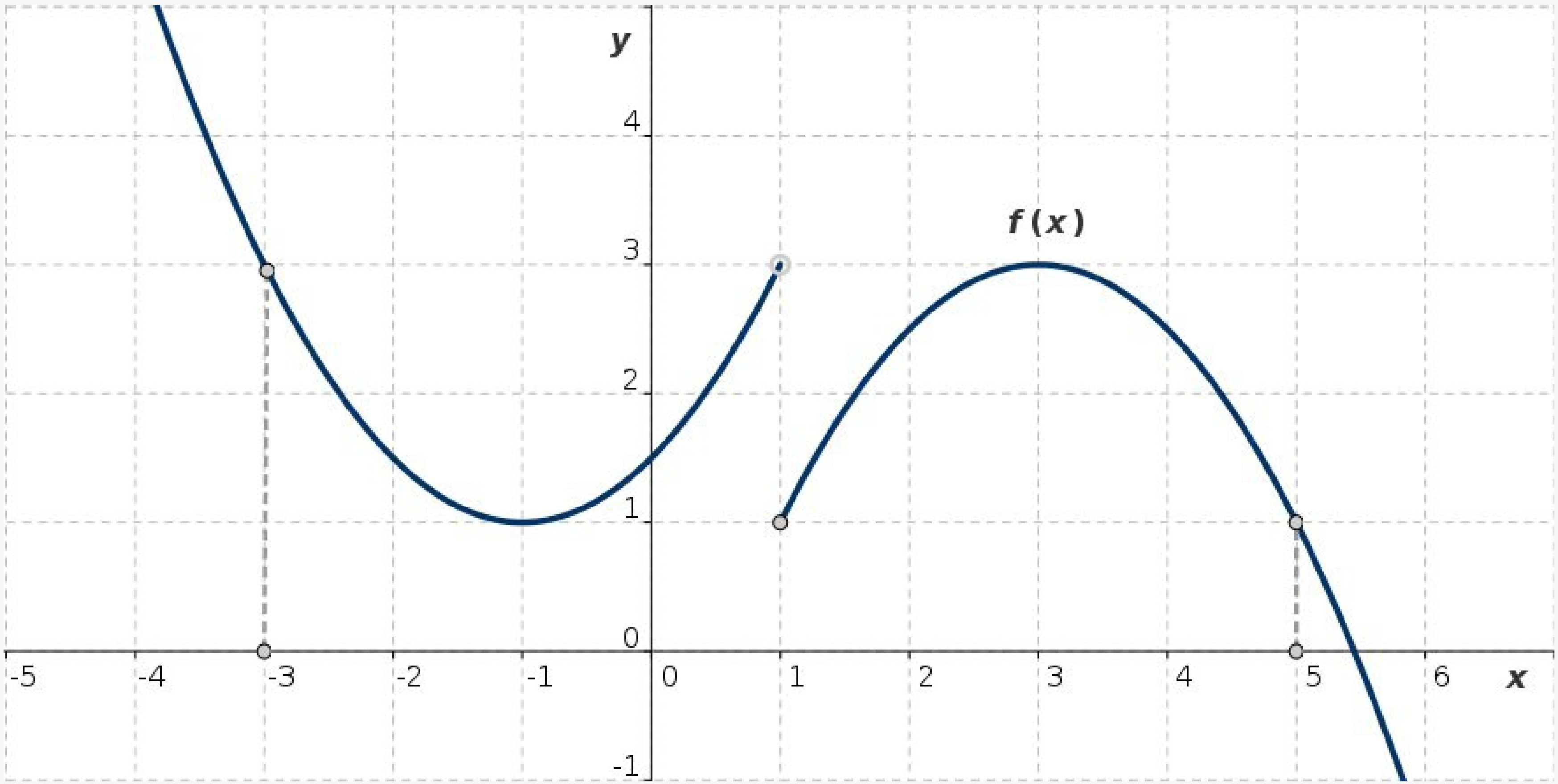


Abb. 2-4a: Die zusammengesetzte Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+1)^2 + 1, & [-3,\ 1] \\ -\dfrac{1}{2}(x-3)^2 + 3, & [1,\ 5] \end{cases}$$

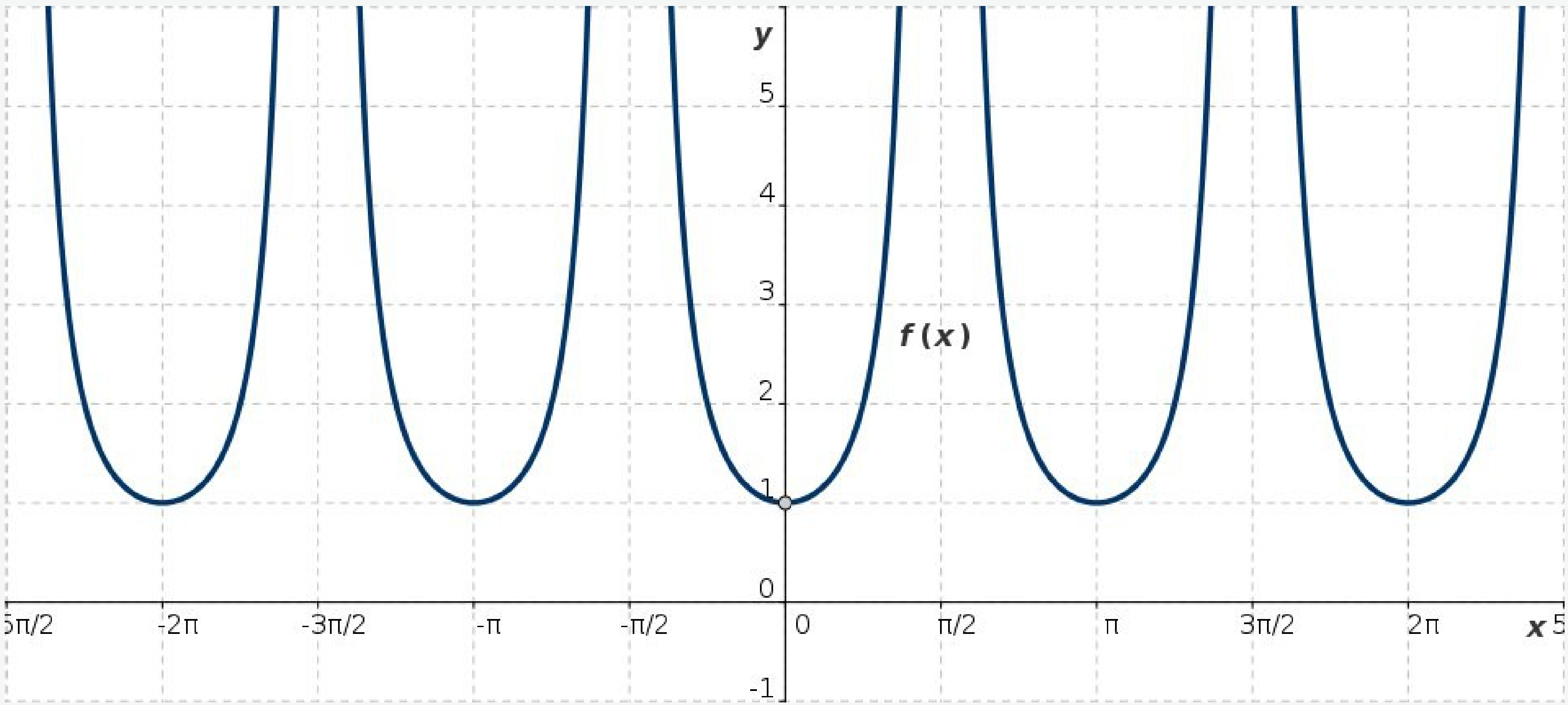


Abb. 2-5a: Die Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}, \qquad [-3\pi, \ 3\pi]$$

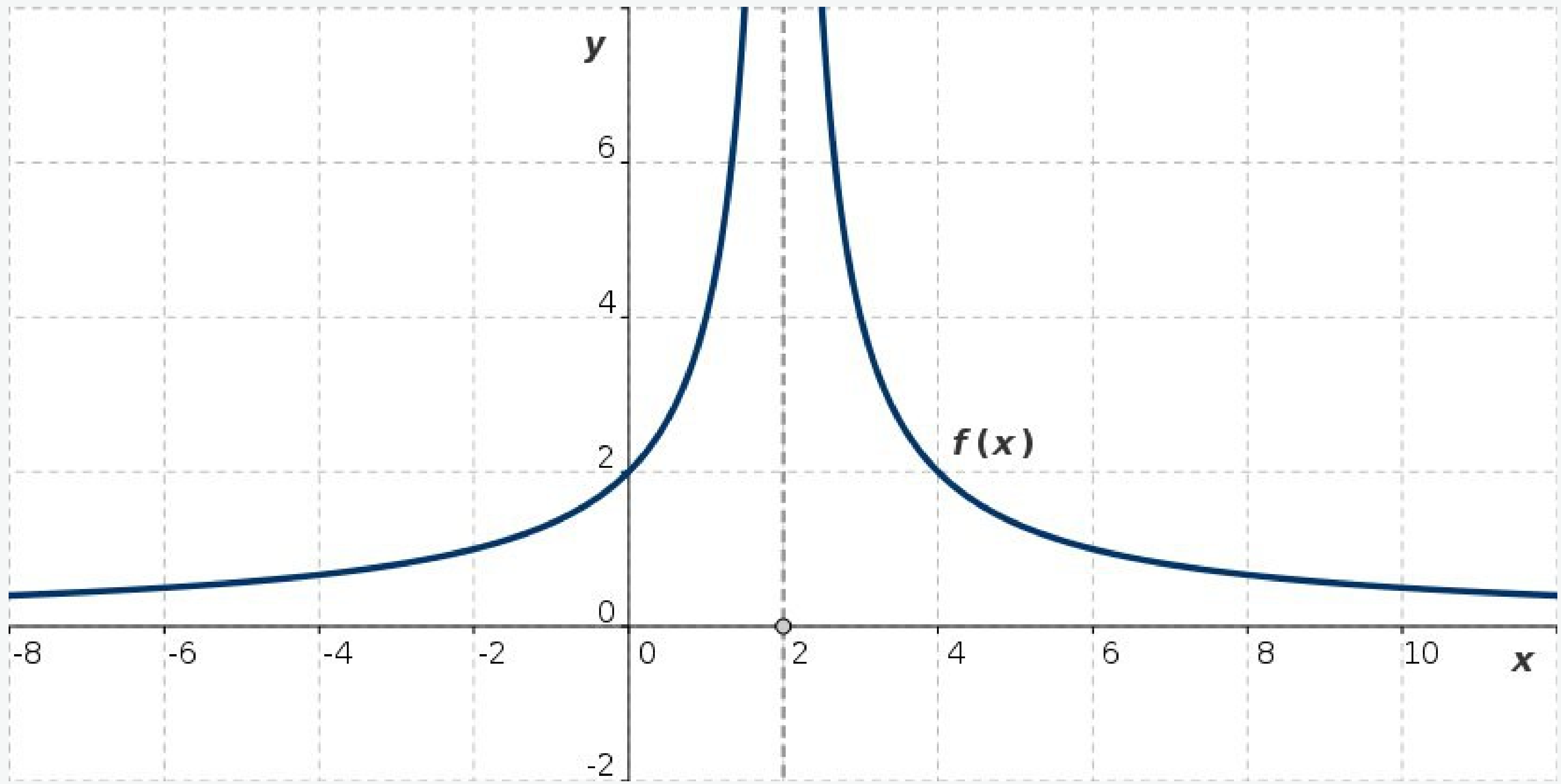
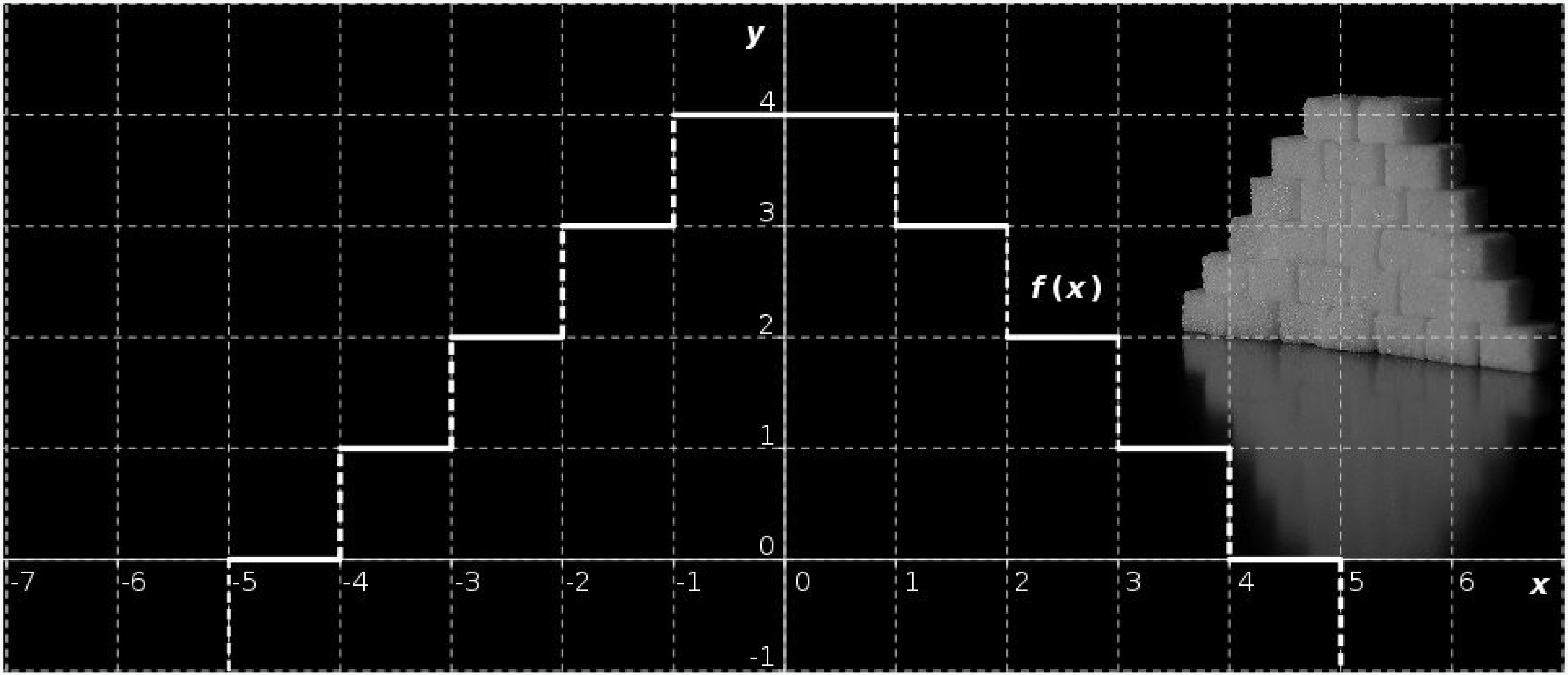


Abb. 2-6a: Die Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \left| \frac{1}{x-2} \right|, \qquad [-6,\ 10]$$



http://www.fotocommunity.de/pc/pc/cat/326/display/22448090

Abb. 2-7a: Die Stufenfunktion $y = f(x)$

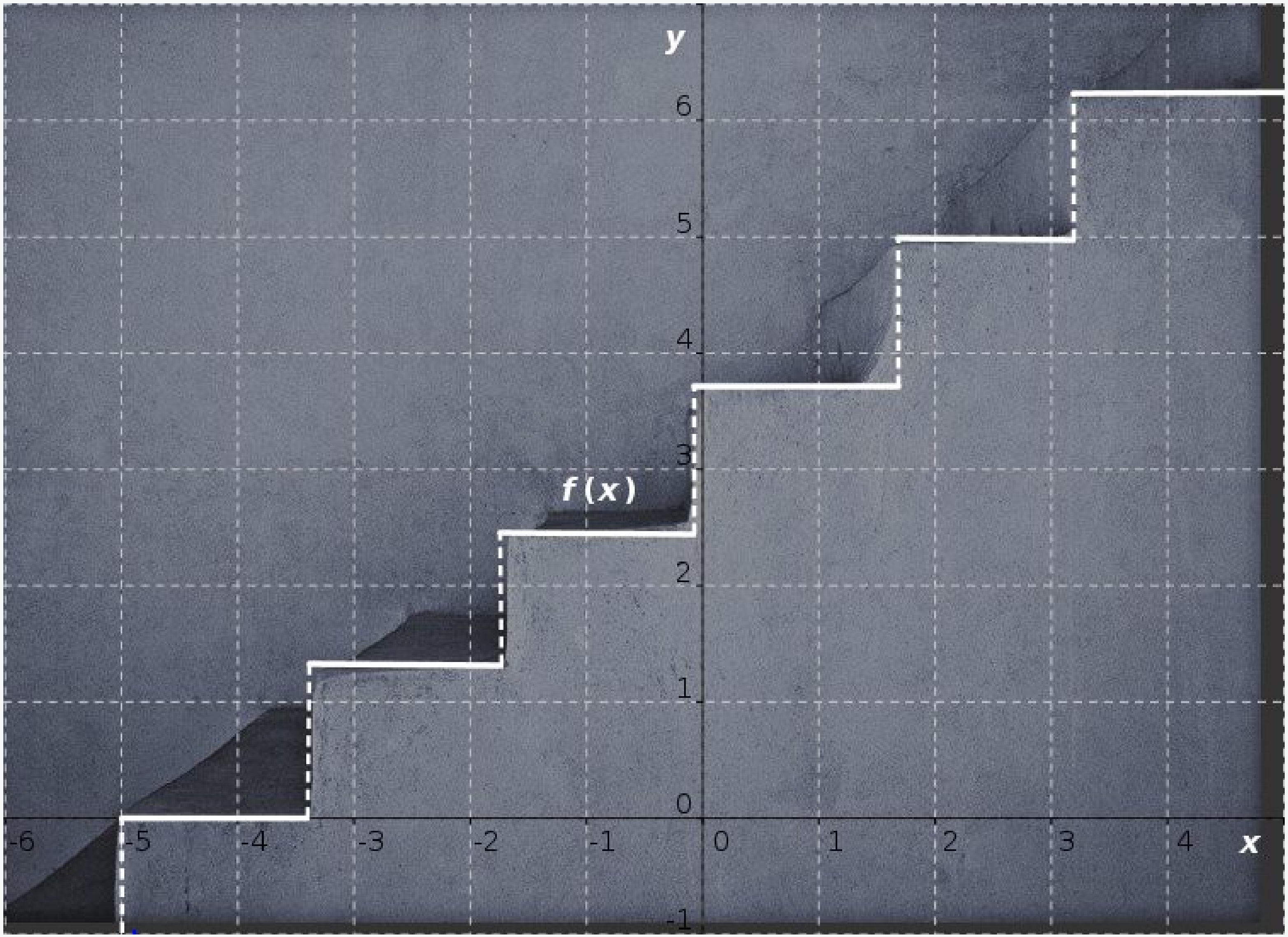


Abb. 2-8a: Die Stufenfunktion $y = f(x)$

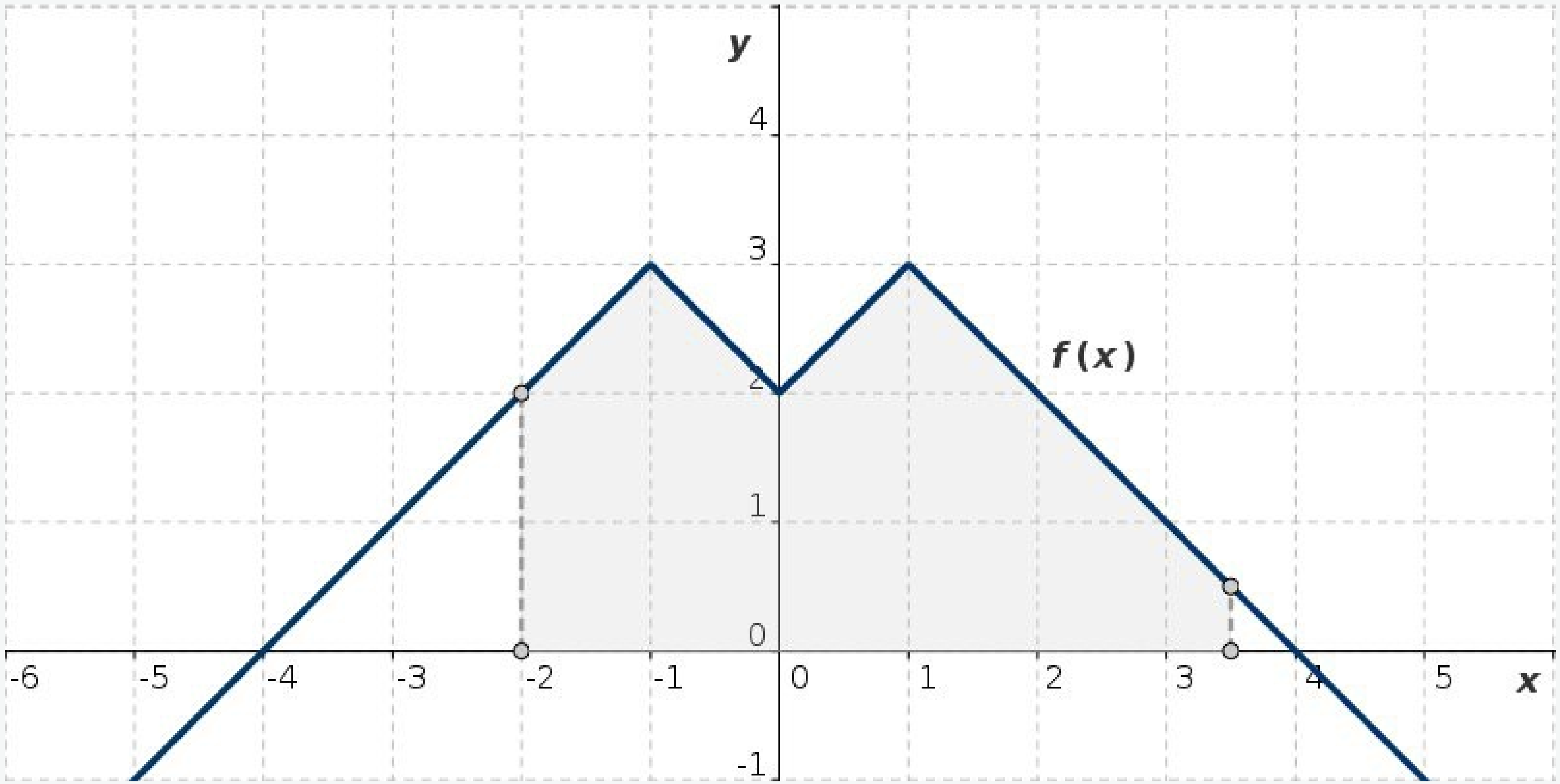


Abb. 2-1b: Die integrierbare Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = -||x| - 1| + 3, \qquad I = [-2,\ 3.5]$$

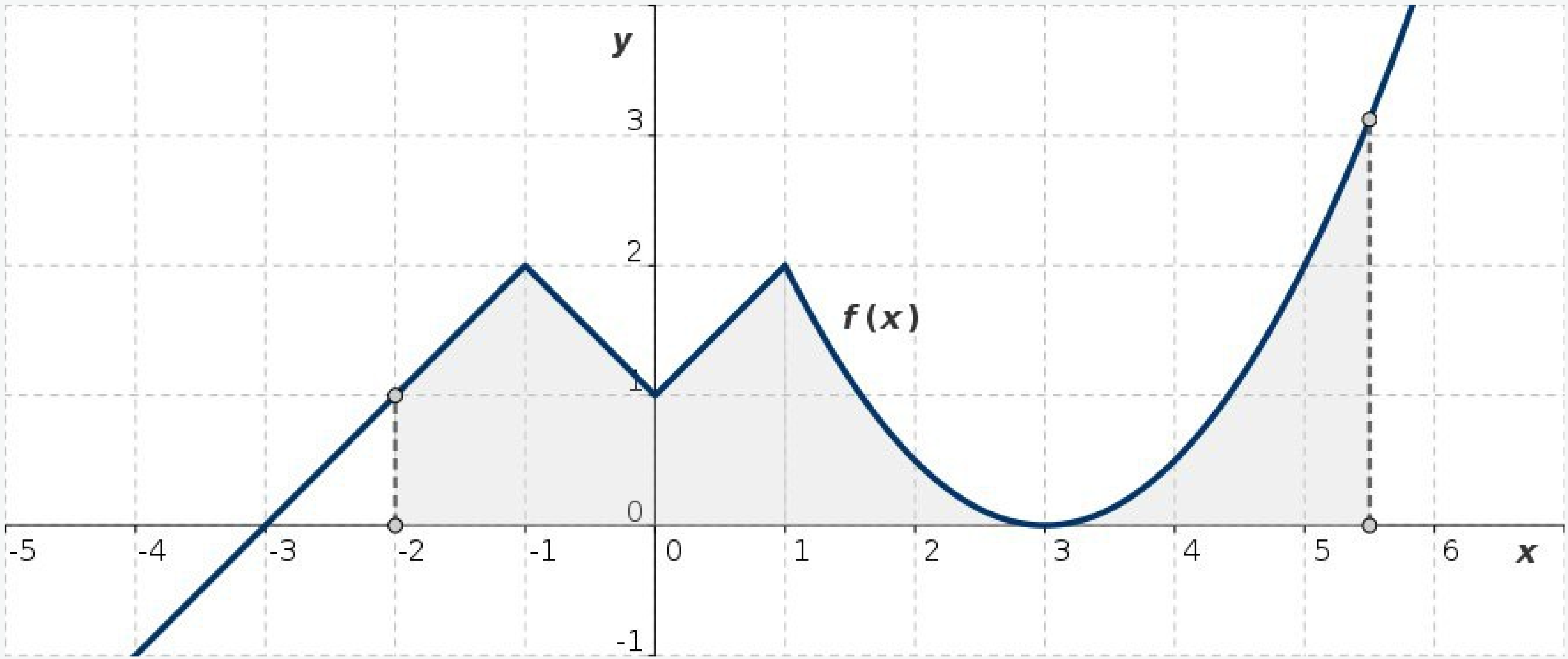


Abb. 2-2b: Die integrierbare Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -\left|\,|x| - 1\,\right| + 2, & [-2,\ 1] \\ \dfrac{1}{2}\,(x-3)^2, & [1,\ 5.5] \end{cases}$$

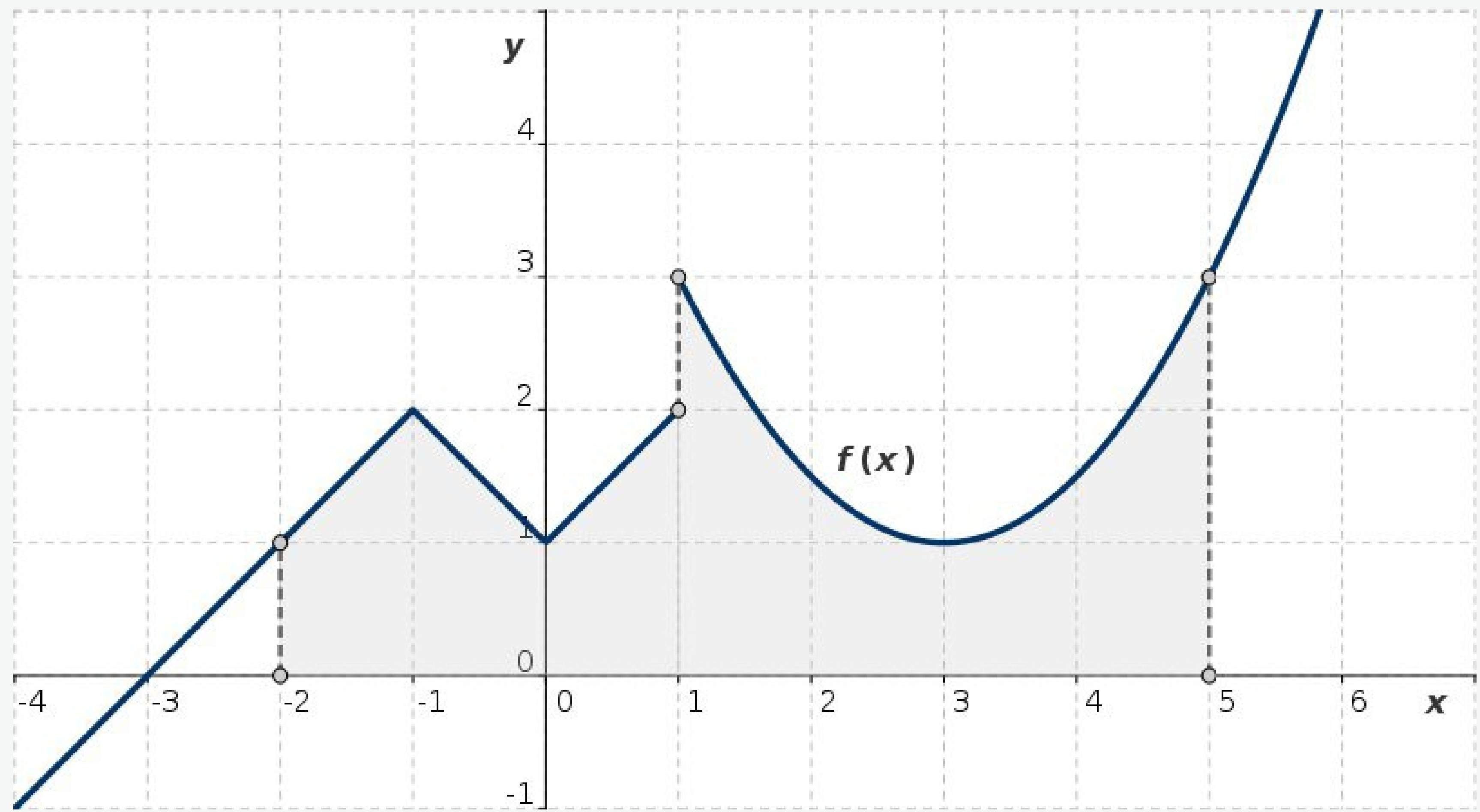


Abb. 2-3b: Die integrierbare Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -\left|\,|x| - 1\,\right| + 2, & [-2,\ 1] \\ \dfrac{1}{2}(x-3)^2 + 1, & [1,\ 5] \end{cases}$$

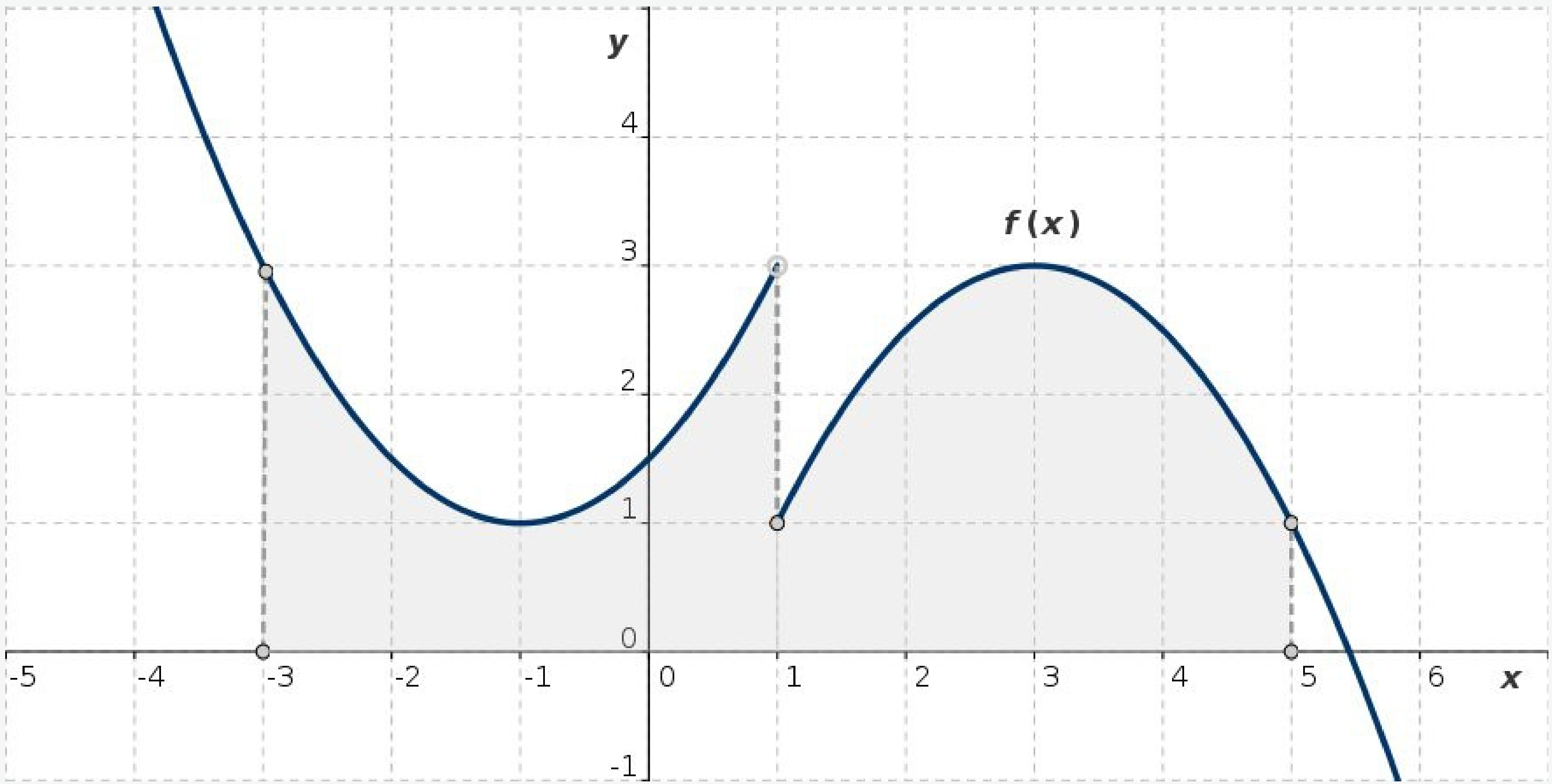


Abb. 2-4b: Die integrierbare Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2 + 1, & [-3,\ 1] \\ -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 3, & [1,\ 5] \end{cases}$$

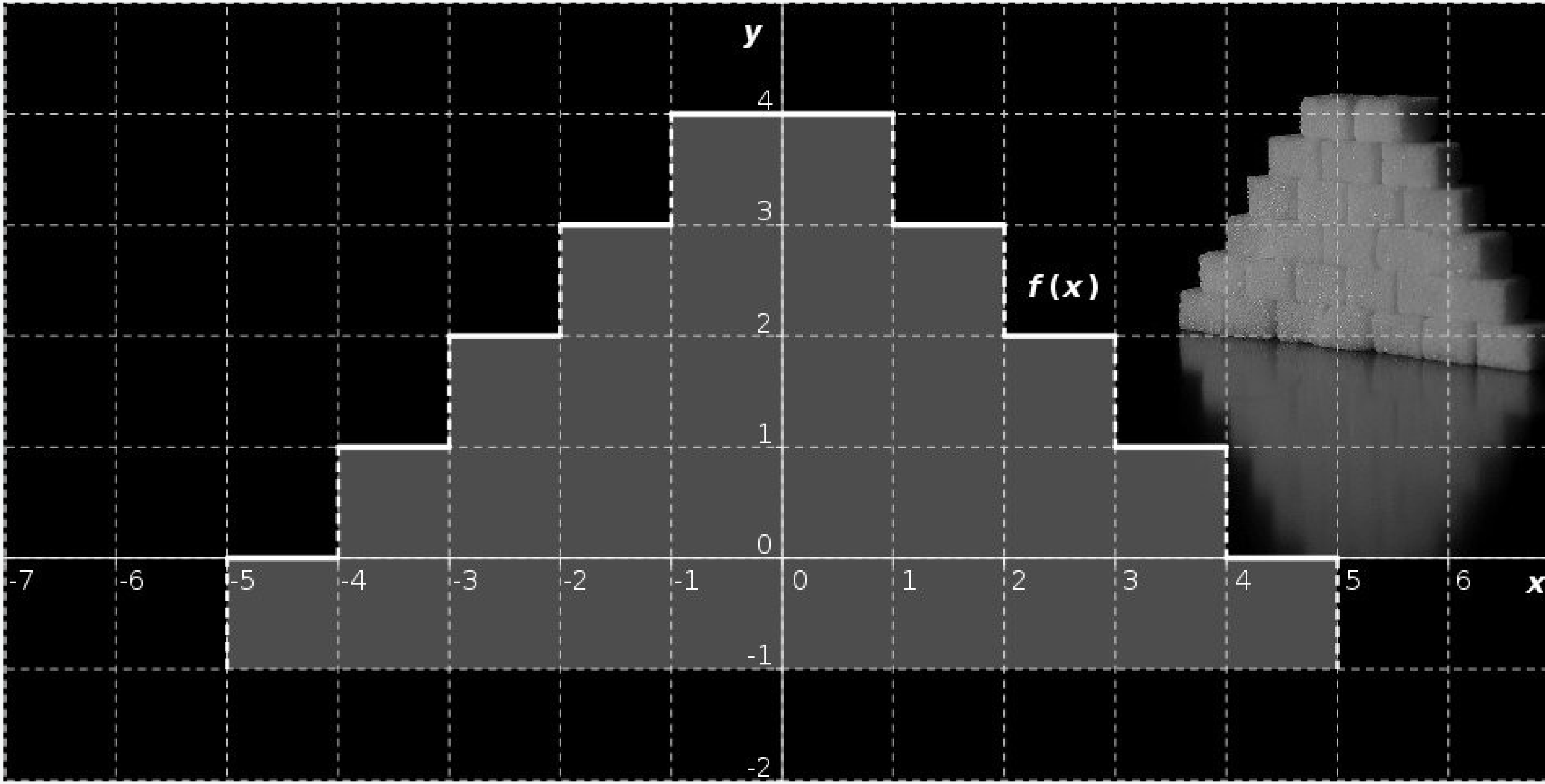


Abb. 2-7b: Die integrierbare Stufenfunktion $y = f(x)$

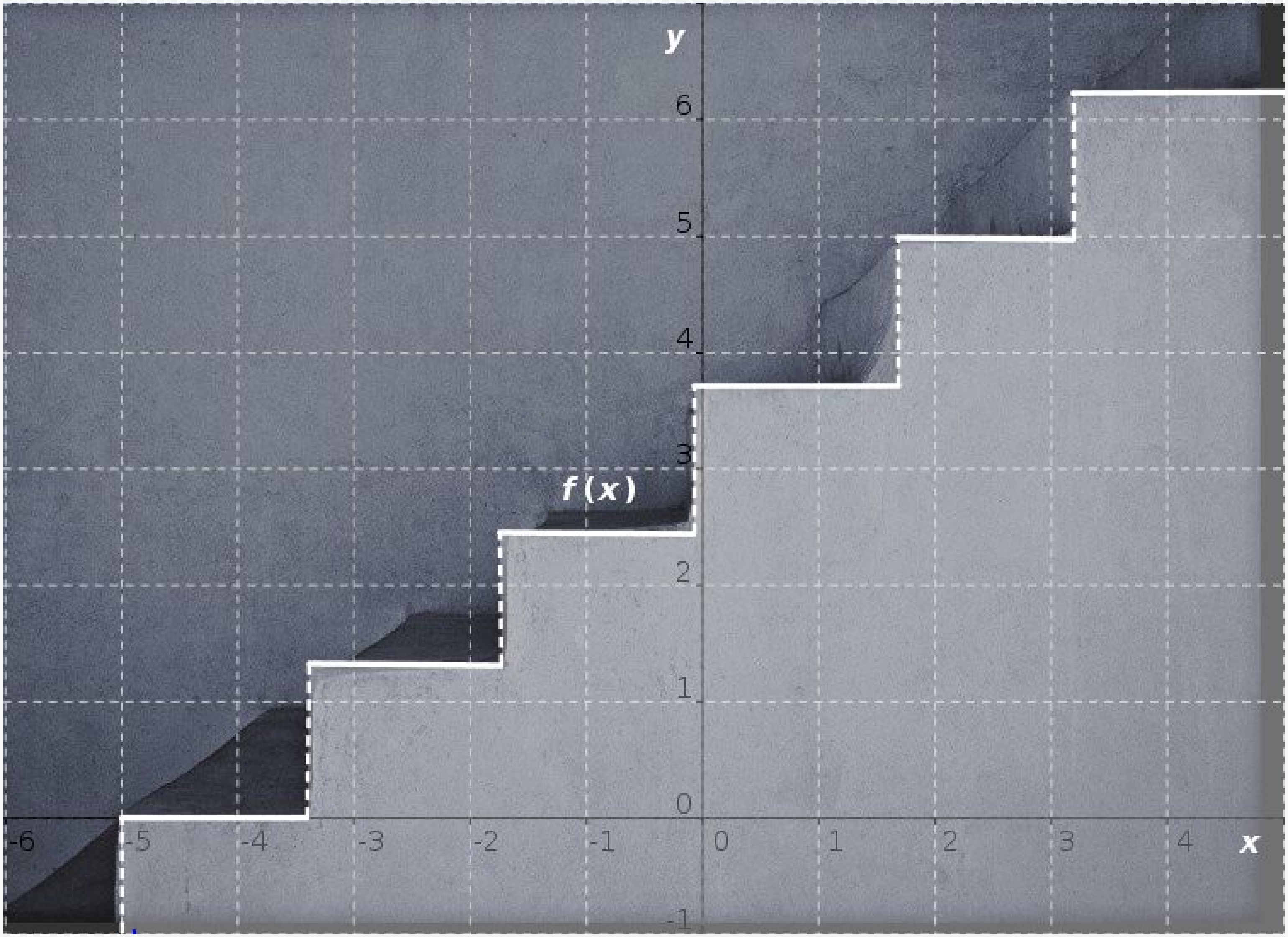


Abb. 2-8b: Die integrierbare Stufenfunktion $y = f(x)$