

Flächen zwischen zwei Kurven

Flächen zwischen zwei Kurven: Beispiel 1

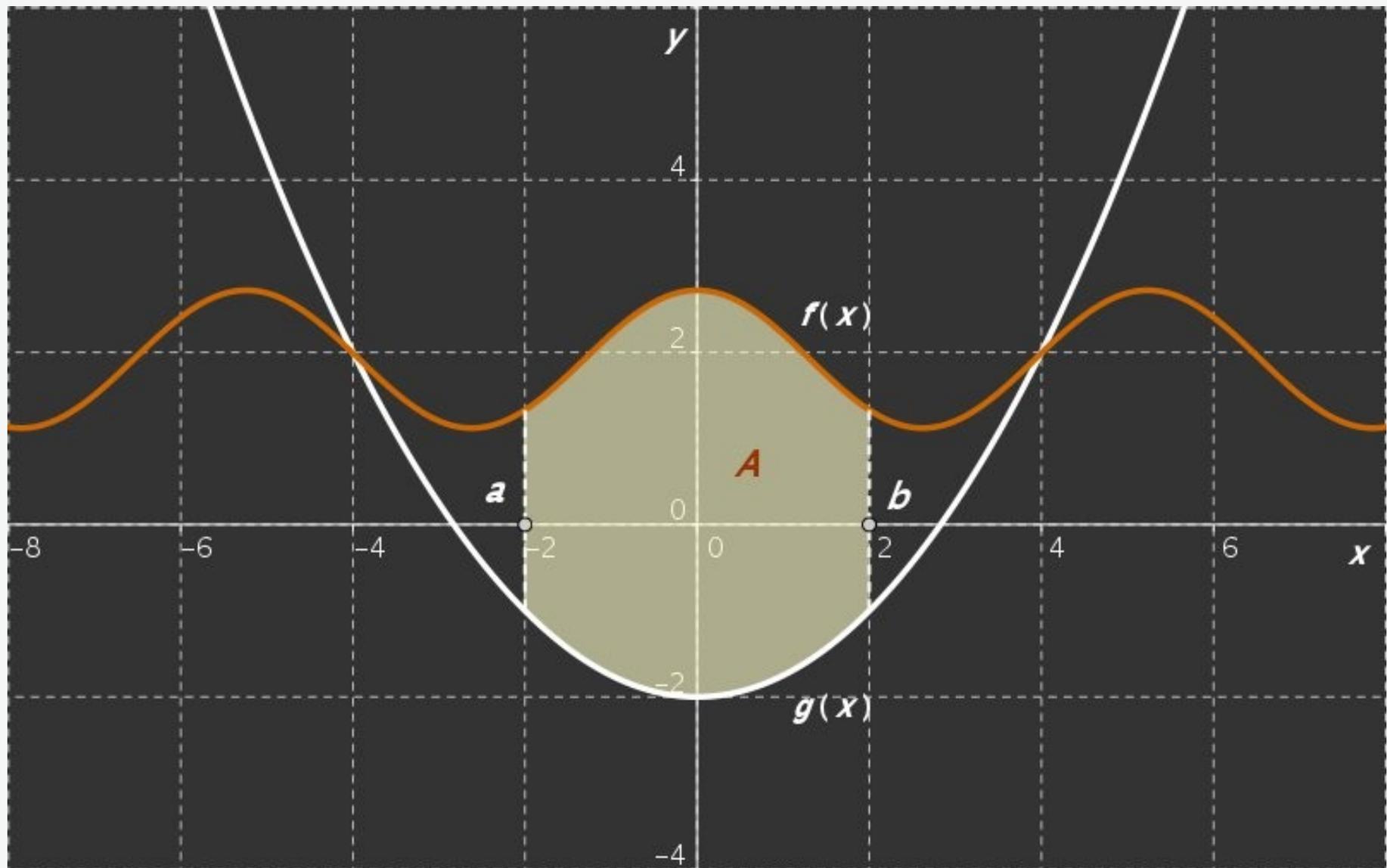


Abb. B1: Die Fläche zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a, b]$, $f(x)$ ist die obere Kurve und $g(x)$ ist die untere Kurve

Flächen zwischen zwei Kurven: Beispiel 2

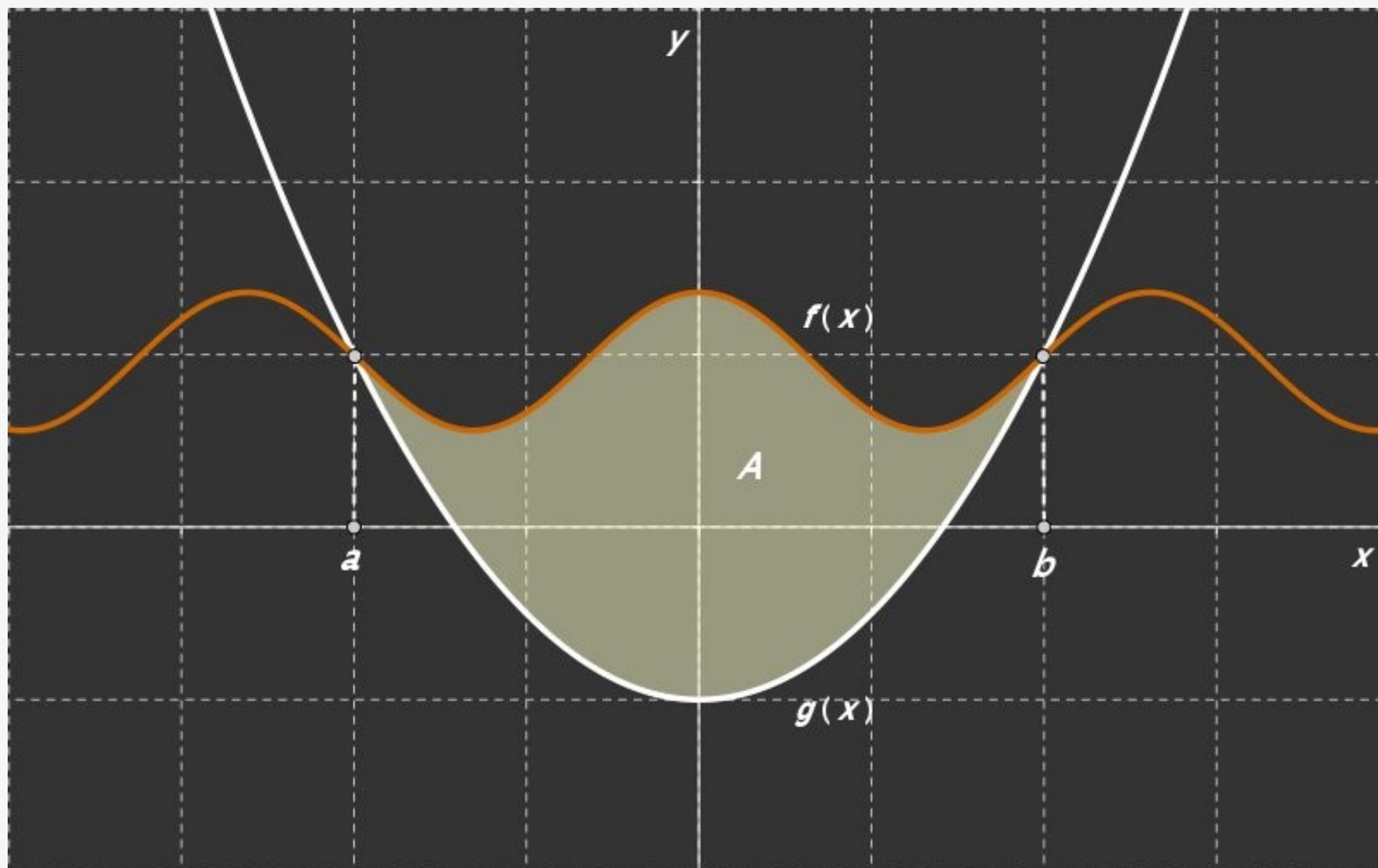


Abb. B2a: Die von den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossene Fläche im Intervall $[a, b]$, $f(x)$ ist die obere Kurve und $g(x)$ ist die untere Kurve

Flächen zwischen zwei Kurven: Beispiel 2



Abb. B2b: Die von den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossene Fläche

Flächen zwischen zwei Kurven: Beispiel 3

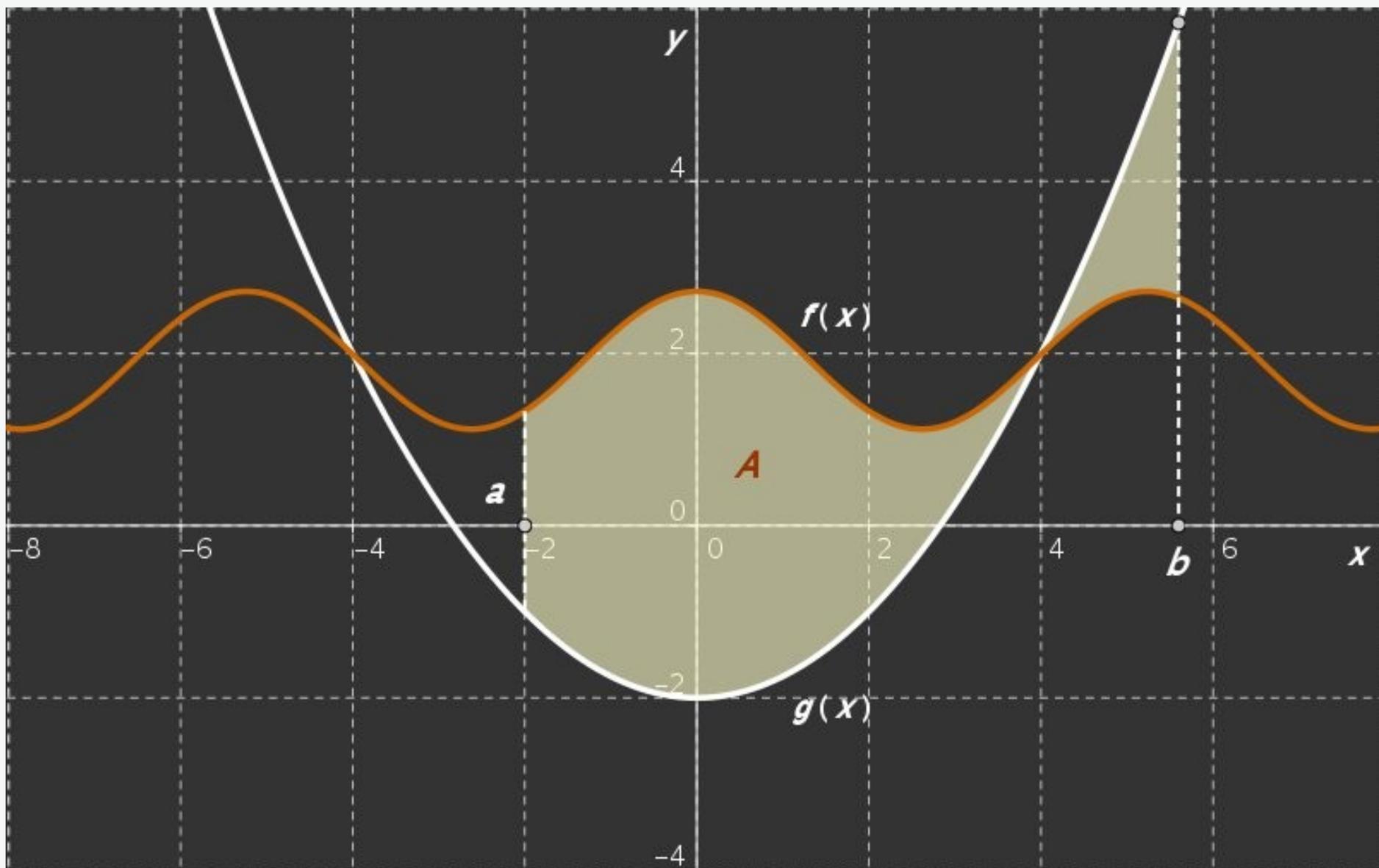


Abb. B3: Die Fläche zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a, b]$

Es soll die Fläche zwischen der Funktion $f(x)$ und $g(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ berechnet werden:

Aufgabe 1:

$$a) \quad f(x) = x + 1, \quad g(x) = e^{-x}, \quad a = 0, \quad b = 3$$

$$b) \quad f(x) = x - 1, \quad g(x) = e^{-x} - 2, \quad a = 0, \quad b = 3$$

Aufgabe 2:

$$f(x) = -x + 4, \quad g(x) = x, \quad a = 0, \quad b = 4$$

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 1a

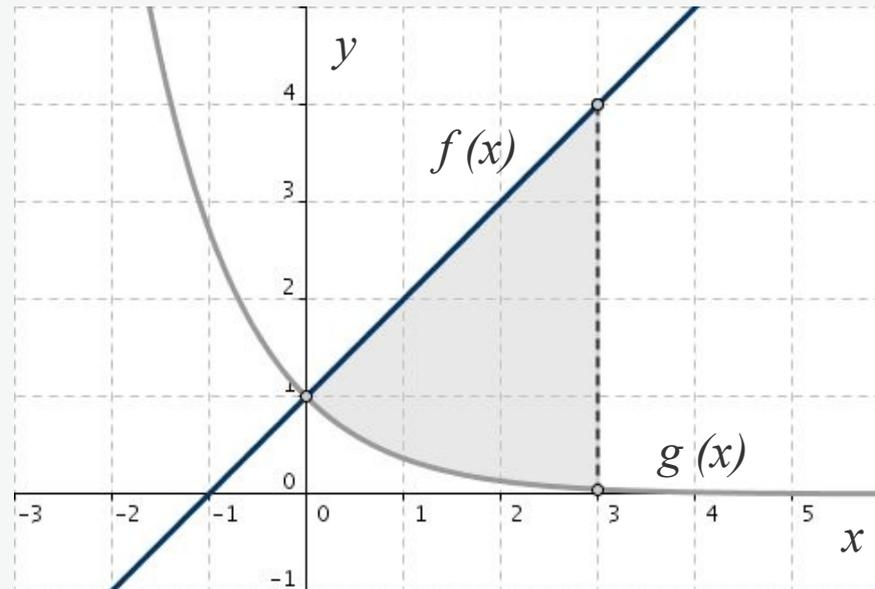
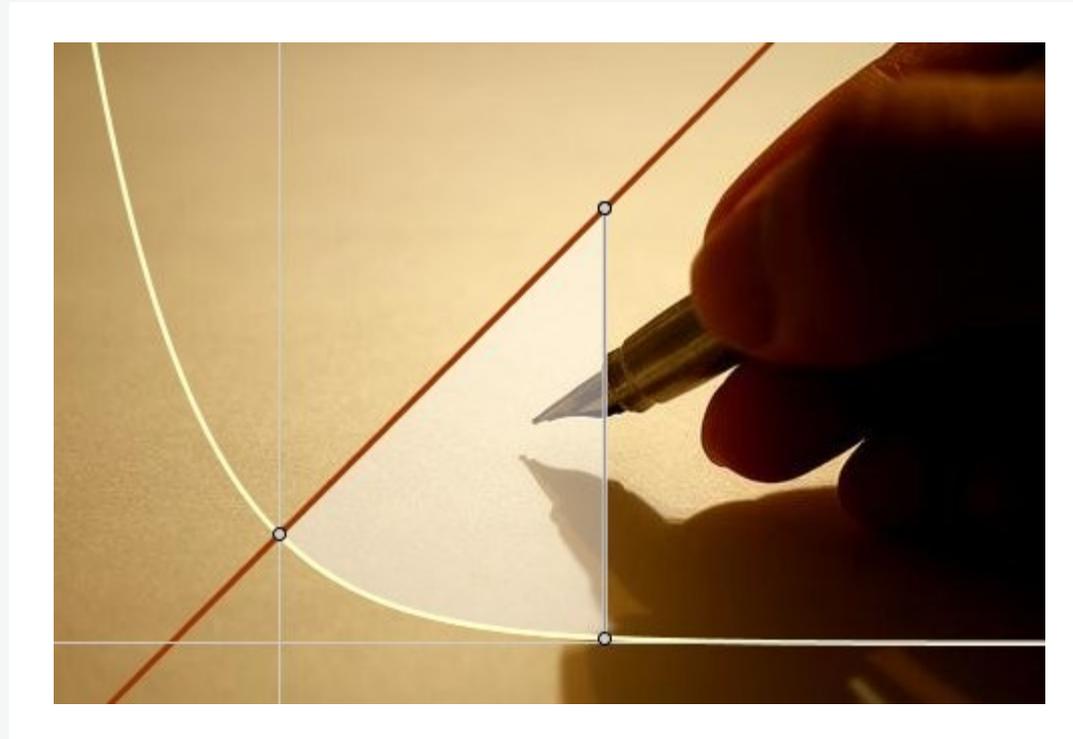


Abb. L1a: Die Fläche zwischen Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0, 3]$,
 $f(x)$ ist die obere Kurve und $g(x)$ ist die untere Kurve

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = e^{-x}, \quad x \in [0, 3]$$

$$\begin{aligned} A = A_1 - A_2 &= \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^3 [x + 1 - e^{-x}] dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x + e^{-x} \right]_0^3 = \frac{13}{2} + e^{-3} \approx 6.55 \text{ FE} \end{aligned}$$



Die Formel

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

bleibt auch dann gültig, wenn eine oder beide Funktionen negative Werte annehmen. Lediglich ihre Differenz $f(x) - g(x)$ bestimmt den durch beide Kurven berandeten Flächeninhalt.

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 1b

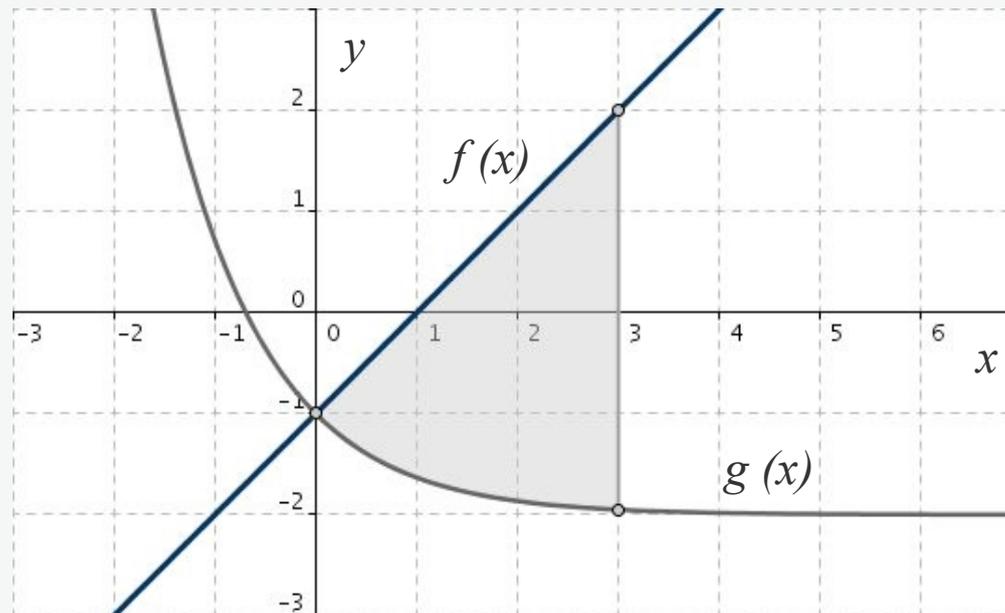


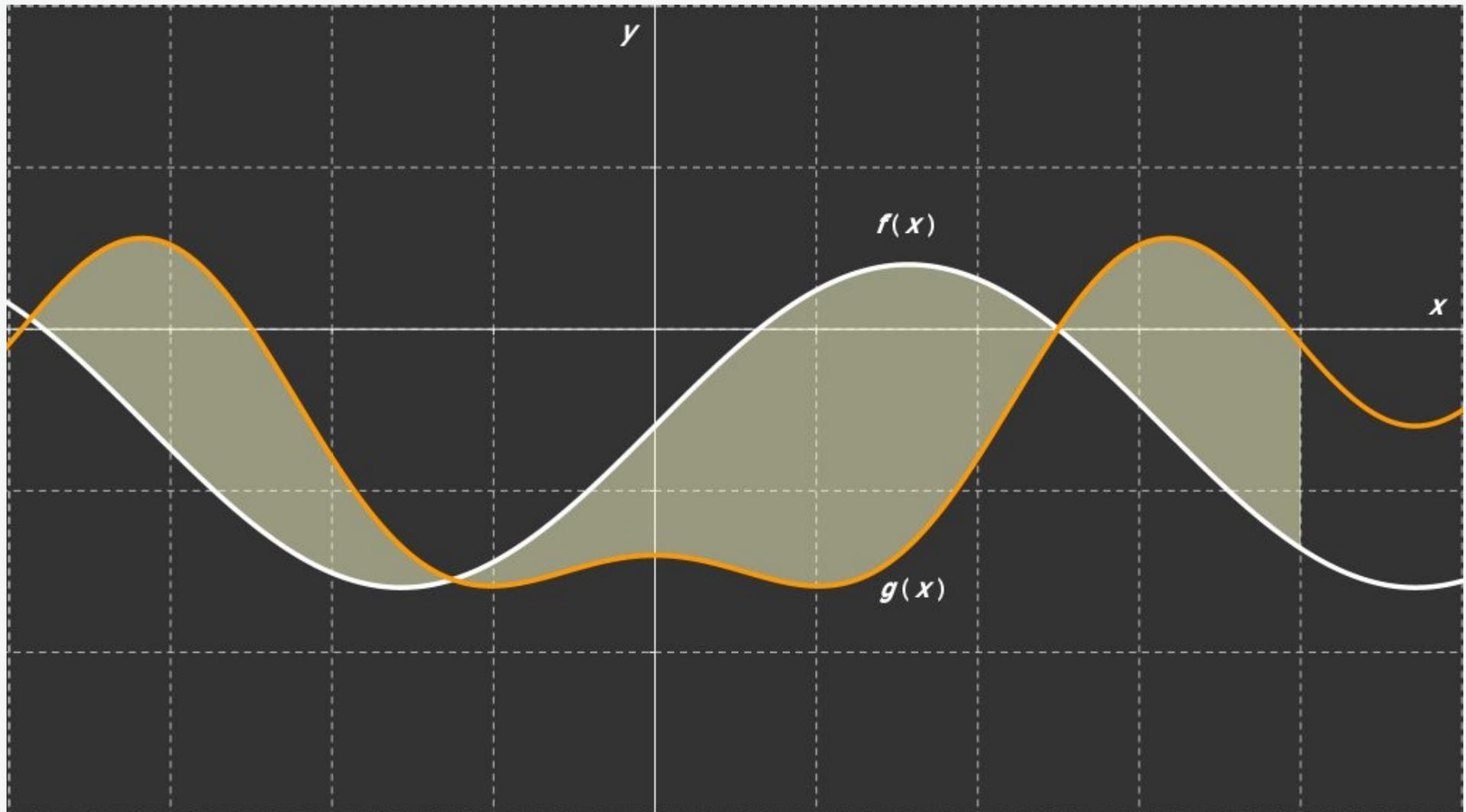
Abb. L1b: Die Fläche zwischen Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0, 3]$,
 $f(x)$ ist die obere Kurve und $g(x)$ ist die untere Kurve

$$f(x) = x - 1, \quad g(x) = e^{-x} - 2, \quad x \in [0, 3]$$

Die Funktionen aus dem Beispiel 1a) werden nach unten verschoben.
Wir bestimmen den Flächeninhalt zwischen diesen Funktionen im Bereich $[0, 3]$

$$A = \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^3 [x + 1 - e^{-x}] dx = \frac{13}{2} + e^{-3} = 6.55 \text{ FE}$$

Flächen zwischen zwei Kurven



Es ist für die Flächenberechnung zwischen zwei Kurven nicht wichtig, ob die Fläche oberhalb oder unterhalb der x -Achse liegt.

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 2

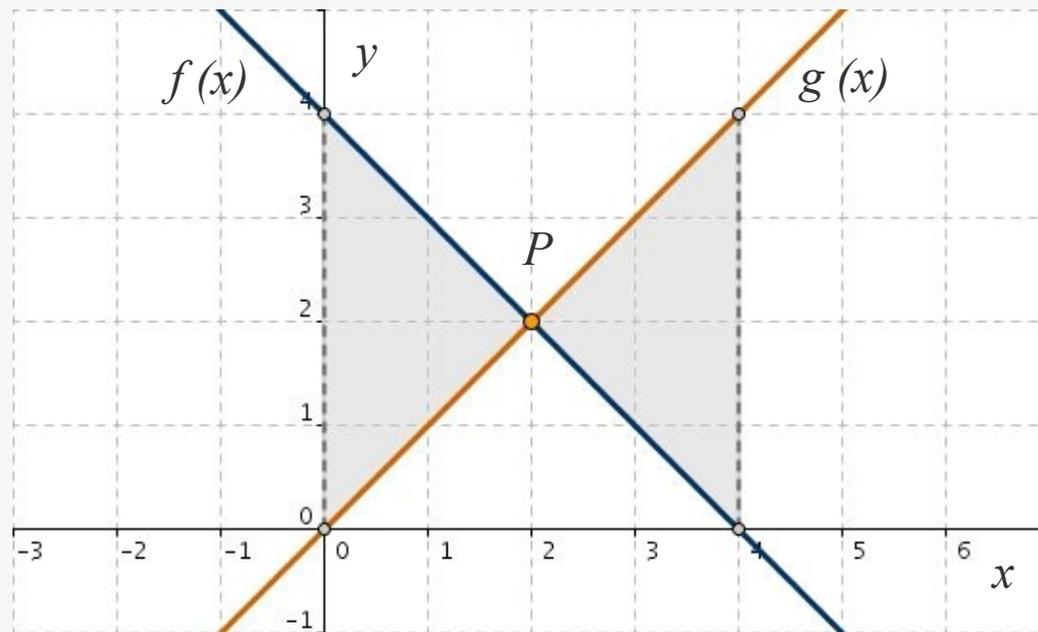


Abb. 3: Die Fläche zwischen Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0, 4]$

$$f(x) = -x + 4, \quad g(x) = x, \quad x \in [0, 4]$$

Es ist möglich, dass sich die Funktionen im Integrationsbereich $[a, b]$ schneiden. Bei der Flächenberechnung muss dann der Integrationsbereich am Schnittpunkt unterteilt werden.

Bildet man die Differenz $f(x) - g(x)$, so ist diese für $0 \leq x < 2$ positiv und für $2 < x \leq 4$ negativ.

Das Integral

$$A = \int_0^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^4 (4 - 2x) dx = [4x - x^2]_0^4 = 0$$

beschreibt damit nicht die gesuchte Fläche. Daher muss der Integrationsbereich bei der x -Koordinate des Schnittpunktes beider Geraden ($x = 2$) unterteilt und die zwei Teilflächen einzeln berechnet werden.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx + \int_2^4 (g(x) - f(x)) dx = \\ &= \int_0^2 (4 - 2x) dx + \int_2^4 (2x - 4) dx = 8 \text{ FE} \end{aligned}$$

Die Vorgehensweise bei der Flächenberechnung zwischen zwei Kurven im Bereich $[a, b]$:

- Man bestimmt sämtliche Schnittpunkte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ (bzw. die Nullstellen der Differenzfunktion $f(x) - g(x)$)
- Man teilt das Integrationsintervall $[a, b]$ in Teilbereiche ein.
- In jedem der Teilbereiche berechnet man den Integralwert und addiert anschließend die Beträge sämtlicher Integrale.

In manchen Aufgabenstellungen sind die Intervallgrenzen a und b nicht explizit gegeben. Gesucht ist eine Fläche, die von zwei Kurven eingeschlossen wird. Die Integrationsgrenzen sind in diesem Fall die Abszissenwerte der Schnittpunkte beider Kurven. Diese Grenzen müssen vor dem Aufstellen des Integrals ermittelt werden.

Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ eingeschlossen wird

Aufgabe 3: $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2$

Aufgabe 4: $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = x$

Aufgabe 5: $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = x$, $I = [0, 1]$

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 3

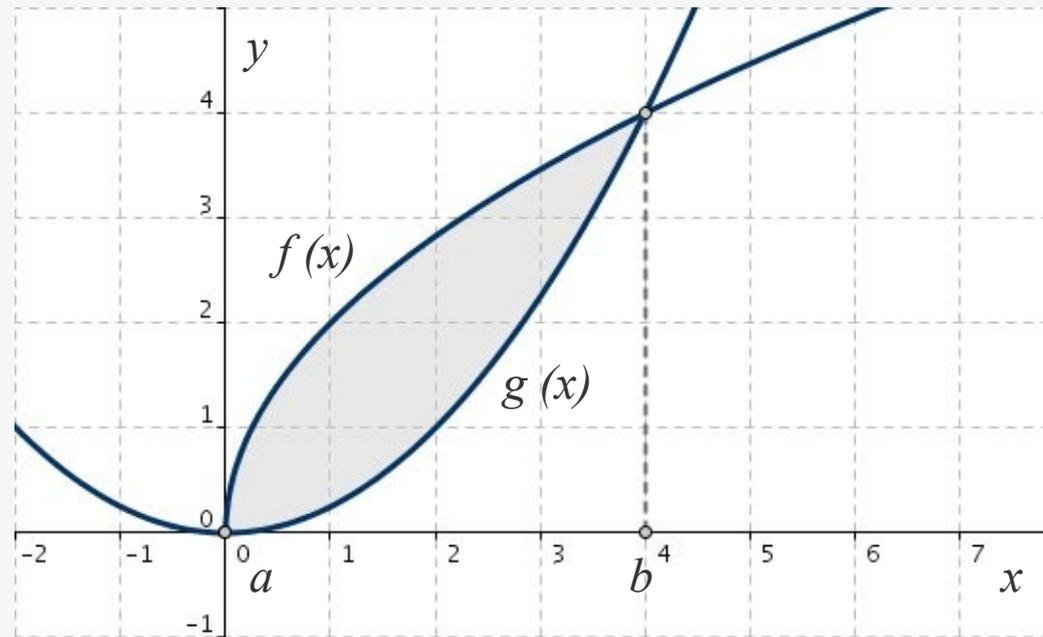


Abb. 4-1: Die zwischen den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossene Fläche

$$f(x) = 2\sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{1}{4}x^2$$

Um das Integrationsintervall festzulegen, bestimmen wir zunächst die Schnittstellen der beiden Kurven:

$$2\sqrt{x} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x(64 - x^3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

$$A = \int_0^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^4 \left[2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right] dx = \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \frac{16}{3} \simeq 5.33 \text{ FE}$$

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 4

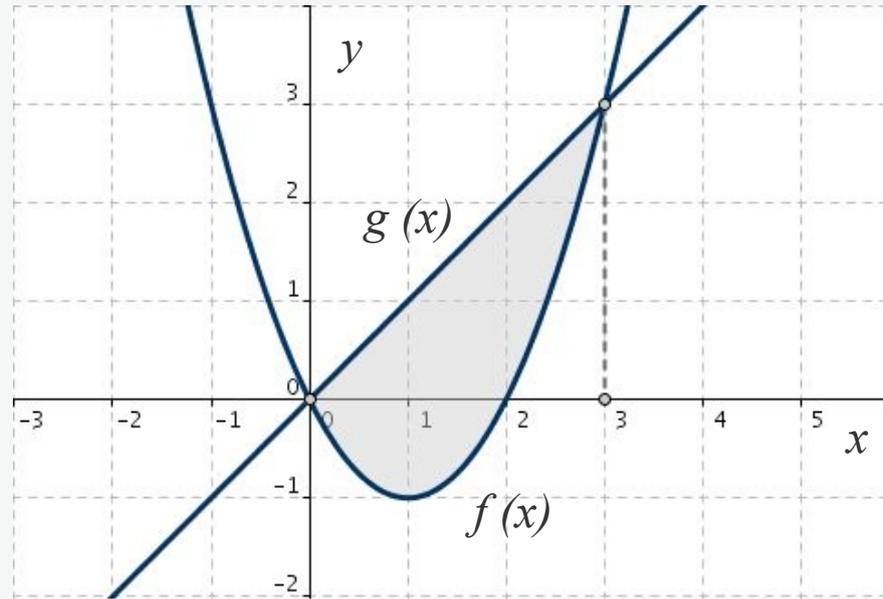


Abb. 4-2: Die zwischen den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossene Fläche

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad g(x) = x$$

Wir bestimmen die Schnittstellen der beiden Kurven:

$$x^2 - 2x = x \Rightarrow x(x - 3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^3 (x - x^2 + 2x) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \\ &= \left[\frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 dx = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ FE} \end{aligned}$$

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 5

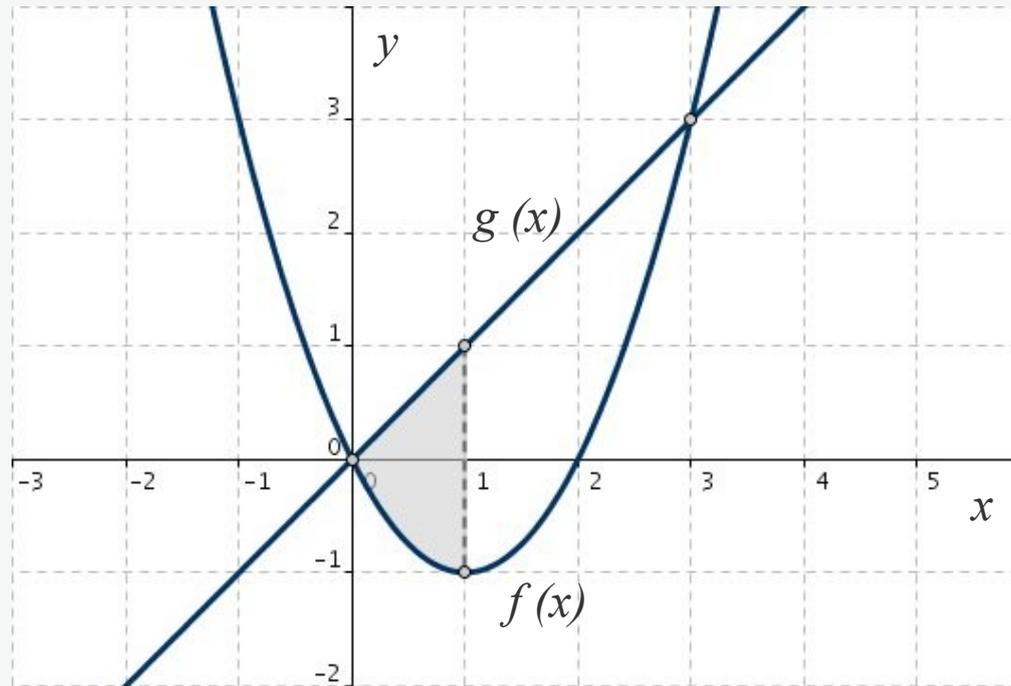


Abb. 4-3: Die Fläche zwischen den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0, 1]$

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad g(x) = x$$

Die Schnittstellen der beiden Kurven: $x_1 = 0, \quad x_2 = 3 \quad x_2 \notin [0, 1]$

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^1 (3x - x^2) dx = \frac{7}{6} \simeq 1.17 \text{ FE}$$

Ermitteln Sie die von den gegebenen Funktionen begrenzte Fläche:

Aufgabe 6:

$$f(x) = 2x^2 - x^4, \quad g(x) = x - 1, \quad I = [0, 1]$$

Aufgabe 7:

$$f(x) = x^3 - 4x, \quad g(x) = x, \quad I = [-1, 1]$$

Aufgabe 8:

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x e^{-x^2}, \quad I = [0, 2]$$

Aufgabe 9:

$$f(x) = 2x^2 + 10, \quad g(x) = 4x + 16, \quad I = [-2, 5]$$

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 6

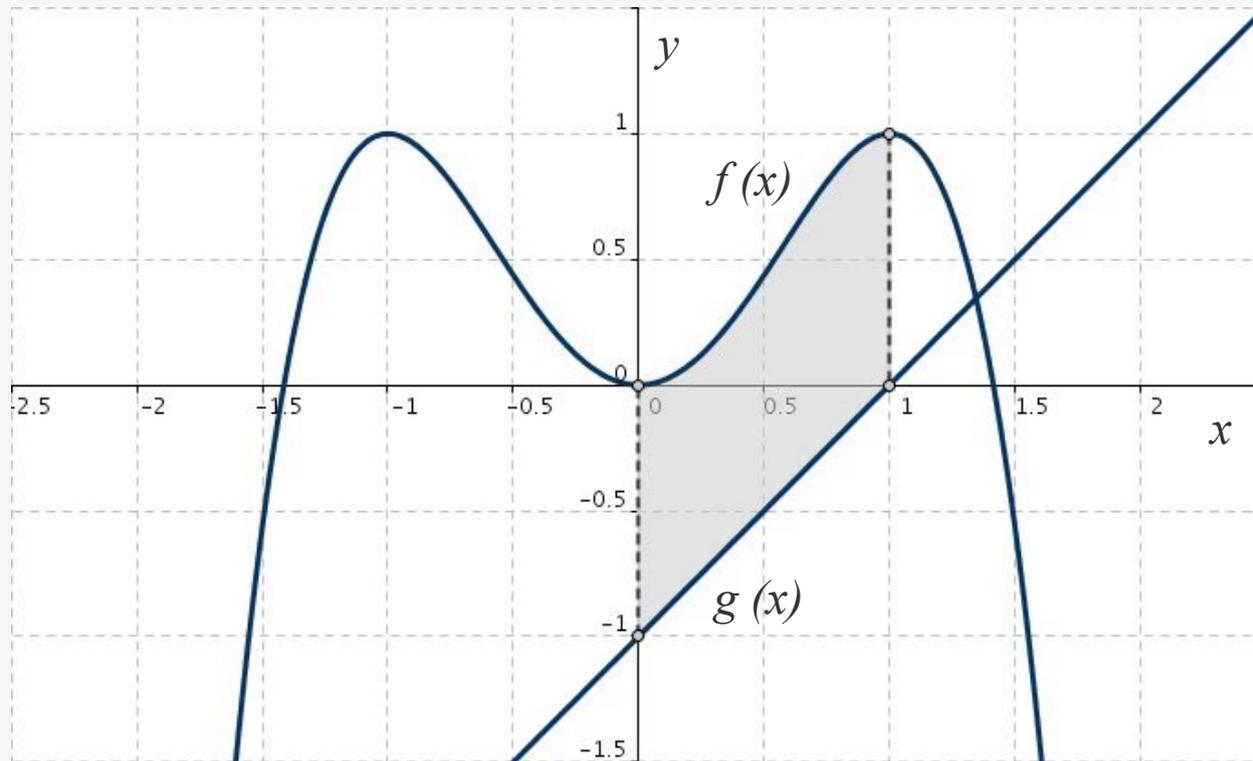


Abb. 5-1: Die Fläche zwischen den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0, 1]$

$$f(x) = 2x^2 - x^4, \quad g(x) = x - 1, \quad x \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [2x^2 - x^4 - x + 1] dx = \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{29}{30} \end{aligned}$$

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 7

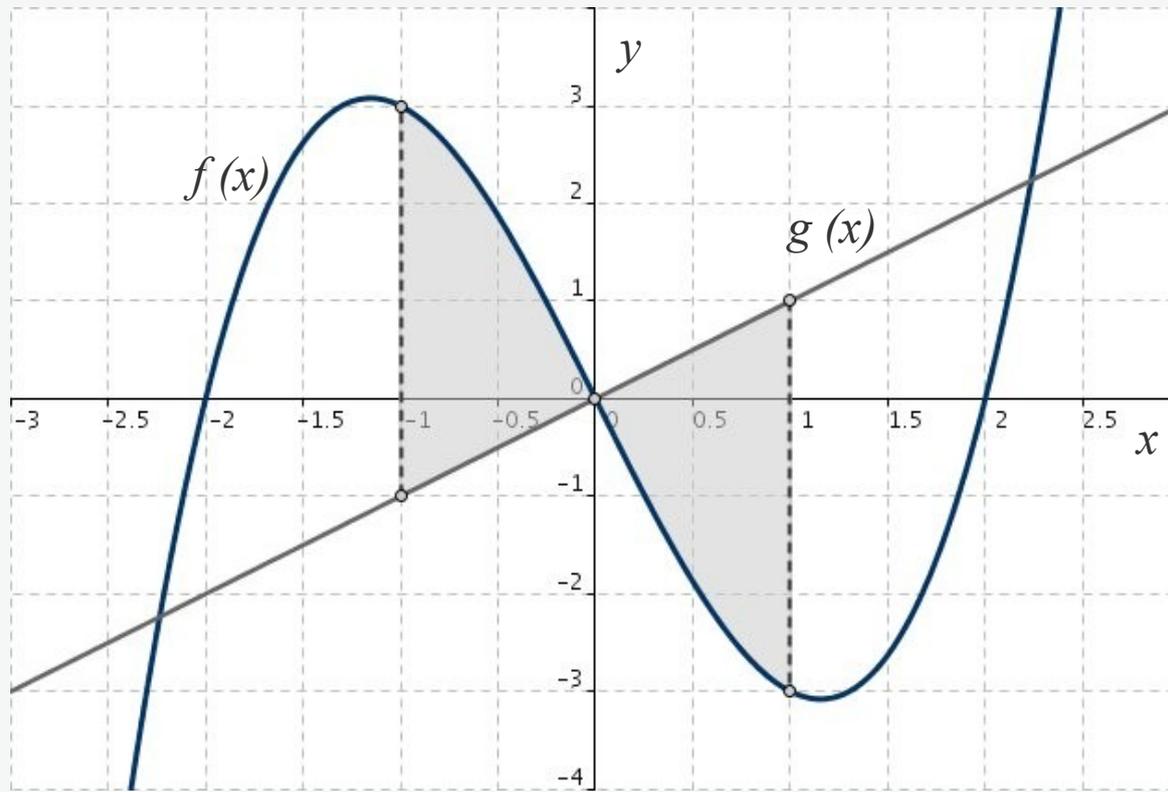


Abb. 5-2: Die Fläche zwischen den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[-1, 1]$

$$f(x) = x^3 - 4x, \quad g(x) = x, \quad x \in [-1, 1]$$

$$x^3 - 4x = x \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 5) = 0 \quad x_1 = -\sqrt{5}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{5}$$

$$x_2 \in I = [-1, 1], \quad x_1, x_3 \notin I$$

$$A = \int_{-1}^0 [f(x) - g(x)] dx - \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = 4.5$$

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 8

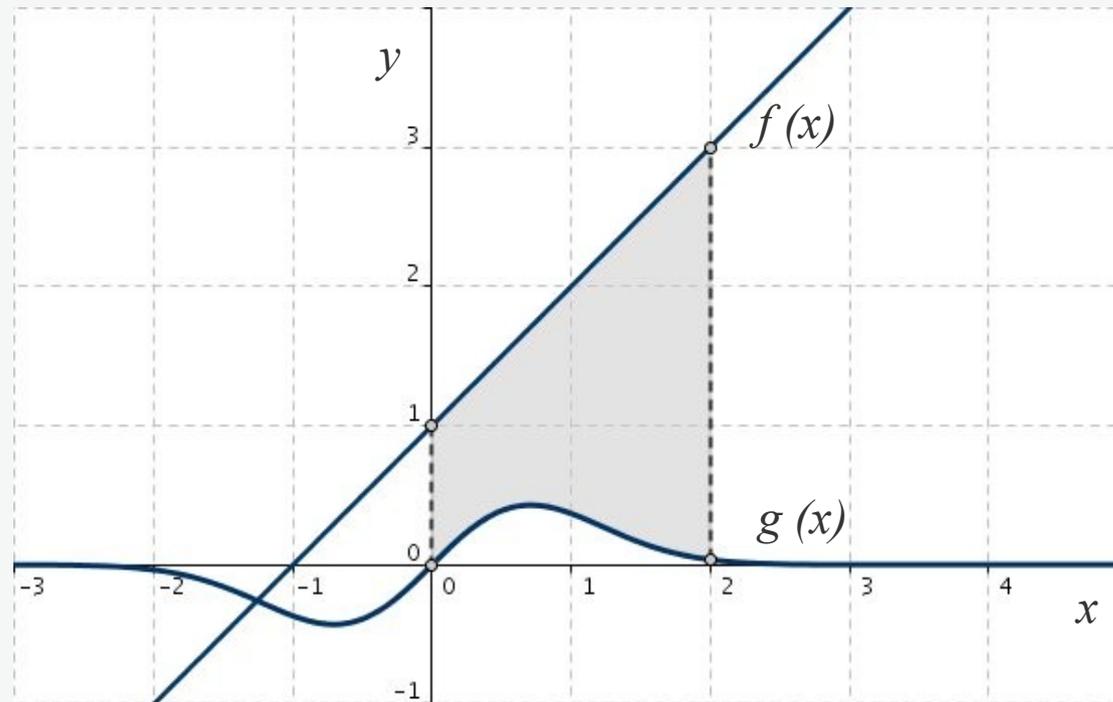


Abb. 5-3: Die Fläche zwischen den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0, 2]$

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x e^{-x^2}, \quad x \in [0, 2]$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 [x + 1 - x e^{-x^2}] dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^2 = \\ &= \frac{7}{2} + \frac{e^{-4}}{2} \end{aligned}$$

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 9

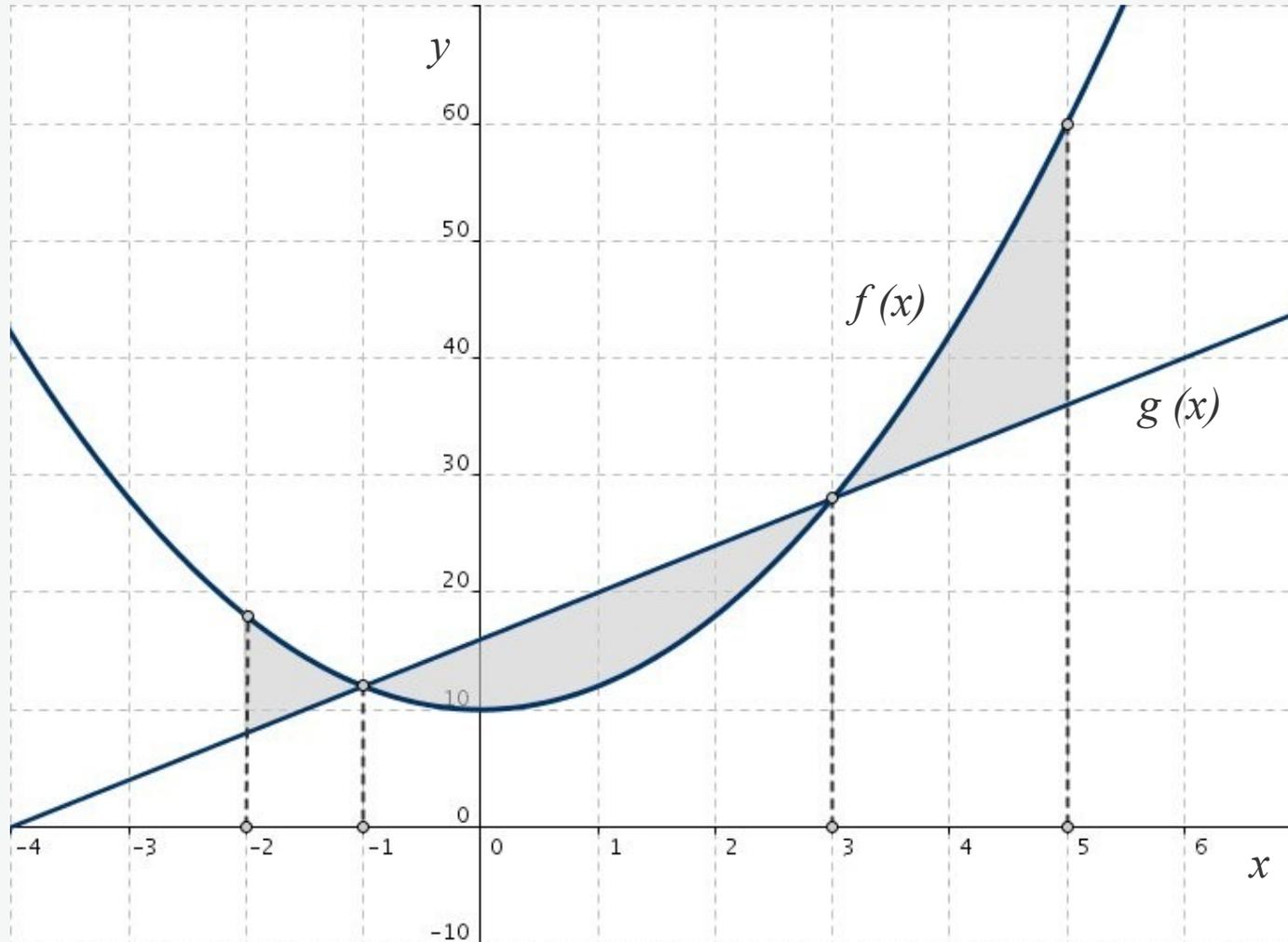


Abb. 5-4: Die Fläche zwischen den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[-2, 5]$

$$f(x) = 2x^2 + 10, \quad g(x) = 4x + 16, \quad x \in [-2, 5]$$

Flächen zwischen zwei Kurven: Lösung 9

Wir bestimmen die Schnittstellen der beiden Kurven $f(x) = g(x)$:

$$2x^2 + 10 = 4x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1} [f(x) - g(x)] dx - \int_{-1}^3 [f(x) - g(x)] dx + \int_3^5 [f(x) - g(x)] dx = \\ &= 2 \left(\int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx - \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx + \int_3^5 (x^2 - 2x - 3) dx \right) = \\ &= 2 \left(\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-1}^3 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_3^5 \right) = \\ &= 2 \left(\frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{32}{3} \right) = \frac{142}{3} \end{aligned}$$