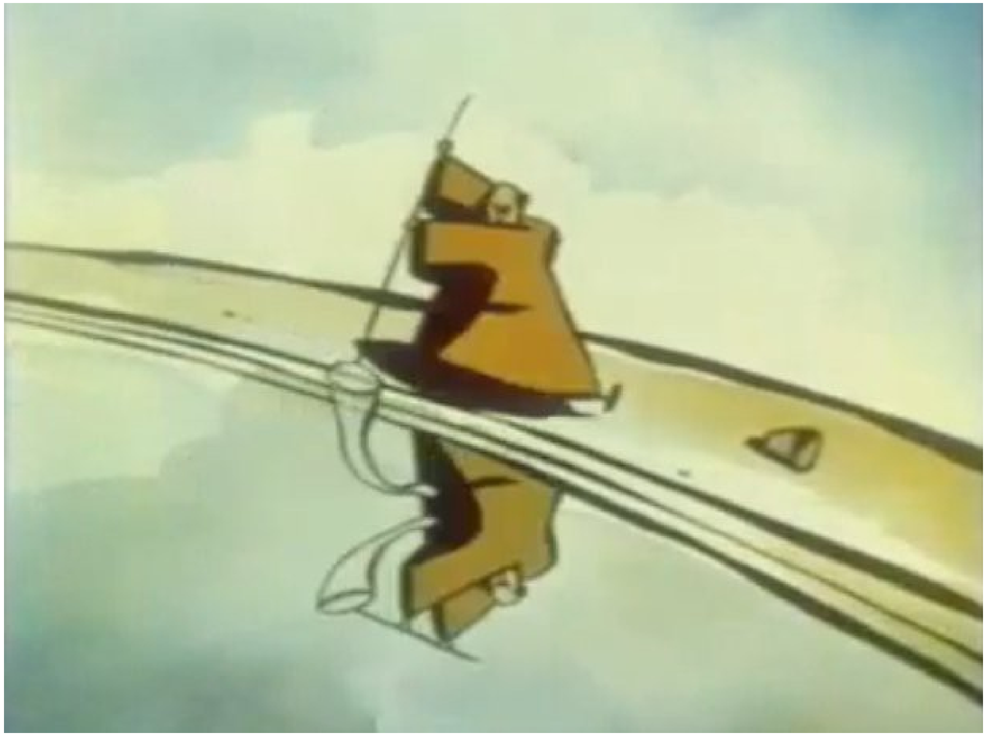

http://www.youtube.com/watch?v=Y37cWnjdhdM&feature=PlayList&p=F364D759DCD5431A&index=0

Bestimmtes Integral und Flächeninhalt (Teil 2)

Berechnen Sie folgende Integrale und entscheiden Sie, ob sie den Flächeninhalt zwischen der Funktion (dem Integrand) auf dem Intervall $[a, b]$ (Integrationsgrenzen)

Aufgabe 12: $I = \int_0^4 (x - 1)\, dx\,, \qquad [a\,,\ b] = [0,\ 4]$

Aufgabe 13: $I = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) dx$

Aufgabe 14: $I = \int_0^4 (x^2 - 4\,x)\, dx$

Aufgabe 15: $I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$

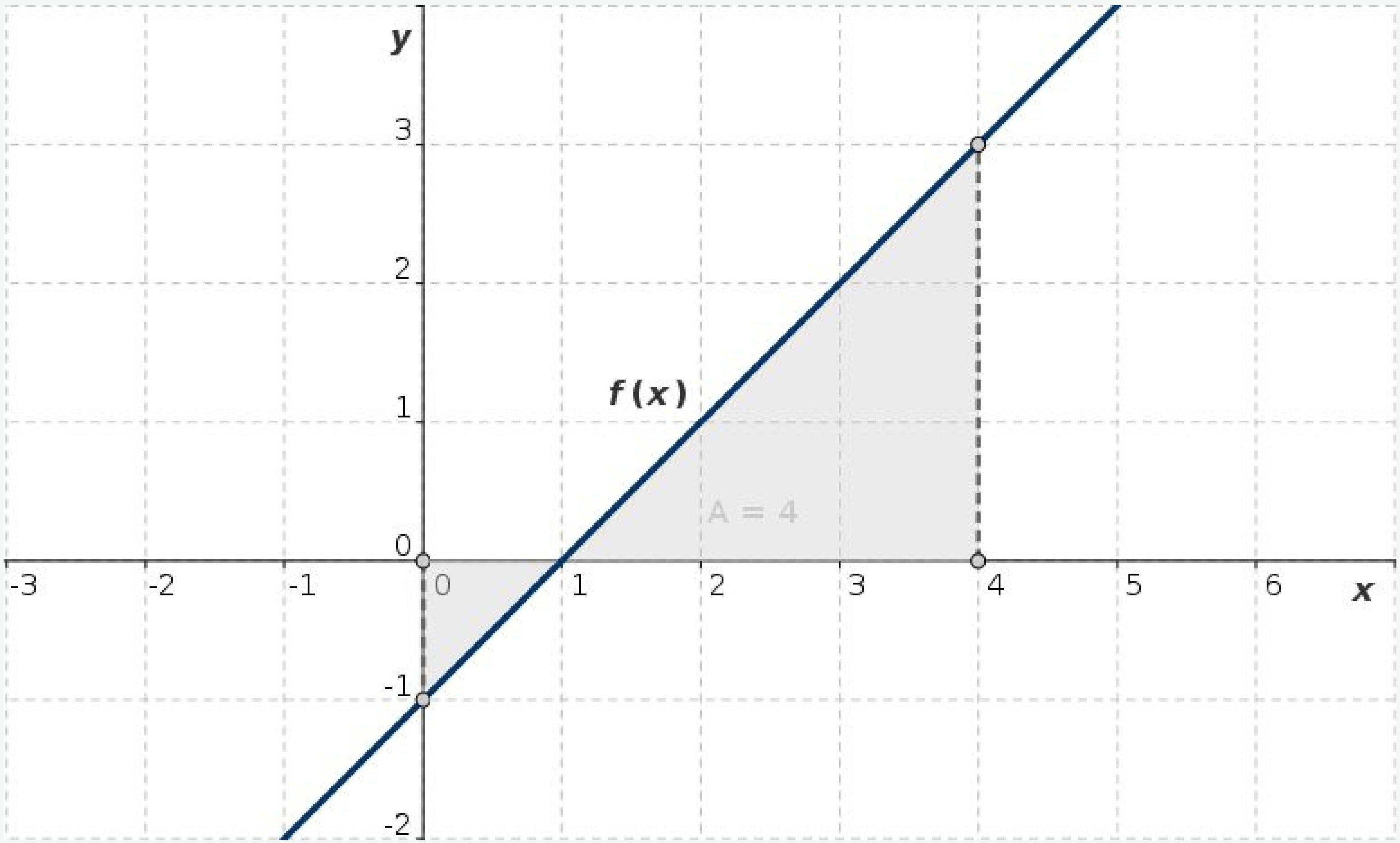

Abb. 2-1a: Zur Illustration des bestimmten Integrals der Aufgabe; f (x) = x - 1

$$\int_0^4 (x - 1)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^4 = \frac{4^2}{2} - 4 = 4$$

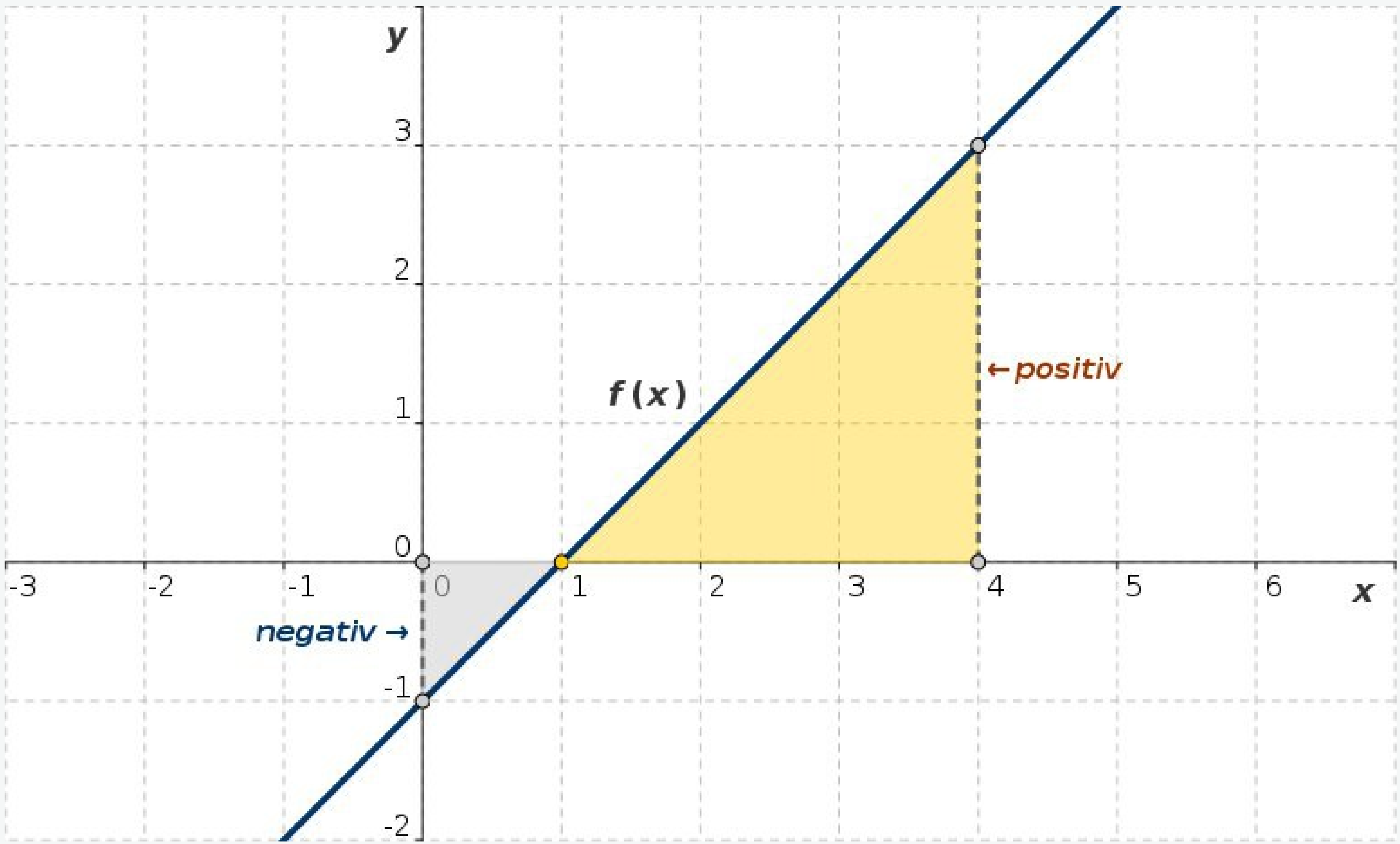

Abb. 2-1b: Die Fläche zwischen der Geraden f (x) = x - 1 und der x-Achse im Intervall [0, 4]

Nullstelle bei $x = 1$: $[0,\ 4] = [0,\ 1] \cup [1,\ 4]$

$$A = -\int_0^1 (x - 1)\,dx + \int_1^4 (x - 1)\,dx = \int_0^1 (1 - x)\,dx + \int_1^4 (x - 1)\,dx = 5 \text{ FE}$$

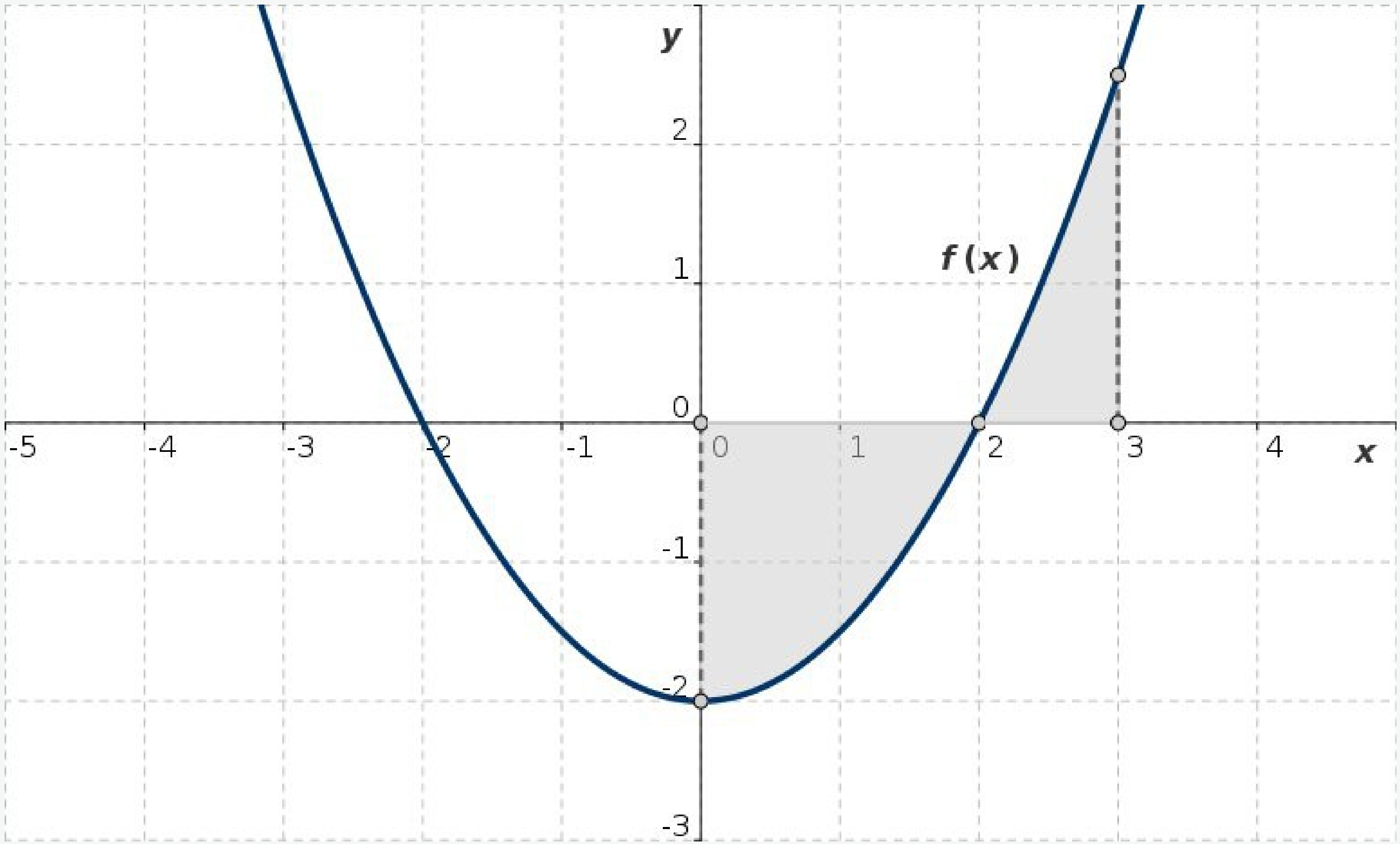

Abb. L13a: Zur Illustration des bestimmten Integrals der Aufgabe; f (x) = x²/2 - 2

$$\int_0^3 \left(0.5\, x^2 - 2 \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - 2\, x \right]_0^3 = -\frac{3}{2}$$

Lösung 13: Flächeninhalt

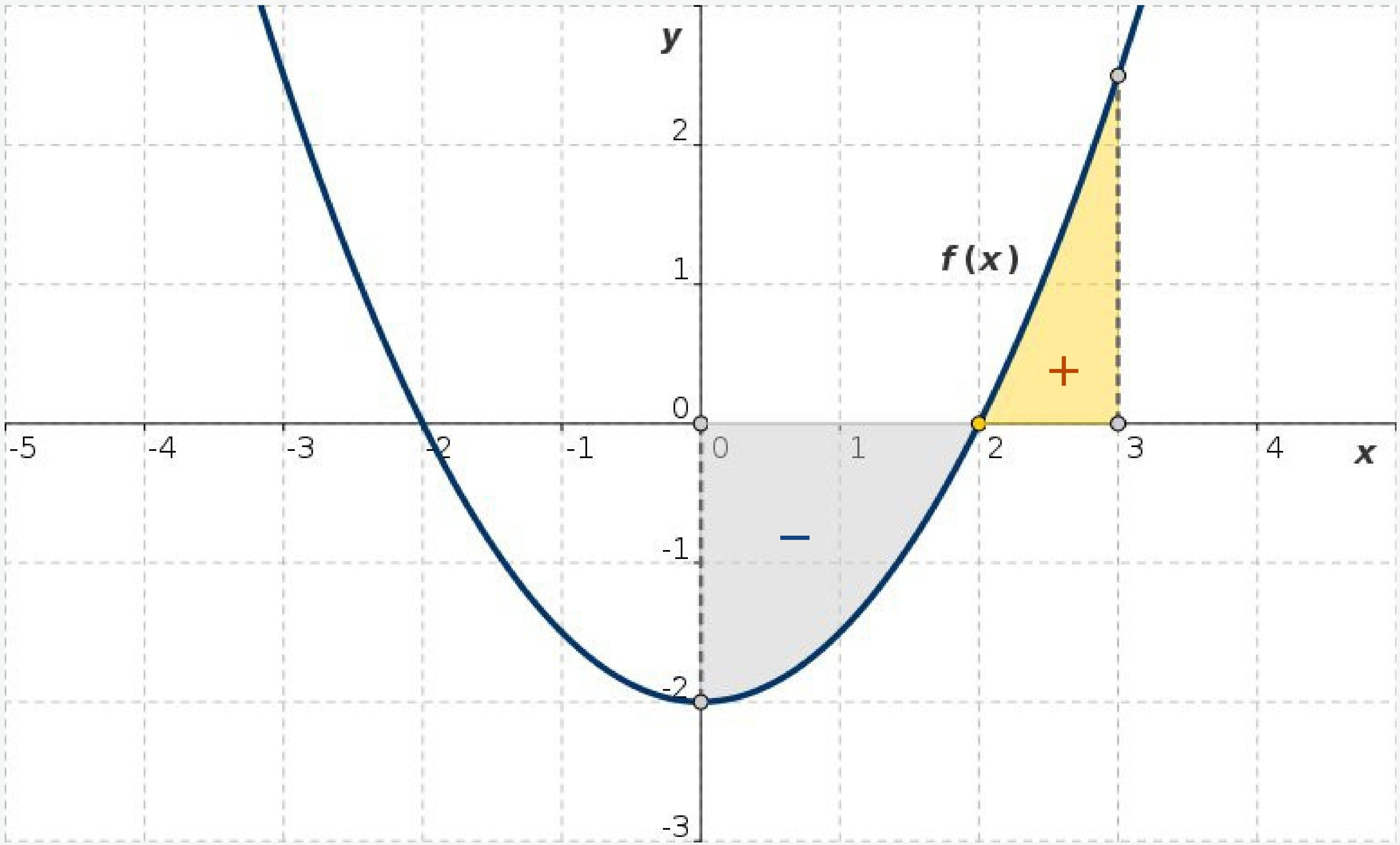

Abb. 2-2b: Die Fläche zwischen der Funktion f (x) = x²/2 - 2 und der x-Achse im Intervall [0, 3]

Nullstelle bei $x = 2$: $[0, 3] = [0, 2] \cup [2, 3]$

$$A = -\int_0^2 \left(0.5\, x^2 - 2 \right) dx + \int_2^3 \left(0.5\, x^2 - 2 \right) dx = \frac{23}{6} \simeq 3.83 \text{ FE}$$

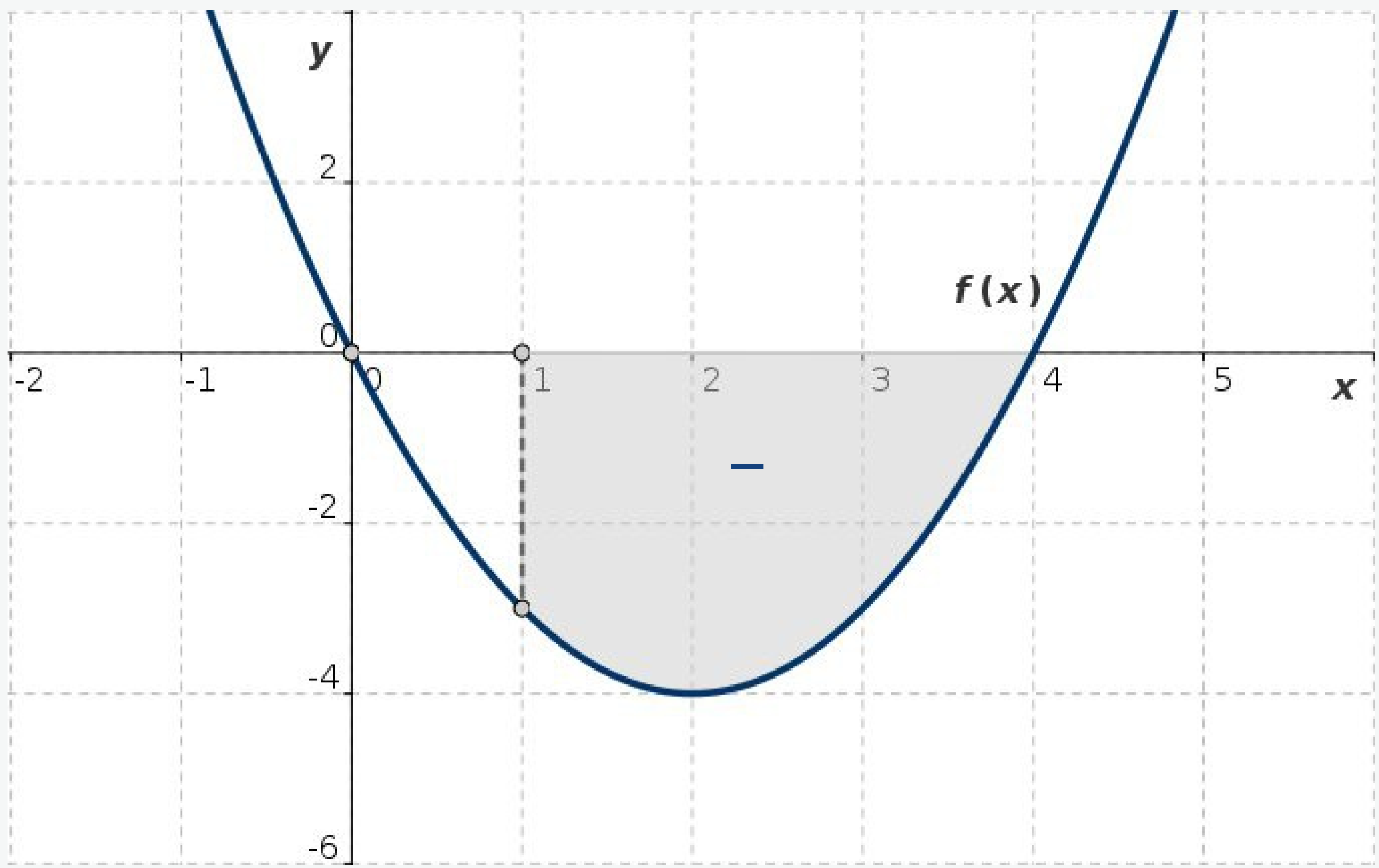

Abb. 2-3: Zur Illustration des bestimmten Integrals der Aufgabe; $f(x) = x^2 - 4x$

$$\int_1^4 \left(x^2 - 4x \right) dx = -9$$

$$A = -\int_1^4 \left(x^2 - 4x \right) dx = 9 \text{ FE}$$

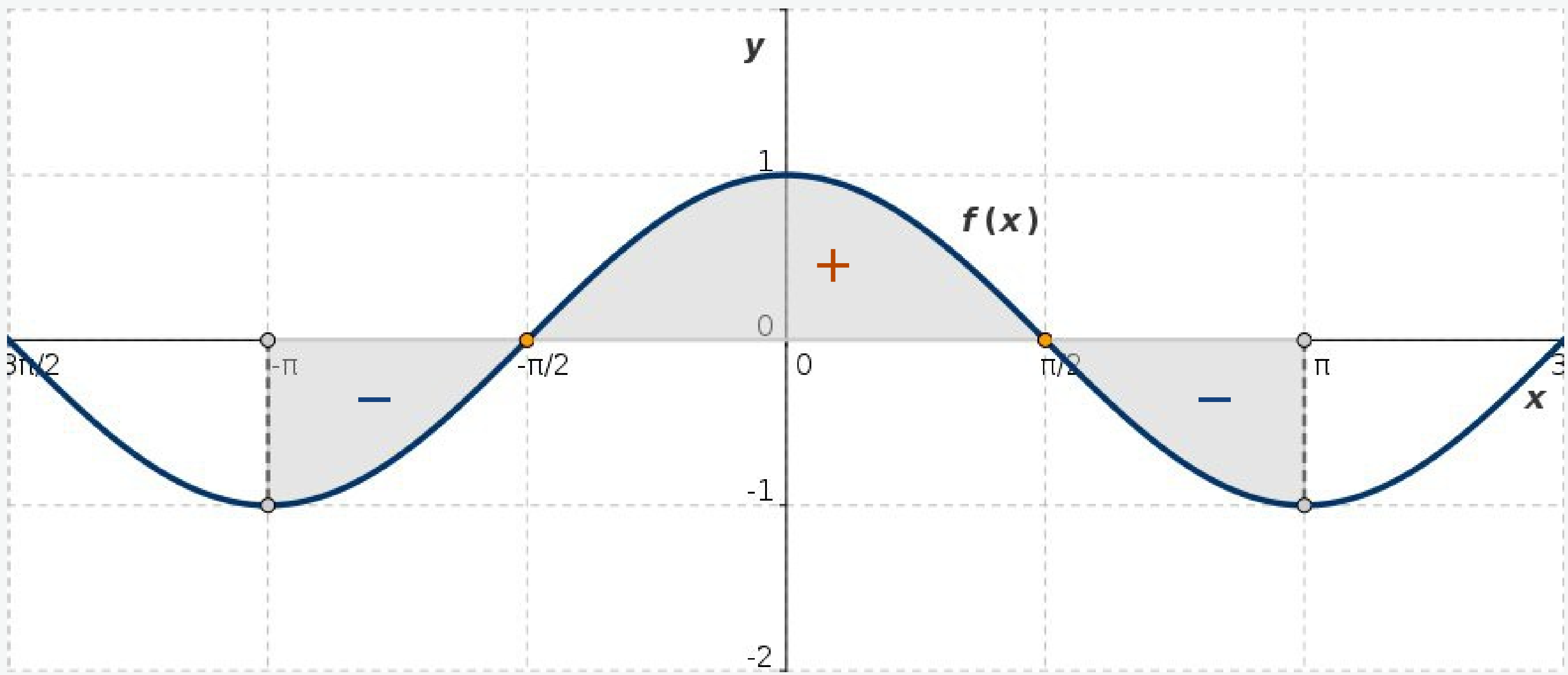

Abb. 2-4a: Zur Illustration des bestimmten Integrals der Aufgabe; f (x) = cos x

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0$$

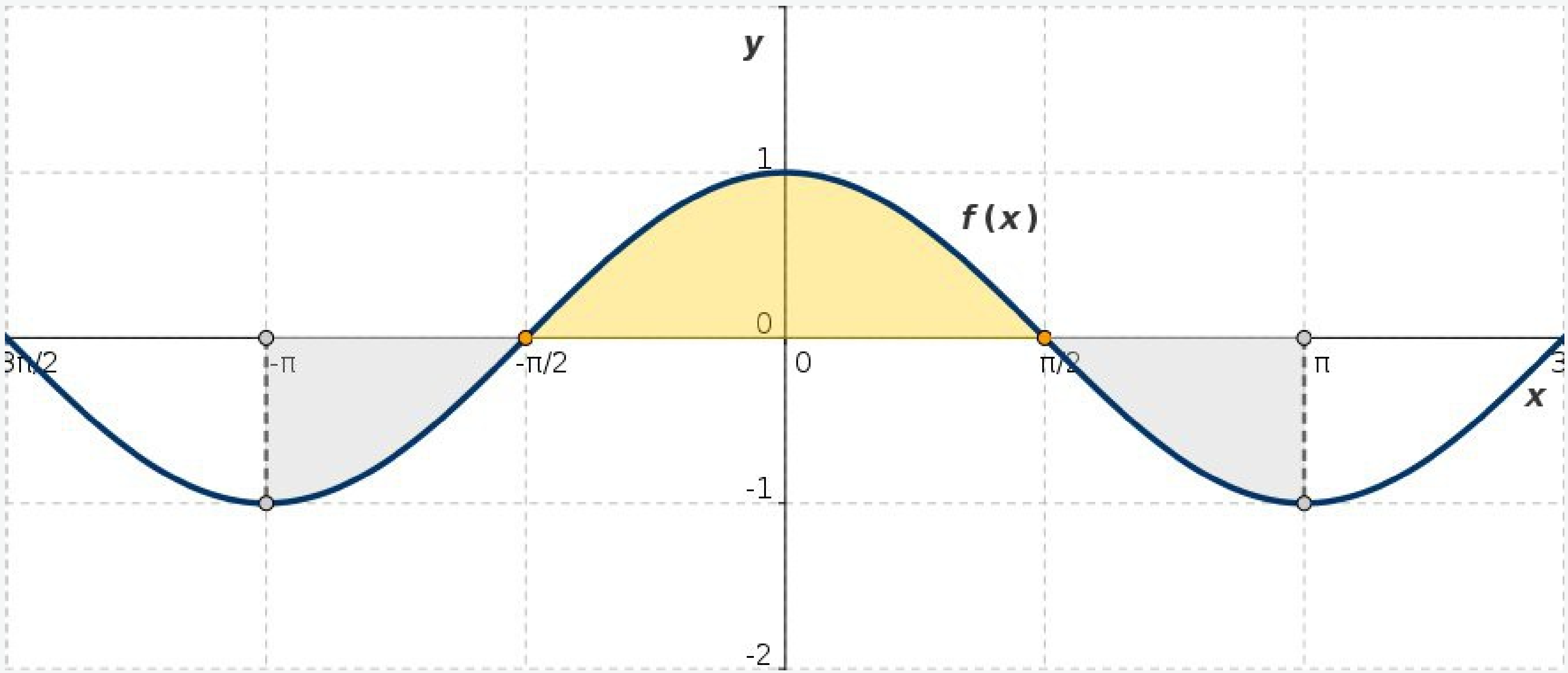

Abb. 2-4b: Die Fläche zwischen der Funktion f (x) = cos x und der x-Achse im Intervall [-π, π]

$$\text{Nullstelle bei:}\quad x = \pm\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad [-\pi\,,\ \pi] = \left[-\pi\,,\ -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}\,,\ \pi\right]$$

$$A = -\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos x\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx = 4$$

Vorgehensweise:

1. Sämtliche Nullstellen der Funktion $f(x)$ im Integrationsintervall $[a, b]$ werden bestimmt.

2. Die Nullstellen teilen den Bereich zwischen a und b in Teilbereiche ein.

3. In jedem dieser Teilbereiche berechnet man den Integralwert und addiert anschließend die Beträge sämtlicher Integrale.

Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)$ im Bereich $I = [a, b]$

Aufgabe 16: $f(x) = x^2 - 5x + 6, \quad I = [1, 4]$

Aufgabe 17: $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - x, \quad I = [-1, 3]$

Aufgabe 18: $f(x) = \dfrac{1}{3} x^3 - x^2 - x + 3, \quad I = [0, 4]$

Aufgabe 19: $f(x) = \sin x \cdot \sin(x/2), \quad I = [0, \pi]$

Aufgabe 20: $f(x) = \sin x \cdot \sin(x/4), \quad I = [0, 2\pi]$

1. Wir bestimmen die Nullstellen der Funktion $f(x)$: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}, \qquad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$I = [1, 4], \quad x_1 = 2 \in I, \quad x_2 = 3 \in I$$

Die Nullstellen teilen den Bereich zwischen a und b in Teilbereiche ein:

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \qquad I_1 = [1, 2], \qquad I_2 = [2, 3], \qquad I_3 = [3, 4]$$

Zeichnen Sie eine grobe Skizze der Funktion.

2. Die Funktion ist auf den Intervallen $[1, 2)$ und $(3, 4]$ positiv und im Intervall $(2, 3)$ negativ.

$$A = I_1 + |I_2| + I_3 = \int_1^2 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_2^3 +$$

$$+ \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_3^4 = \frac{11}{6} \simeq 1.833 \text{ FE}$$

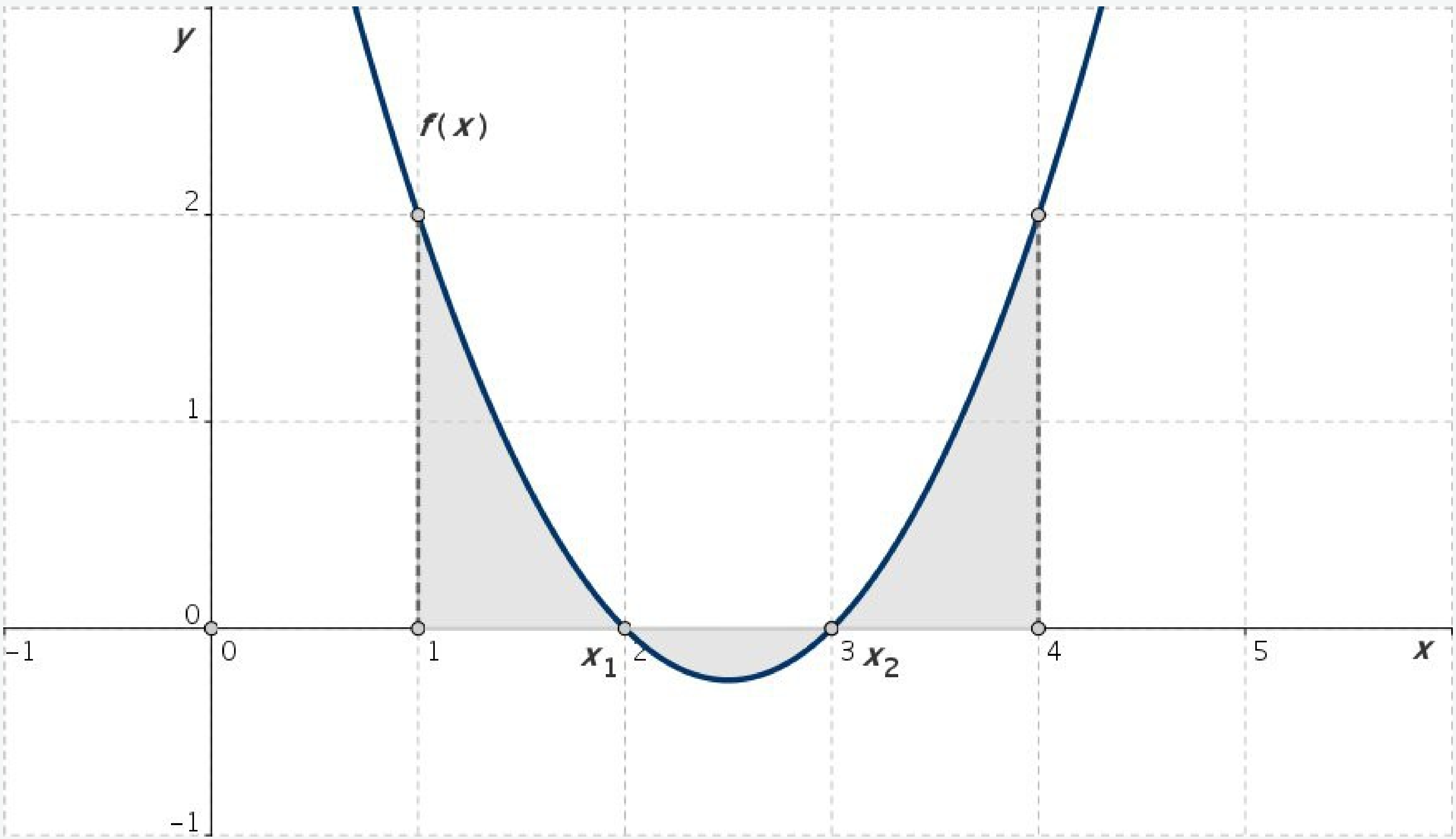

Abb. L16: Die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [1, 4]

1. Wir bestimmen die Nullstellen der Funktion $f(x)$:

$$\frac{x^3}{4} - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{4}\left(x^2 - 4\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2$$

$$I = [-1,\ 3], \qquad x_1 = 0 \in I, \quad x_2 = 2 \in I, \quad x_3 = -2 \notin I$$

Die Nullstellen teilen den Bereich zwischen a und b in Teilbereiche ein:

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_1 = [-1,\ 0], \quad I_2 = [0,\ 2], \quad I_3 = [2,\ 3]$$

Berechnen Sie einige Funktionswerte zwischen und neben den Nullstellen und erstellen Sie eine grobe Skizze der Funktion.

2. Die Funktion ist auf den Intervallen $[-1, 0)$ und $(2, 3]$ positiv und im Intervall $(0, 2)$ negativ.

$$A = I_1 + |I_2| + I_3 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$$

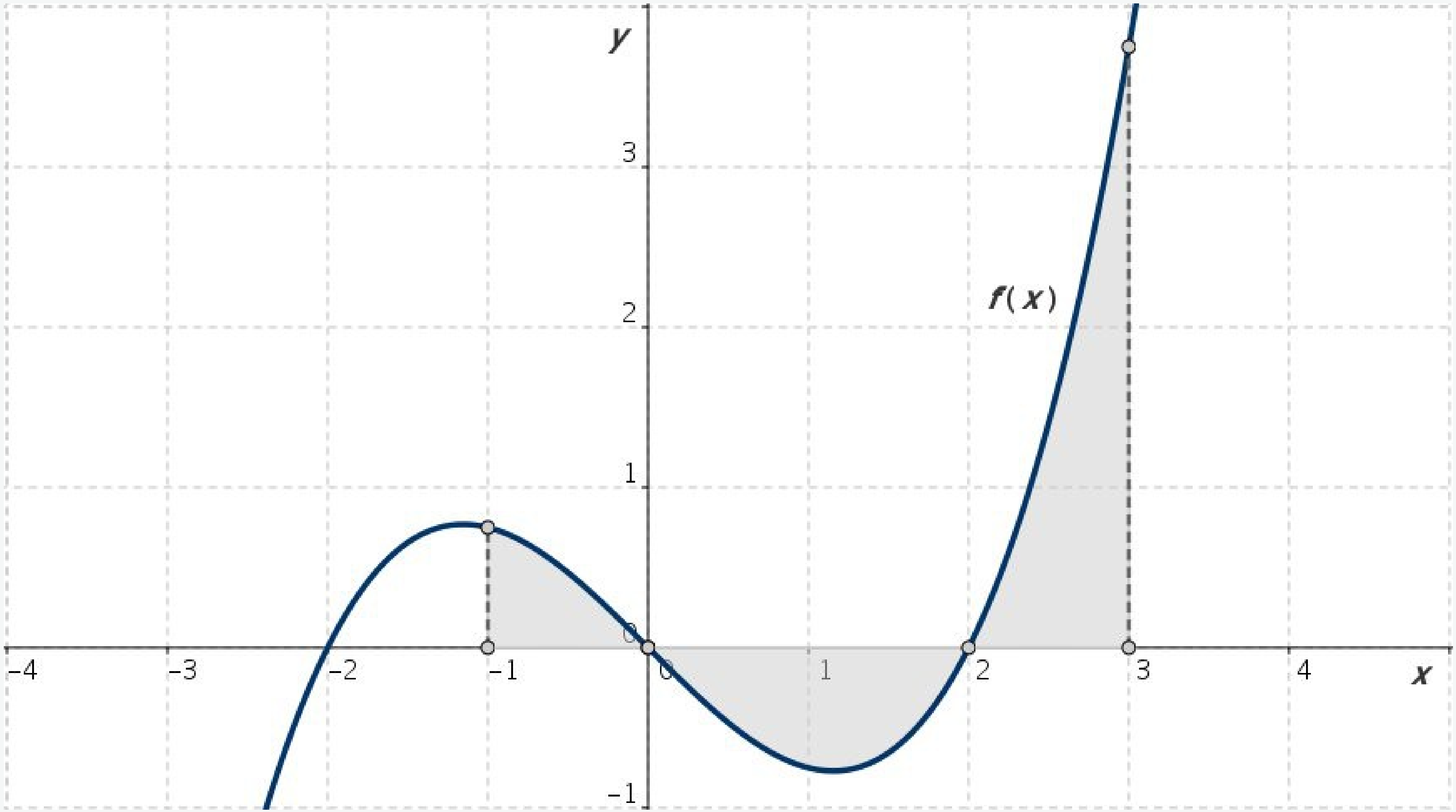

Abb. L17: Die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [-1, 3]

$$A = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} + \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2}\right]_{2}^{3} = \frac{7}{16} + 1 + \frac{25}{16} = 3 \text{ FE}$$

1. Wir bestimmen die Nullstellen der Funktion $f(x)$:

$$\frac{x^3}{3} - x^2 - x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(x-3)(x^2-3) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = \sqrt{3}, \quad x_3 = 3, \quad x_1 \notin I = [0, 4]$$

2. Die Funktion ist auf den Intervallen $[0, \sqrt{3})$ und $(3, 4]$ positiv und im Intervall $(\sqrt{3}, 3)$ negativ.

$$A = I_1 + |I_2| + I_3 = \int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx - \int_{\sqrt{3}}^{3} f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^{\sqrt{3}} - \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{\sqrt{3}}^{3} +$$

$$+ \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_3^4 =$$

$$= \left[2\sqrt{3} - \frac{3}{4}\right] + \left[2\sqrt{3} - 3\right] + \left[4 - 2\,\frac{1}{4}\right] \simeq 4.95 \text{ FE}$$

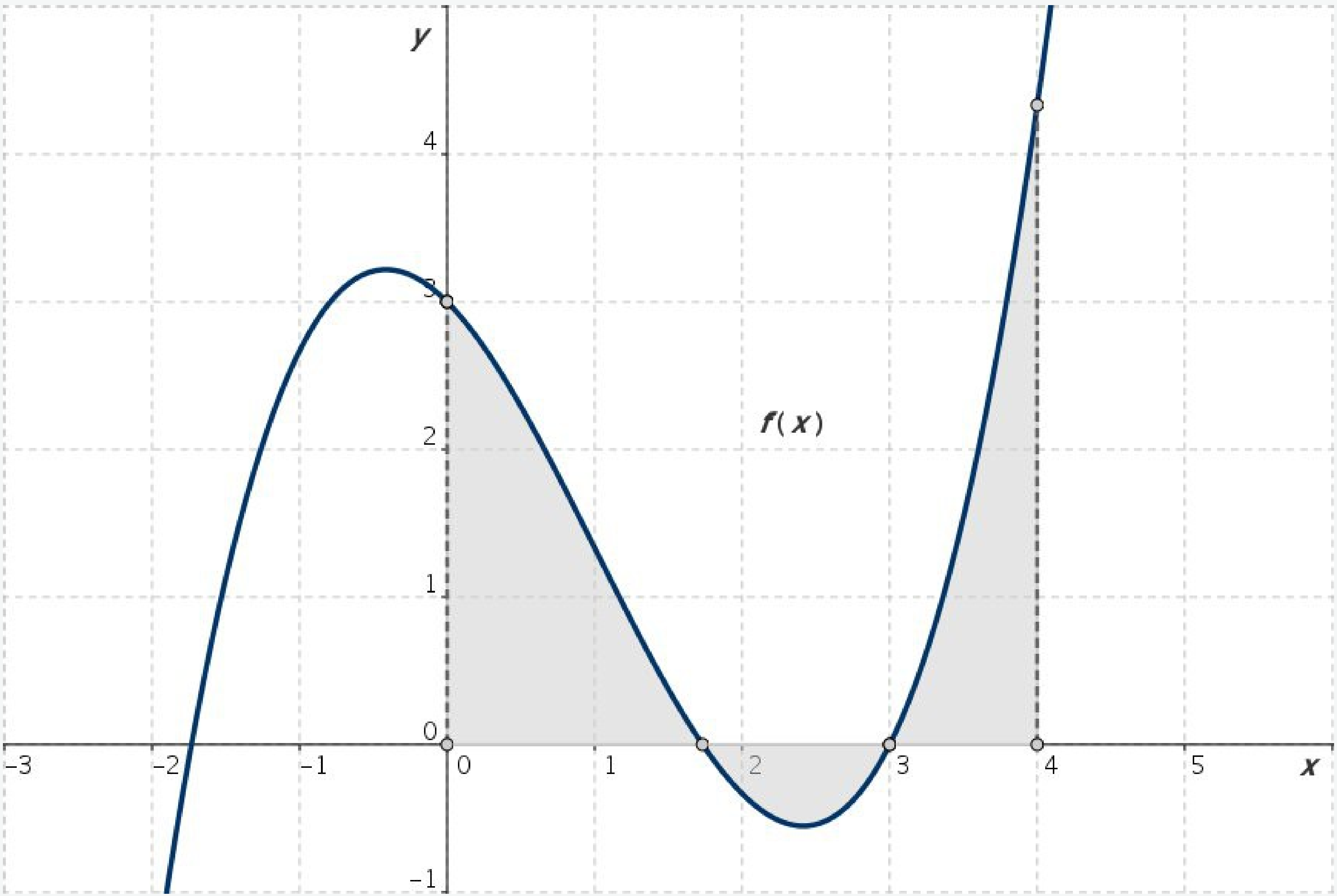

Abb. L18: Die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [0, 4]

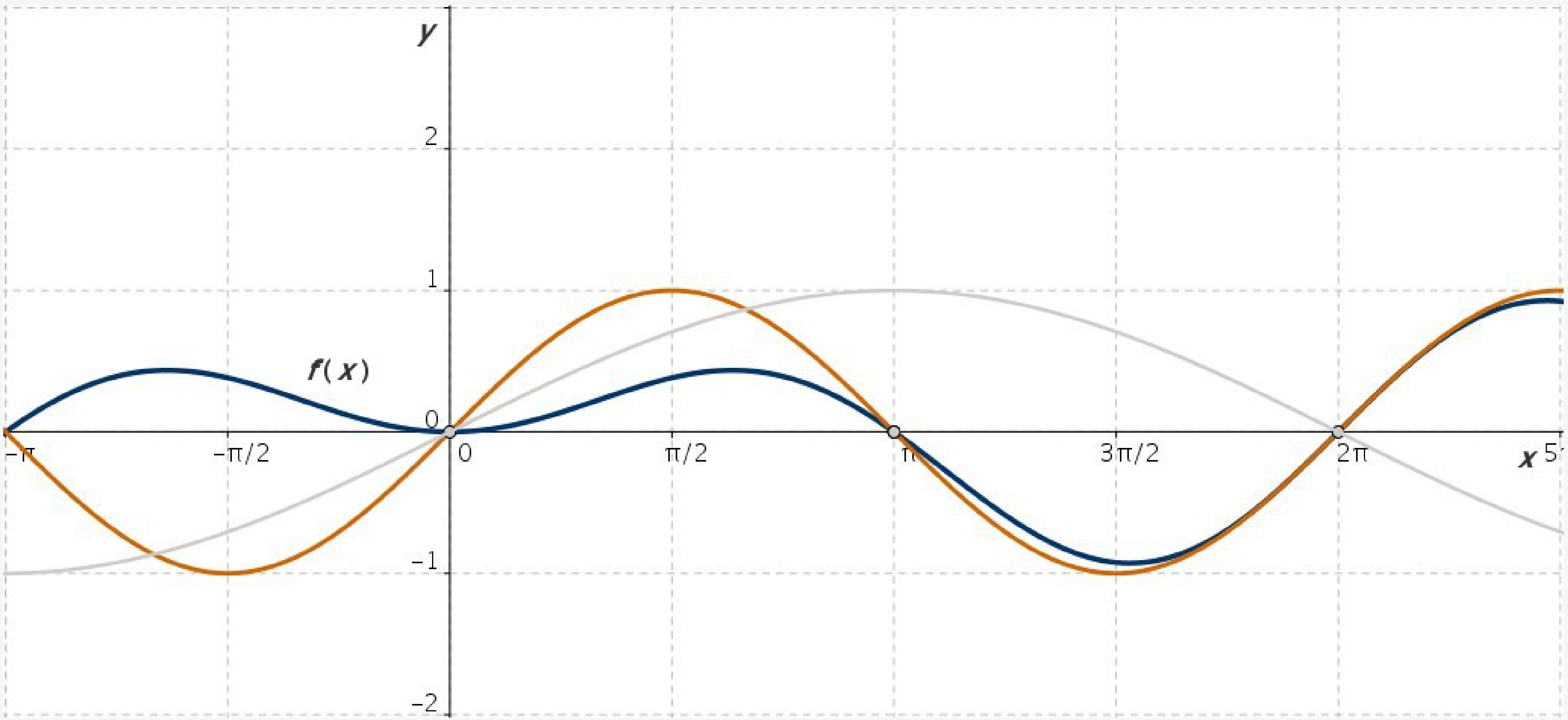

Abb. L19a: Die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[0, \pi]$

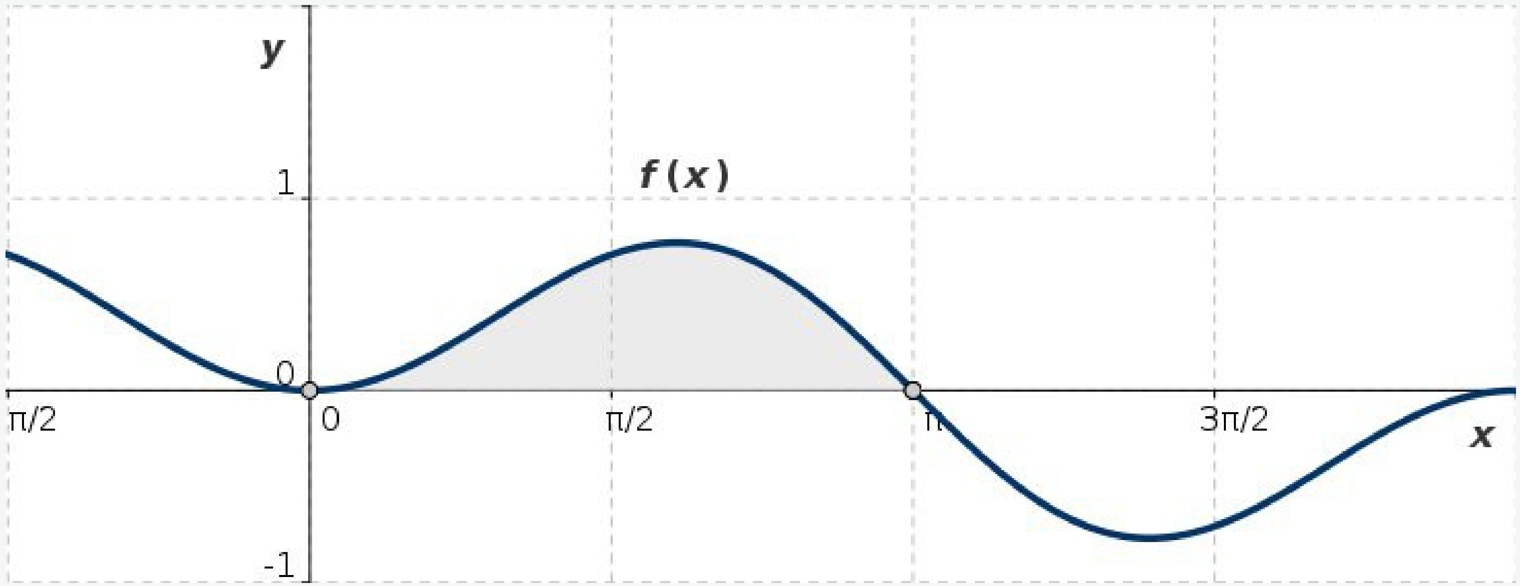

Abb. L19b: Die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[0, \pi]$

$$A = \int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi \sin x \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right) dx =$$

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)}$$

$$= \left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right]_0^\pi = \frac{4}{3} \simeq 1.33 \text{ FE}$$

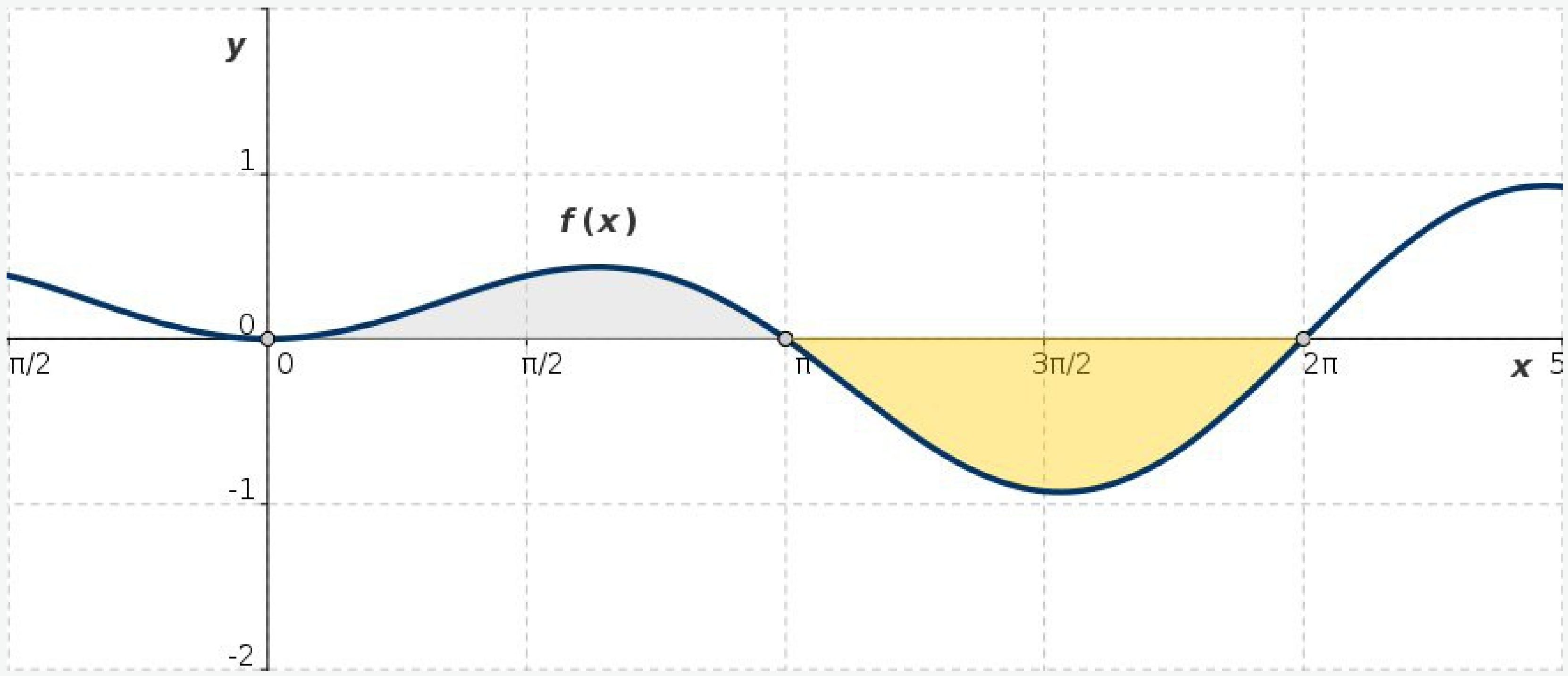

Abb. L20: Die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [0, π]

$$A = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx -$$

$$- \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cdot \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx = \frac{16}{15}\left(\sqrt{2} + 1\right) \simeq 2.58 \text{ FE}$$

$$\int \sin x \cdot \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx = \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3x}{4}\right) - \frac{2}{5} \sin\left(\frac{5x}{4}\right)$$