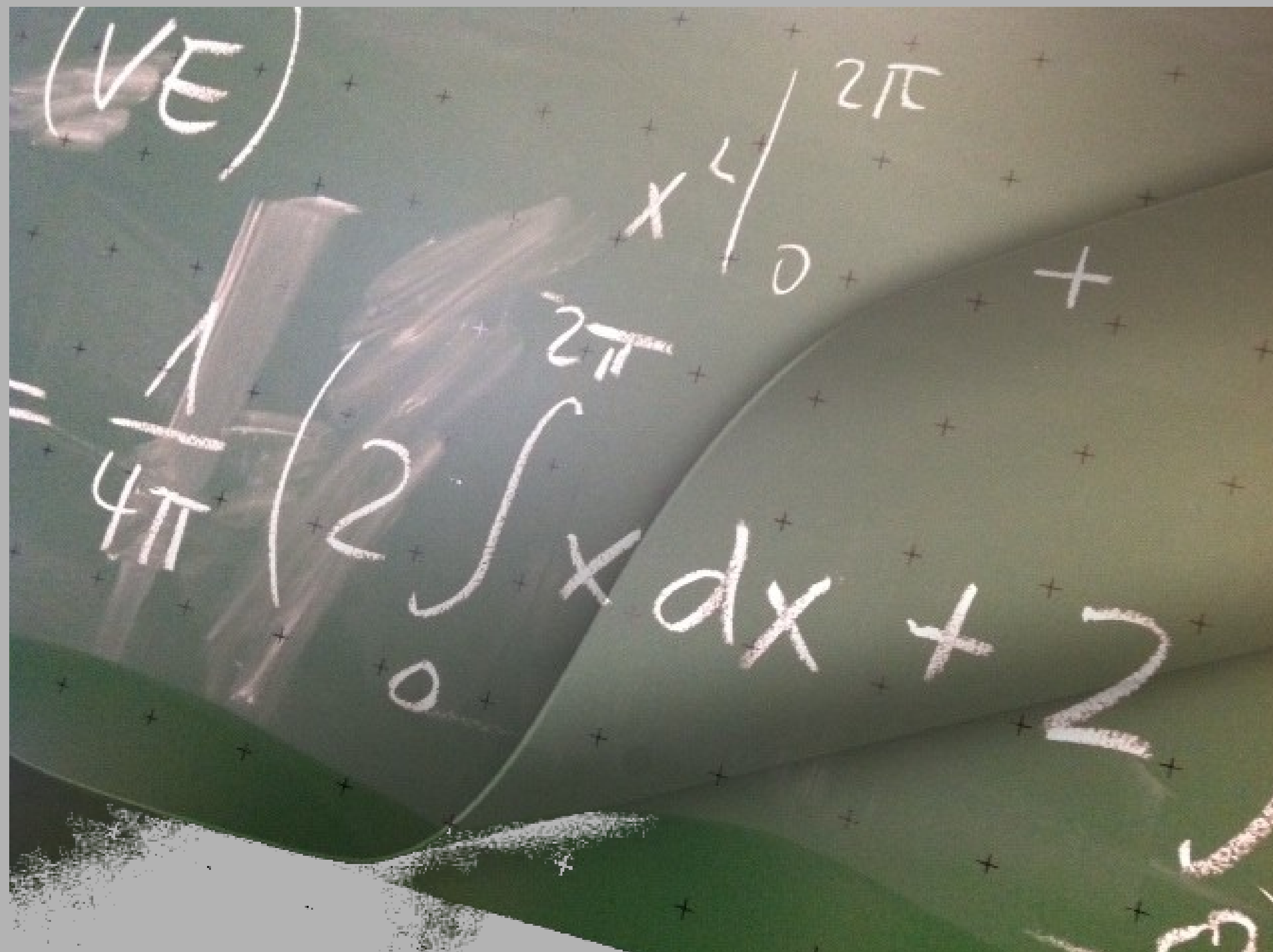


# *Das bestimmte Integral*

Der Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a), \qquad F'(x) = f(x)$$

1. Was bedeutet es, ein bestimmtes Integral zu berechnen?

2. Welche Bedingung muss der Integrand erfüllen, damit das Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

existiert ?

3. Kann die obere Integrationsgrenze kleiner sein als die untere?

1. Was bedeutet es, ein bestimmtes Integral zu berechnen?

– Es bedeutet einen Zahlenwert zu bestimmen.

2. Welche Bedingung muss der Integrand erfüllen, damit das Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

existiert ?

Beispiel 1:

Das bestimmte Integral existiert nicht immer, z.B. existiert das Integral $\int_{-3}^{2} \sqrt{x}\, dx$ nicht, da der Integrationsbereich [-3, 0] nicht zum Definitionsbereich des Integranden gehört.

Beispiel 2:

Das bestimmte Integral $\int_{-\pi}^{\pi} \tan x\, dx$

existiert auch nicht, da $\tan x$ in den Punkten $-\pi/2$ und $\pi/2$ nicht definiert ist.

3. Kann die obere Integrationsgrenze kleiner als die untere sein?

– Ja. Solche Situationen trifft man häufig, z.B.:

$$\int_4^0 (1 - 2x)\, dx = -\int_0^4 (1 - 2x)\, dx = \int_0^4 (2x - 1)\, dx$$

$$\int_{-1}^{2} 4x^2\, dx \overset{1}{=} 4 \int_{-1}^{2} x^2\, dx \overset{2}{=} 4 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} \overset{3}{=} \frac{4}{3} \left[ x^3 \right]_{-1}^{2} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$$

1) Die Konstante 4 wird vor das Integralzeichen gezogen.

2) Das Integral einer Potenzfunktion wird nach der Formel

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ berechnet.

3) Die durch die Integration entstandene Konstante 1/3 kann man als separaten Faktor behandeln. Wir schreiben die Funktion von $x$ in Klammern, um zu betonen, dass die Integrationsgrenzen sich nur auf die Funktion beziehen. Diese Form erleichtert die Rechnung:

$$\left[ x^3 \right]_{-1}^{2} = 2^3 - (-1)^3 = 8 + 1 = 9$$

## Beispiel 4:

$$\int_1^6 \frac{5\,dx}{x} = 5 \int_1^6 \frac{dx}{x} = 5\,\left[\ln x\right]_1^6 = 5\left(\ln 6 - \ln 1\right) = 5 \ln 6$$

## Beispiel 5:

$$\int_{-1}^{2} (3 + 2x - 6x^2)\,dx = \int_{-1}^{2} 3\,dx + \int_{-1}^{2} 2x\,dx - \int_{-1}^{2} 6x^2\,dx =$$

$$= 3\int_{-1}^{2} dx + 2\int_{-1}^{2} x\,dx - 6\int_{-1}^{2} x^2\,dx = 3\left[x\right]_{-1}^{2} + \frac{2}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{2} - \frac{6}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{2} =$$

$$= 3\left[x\right]_{-1}^{2} + \left[x^2\right]_{-1}^{2} - 2\left[x^3\right]_{-1}^{2} =$$

$$= 3\left(2 - (-1)\right) + \left(2^2 - (-1)^2\right) - 2\left(2^3 - (-1)^3\right) = -6$$

$$\int_{-1}^{2} (3 + 2x - 6x^2)\,dx = \left[3x + x^2 - 2x^3\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(3\cdot 2 + 2^2 - 2\cdot 2^3\right) - \left(3\cdot(-1) + (-1)^2 - 2\cdot(-1)^3\right) = -6$$

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$I_a = \int_1^e \frac{dx}{x}, \qquad I_b = \int_1^2 e^x \, dx$$

$$I_a = \int_1^e \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$I_b = \int_1^2 e^x \, dx = e^2 - e = e(e-1)$$