Integrale

Der Flächeninhalt krumm begrenzter Flächen, das Volumen von beliebig geformtem Körpern, die Länge von Kurven, die bei Bewegung in einem Kraftfeld geleistete Arbeit, der Fluss einer Strömung durch ein Flächenstück – all diese Dinge lassen sich mit einem Konzept beschreiben und berechnen: dem Integral.

Neben der Differentialrechnung ist die Integralrechnung die zweite ragende Säule der Analysis. Die Differentialrechnung befasst sich in erster Linie mit dem Verhalten im Kleinen, also mit dem lokalen Änderungsverhalten von Funktionen. Die Integralrechnung behandelt Aspekte im Großen. Das Integrieren lässt sich als Umkehrung des Differenzierens auffassen.

Differentiation: $y = f(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x)$

Integration: $y' = f'(x) \quad \rightarrow \quad y = f(x)$

In einigen Fällen ist es möglich eine Funktion zu bestimmen, wenn ihre Ableitung bekannt ist. Wir werden das im Folgenden zeigen.

Falls die Ableitung der Funktion $f(x)$ gleich Null für alle x im Interall I ist, $f'(x) = 0$, dann hat $f(x)$ einen konstanten Wert für alle x im Interall I : $f(x) = C$.

$$x_1 < x_2, \qquad x_1, \; x_2 \in I$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} = 0$$

$$\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta x \to 0, \qquad \Delta x \neq 0$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} \bigg|_{\Delta x \neq 0} = 0, \qquad f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

Falls $f_1'(x) = f_2'(x)$ für alle x im Interall I ist, dann gibt es eine Konstante C, so dass

$$f_1(x) = f_2(x) + C$$

Diese Eigenschaft hat folgende geometrische Interpretation: die Funktionen mit gleicher Ableitung werden graphisch als eine Menge von Funktionen dargestellt, indem man alle Kurven aus einer einzigen durch ein vertikales Verschieben bildet.

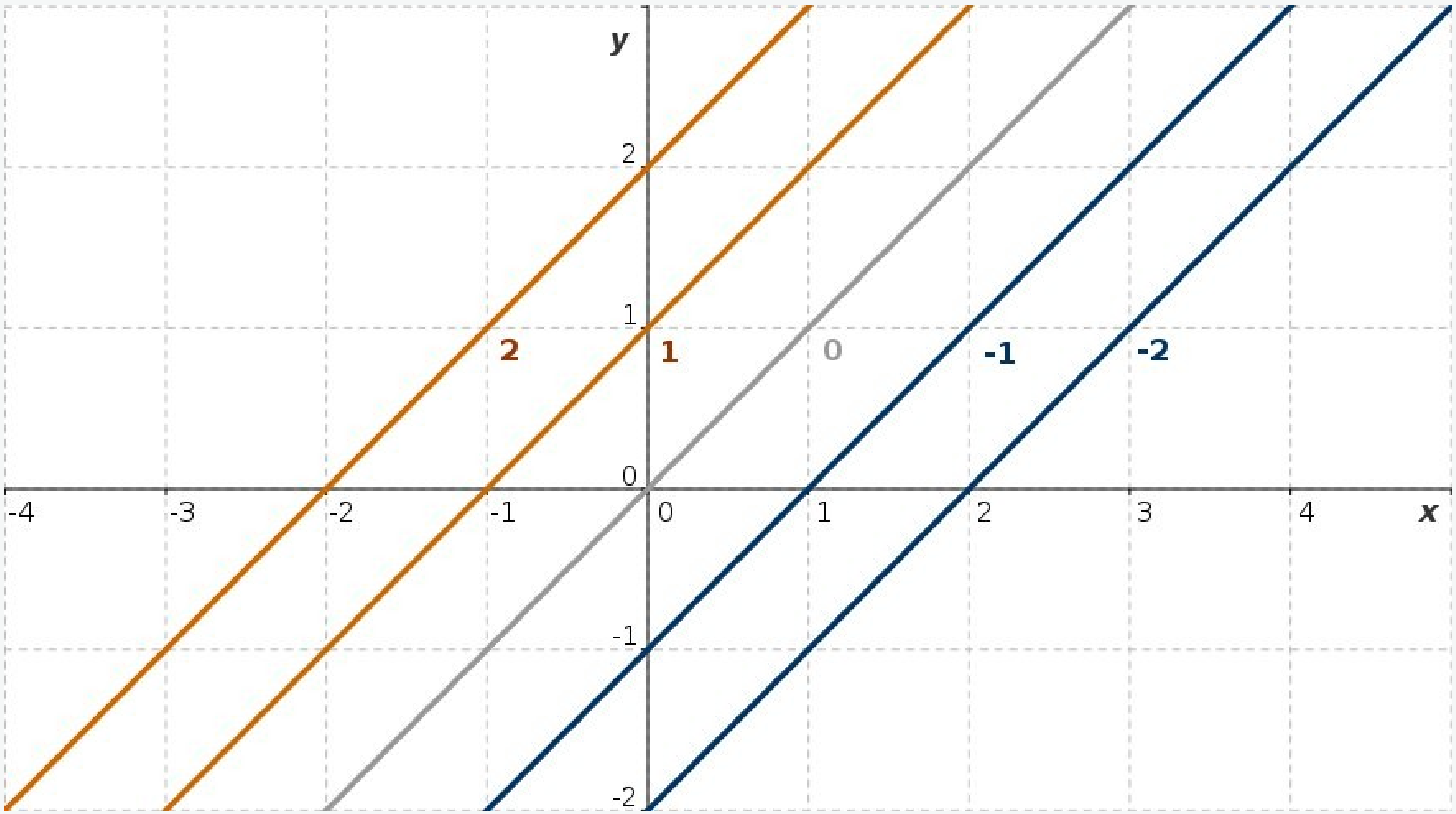

Abb. B1: Geradenschar $y = x + C$ $(C = -2, -1, 0, 1, 2)$

Gegeben: $y' = 1$

Gesucht: Funktionen $y = f(x)$ mit der 1. Ableitung $y' = 1$

Lösung: $y' = \frac{d}{dx}(x + C) = 1$

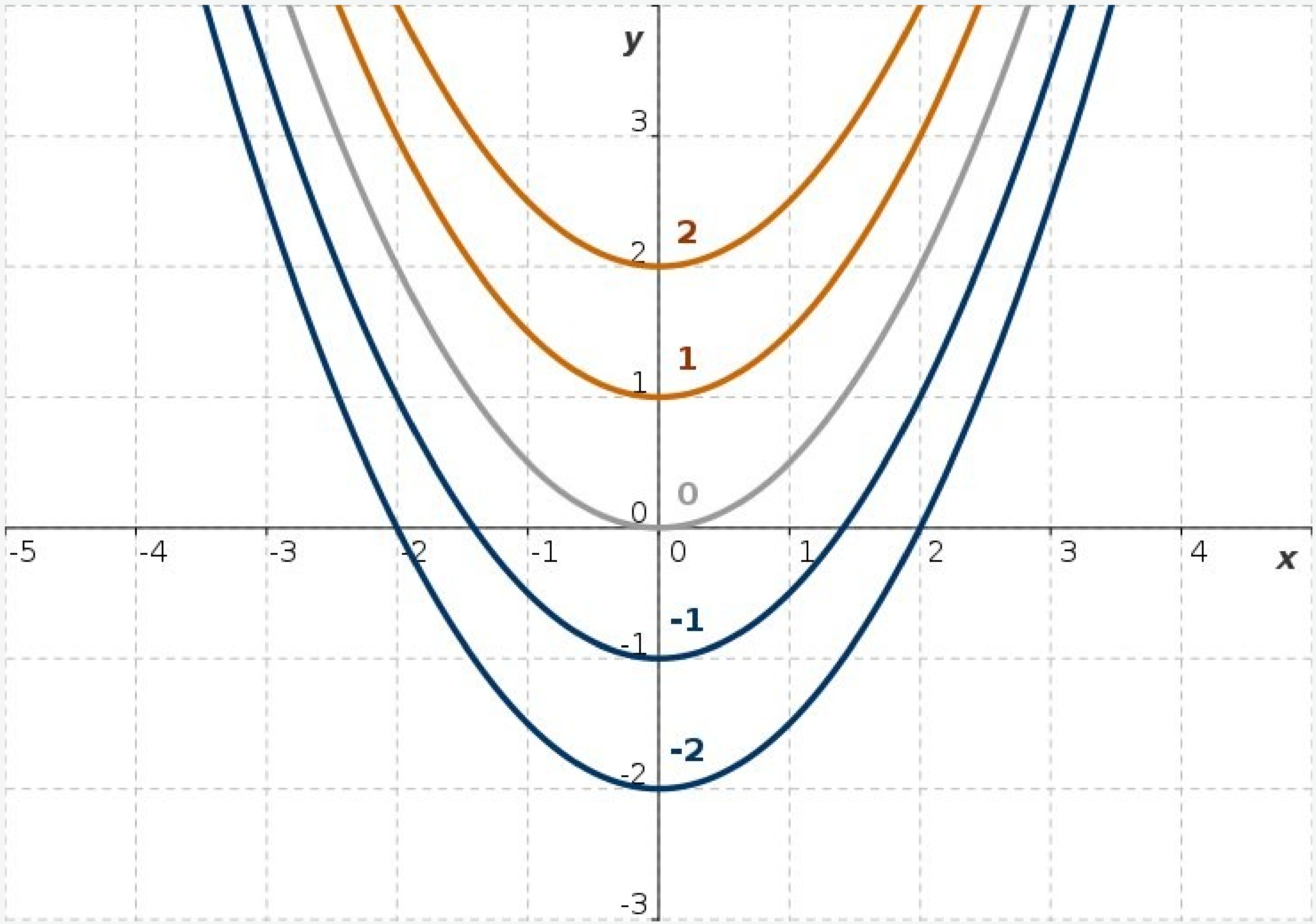

Abb. B2: Kurvenschar $y = x^2 / 2 + C$ (C = -2, -1, 0, 1, 2)

Gegeben: $y' = x$ Gesucht: Funktionen $y = f(x)$ mit der 1. Ableitung $y' = x$

Lösung: $$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x$$

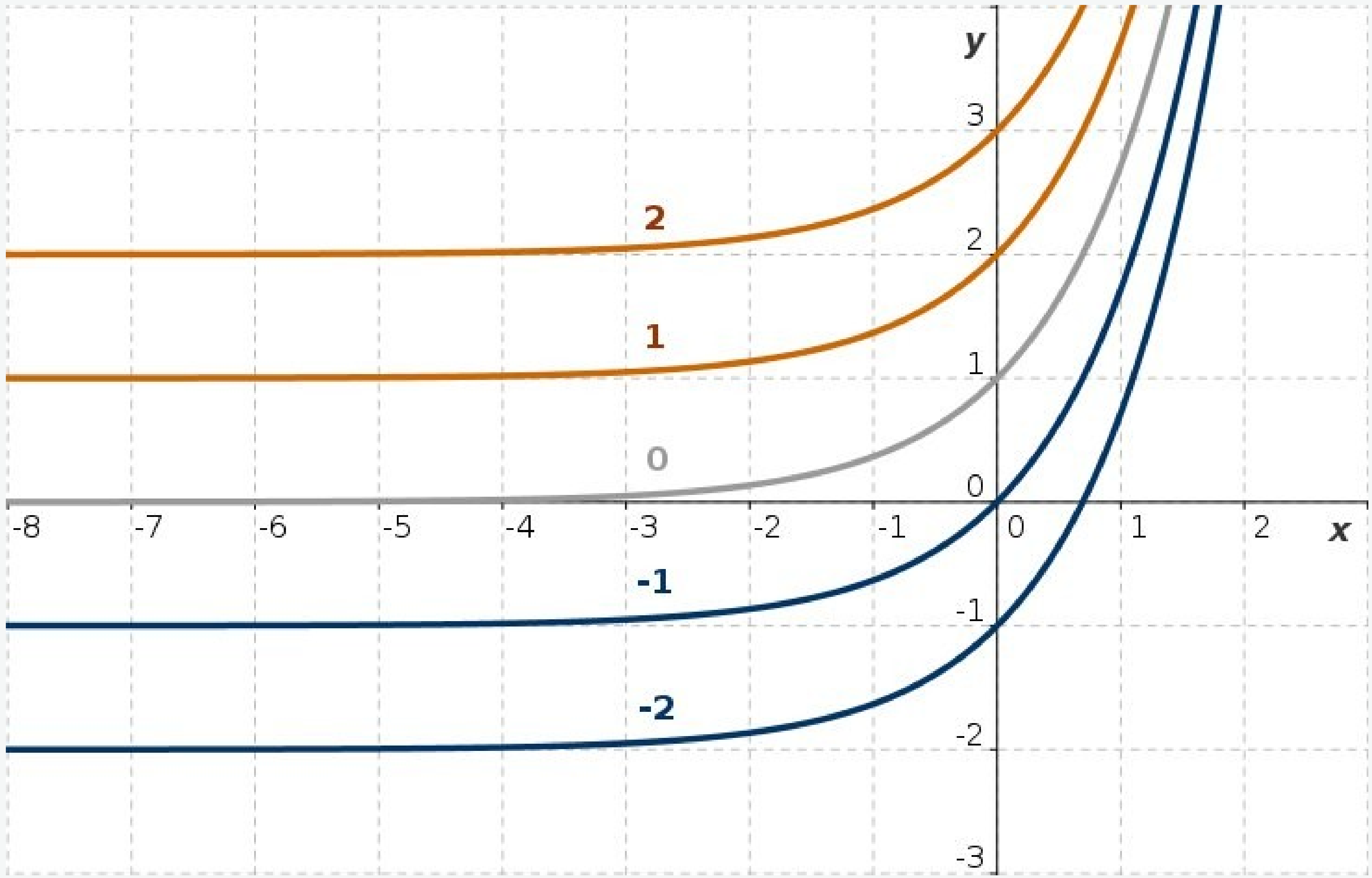

Abb. B3: Kurvenschar $y = exp(x) + C$ (C = -2, -1, 0, 1, 2)

Gegeben: $y' = exp\,(x)$ Gesucht: Funktionen $y = f\,(x)$ mit der 1. Ableitung $y' = exp\,(x)$

Lösung: $y\,' = \dfrac{d}{dx}\,(e^{\,x} + C) = e^{\,x}$

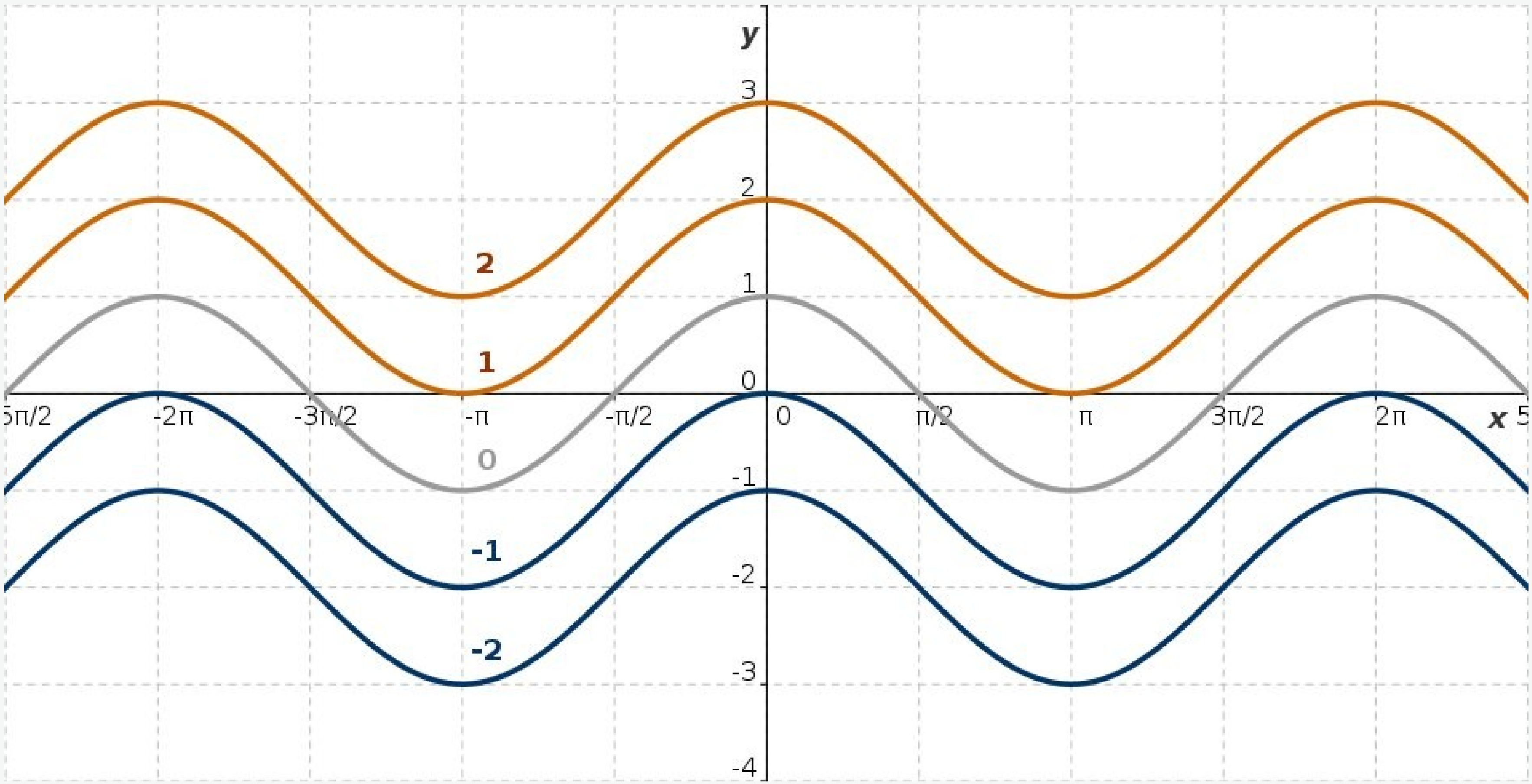

Abb. B4: Kurvenschar $y = \cos x + C$ (C = -2, -1, 0, 1, 2)

Gegeben: $y' = -\sin x$

Gesucht: Funktionen $y = f(x)$ mit der 1. Ableitung $y' = -\sin x$

Lösung: $y' = \dfrac{d}{dx}(\cos x + C) = -\sin x$

Definition:

Eine Funktion $F(x)$ heißt eine Stammfunktion zu $f(x)$, wenn gilt $F'(x) = f(x)$

- Es gibt zu jeder stetigen Funktion $f(x)$ unendlich viele Stammfunktionen
- Zwei beliebige Stammfunktionen zu einer stetigen Funktion $f(x)$ unterscheiden sich durch eine additive Konstante:

$$F_1(x) - F_2(x) = const$$

Definition:

Das Aufsuchen sämtlicher Stammfunktionen $F(x)$ zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ wird als Integration bezeichnet: $F'(x) = f(x)$.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,, \qquad F'(x) = f(x)\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\int f(x)\,dx$ – unbestimmtes Integral

$F(x)$ – Stammfunktion

$f(x)$ – Integrand

C – Integrationskonstante

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\big(F(x) + C\big) = f(x)$$

$$\int C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$$

$$f'(x) = (k+1) \cdot x^k,$$

$$\int (k+1) \cdot x^k\,dx = (k+1) \int x^k\,dx = x^{k+1} + C$$

$$\boxed{\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \qquad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq -1}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C}$$

Aufgabe 1:

$$a)\quad \int \left(3\,x^{-3} + \frac{2}{x^5} \right) dx$$

$$b)\quad \int \left(3\,\sqrt{x} + \frac{2}{x^4} \right) dx$$

$$c)\quad \int \left(\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{4 - 3\,x^2}{x^2} \right) dx$$

$$d)\quad \int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{3}{\sqrt{x}} - x\,\sqrt[3]{x} \right) dx$$

Aufgabe 2:

$$a)\quad \int \left(2\,\sqrt[3]{x} - 3\,x^2\,\sqrt[3]{x} + x\,\sqrt[3]{x^2} \right) dx$$

$$b)\quad \int \frac{\sqrt{x} - 2\,\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\, dx$$

$$a)\ \int \left(3\,x^{-3} + \frac{2}{x^5}\right) dx = 3 \int x^{-3}\, dx + 2 \int x^{-5}\, dx = -\frac{3}{2\,x^2} - \frac{1}{2\,x^4} + C$$

$$b)\ \int \left(3\,\sqrt{x} + \frac{2}{x^4}\right) dx = 3 \int x^{1/2}\, dx + 2 \int x^{-4}\, dx = 2\,x^{3/2} - \frac{2}{3\,x^3} + C$$

$$c)\ \int \left(\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{4 - 3\,x^2}{x^2}\right) dx = \frac{2}{3} \int x^{1/2}\, dx + 4 \int x^{-2} - 3 \int dx =$$

$$= \frac{4}{9}\,x^{3/2} - 3\,x - \frac{4}{x} + C = \frac{4}{9}\,x\sqrt{x} - 3\,x - \frac{4}{x} + C$$

$$d)\ \int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{3}{\sqrt{x}} - x\,\sqrt[3]{x}\right) dx = \frac{1}{2} \int x^{1/2}\, dx + 3 \int x^{-1/2}\, dx - \int x^{4/3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,x^{3/2} + 6\sqrt{x} - \frac{3}{7}\,x^{7/3} + C = \frac{1}{3}\,x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} - \frac{3}{7}\,x^2\,\sqrt[3]{x} + C$$

Integration von Potenzfunktionen: Lösung 2

$$a)\ \int \left(2\sqrt[3]{x} - 3x^2\sqrt[3]{x} + x\sqrt[3]{x^2}\right)dx = \frac{3}{2}x^{4/3} - \frac{9}{10}x^{10/3} + \frac{3}{8}x^{8/3} =$$

$$= \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} - \frac{9}{10}x^3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} + C$$

$$b)\ \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \frac{4}{5}x^{5/4} - \frac{24}{17}x^{17/12} + \frac{4}{3}x^{3/4} =$$

$$= \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$$

Die Exponentialfunktion:

$$f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x$$

$$\boxed{\int e^x \, dx = e^x + C}$$

Verwendung einer anderen Basis *a*:

$$f(x) = a^x, \qquad f'(x) = a^x \ln a, \qquad \int a^x \ln a \, dx = a^x + C_1$$

$$\boxed{\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1}$$

$$a)\ \int (e^x - 3^x)\, dx$$

$$b)\ \int \ln 4 \cdot 2^x\ dx$$

$$c)\ \int (e^{\ln 2} + 4\, e^x)\, dx$$

$$d)\ \int \left(e^{\,x + \ln 4} + \frac{1}{3}\, e^{\ln 3} \right) dx$$

$$a)\ \int (e^x - 3^x)\, dx = e^x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$b)\ \int \ln 4 \cdot 2^x\, dx = 2 \ln 2 \int 2^x\, dx = 2^{x+1} + C$$

$$c)\ \int (e^{\ln 2} + 4e^x)\, dx = \int (2 + 4e^x)\, dx = 2x + 4e^x + C$$

$$d)\ \int \left(e^{x + \ln 4} + \frac{1}{3} e^{\ln 3}\right) dx = \int (4e^x + 1)\, dx =$$

$$= 4e^x + x + C$$

$$\int \sin(k\,x)\,d\,x = -\frac{\cos(k\,x)}{k} + C\,, \qquad \left(-\frac{\cos(k\,x)}{k}\right)' = \sin(k\,x)$$

$$\int \cos(k\,x)\,d\,x = \frac{\sin(k\,x)}{k} + C\,, \qquad \left(\frac{\sin(k\,x)}{k}\right)' = \cos(k\,x)$$

$a)\quad \int \sin(2\,x)\,d\,x$

$b)\quad \int \cos\left(\frac{x}{2}\right)d\,x$

$c)\quad \int \sin^2 x\;d\,x$

$d)\quad \int \cos^2 x\;d\,x$

$e)\quad \int \frac{x^2\,dx}{1 + x^2}$

$$a)\ \int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

$$b)\ \int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$c)\ \int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

$$d)\ \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

$$e)\ \int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int \frac{(x^2+1-1)\,dx}{1+x^2} = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x + C$$