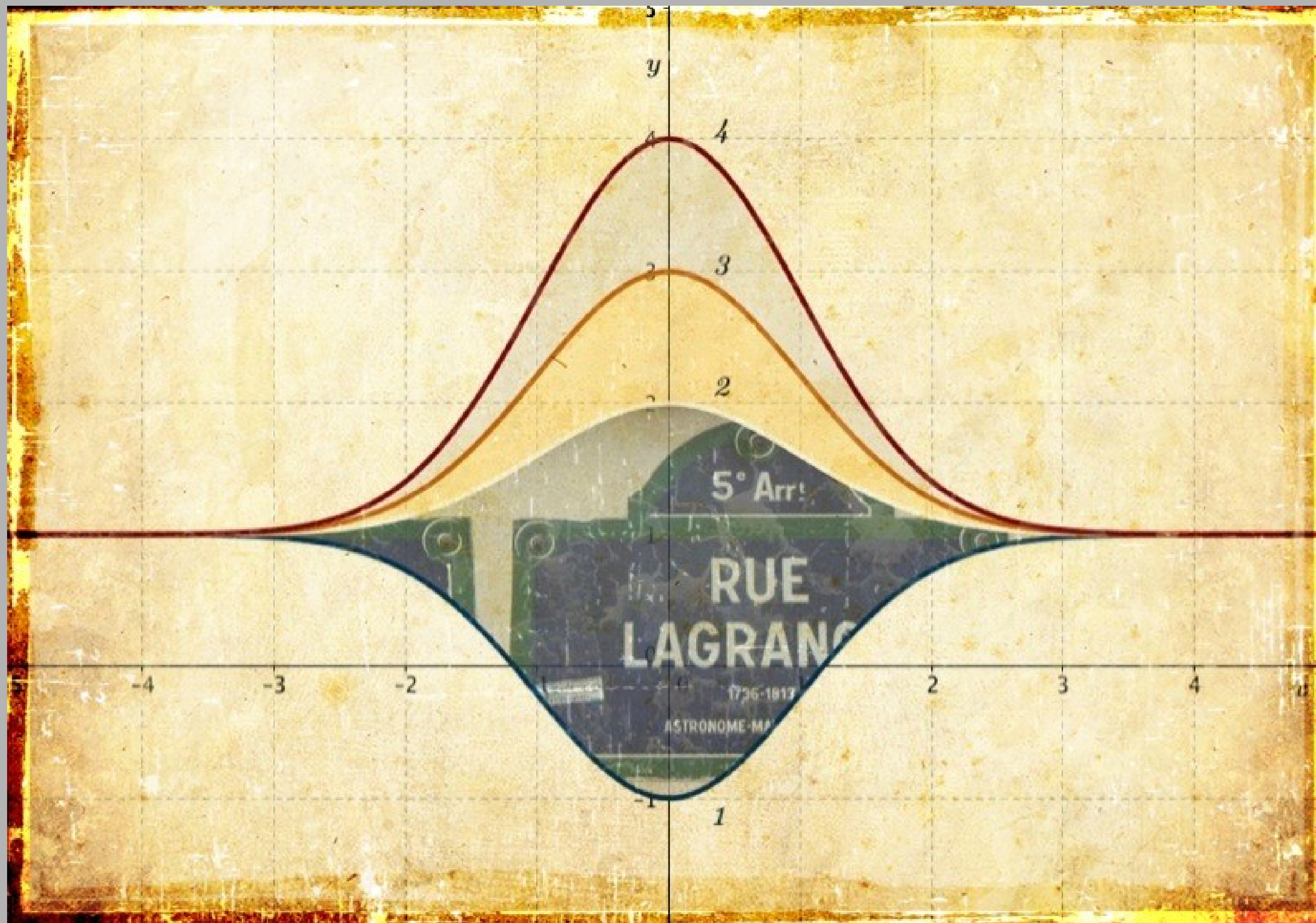

Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Variation der Konstanten

Lösen Sie die folgenden linearen DGL 1. Ordnung durch Variation der Konstanten und vergleichen Sie entsprechende Lösungen *a* und *b*:

Aufgabe 5: $a)\ \ y' + x\,y = x, \quad y(0) = 3$

$b)\ \ y' + x\,y = 2x, \quad y(0) = 3$

Aufgabe 6: $y' + x\,y = x + n\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad y(0) = 3$

Aufgabe 7: $y' + x\,y = x + n\,x^3, \quad y(0) = 1$

Aufgabe 8: $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = 1, \quad y(\pi) = 2$

Variation der Konstanten: Aufgaben 9, 10

Aufgabe 9:

$$a)\quad y' + 2y = 4 \cdot e^{5x}, \qquad y(0) = 1, \qquad y(0) = 2$$

$$b)\quad y' + 2y = 4 \cdot e^{2x}, \qquad y(0) = 1, \qquad y(0) = -1$$

Aufgabe 10:

$$a)\quad y' + 2xy = 2x\, e^{-x^2}, \qquad y(0) = 1, \qquad y(0) = -1$$

$$b)\quad y' + 2xy = 2x\, e^{-2x^2}, \qquad y(0) = 1, \qquad y(0) = -1$$

$$y' + x\,y = n\,x, \qquad a)\; n = 1, \qquad b)\; n = 2$$

$$y' + x\,y = 0, \quad \frac{dy}{y} = -x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int x\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|\,y\,| = -\frac{x^2}{2} + \ln|\,C\,| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad y = C\;e^{-x^2/2}$$

$$y = C\;e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \rightarrow \quad y = C(x)\;e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$C'(x)\;e^{-\frac{x^2}{2}} + C(x)\,(-x)\;e^{-\frac{x^2}{2}} + x\;C(x)\;e^{-\frac{x^2}{2}} = n\,x$$

$$C'(x) = n\,x\;e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$C(x) = n\int x\;e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = n\int e^u\,du = n\,e^u + C_1 = n\,e^{\frac{x^2}{2}} + C_1$$

$$y = C(x)\;e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(n\,e^{\frac{x^2}{2}} + C_1\right)e^{-\frac{x^2}{2}} = n + C_1\;e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Allgemeine Lösung 5: $y = n + C\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad a)\ n = 1, \quad b)\ n = 2$

Allgemeine Lösung 5a: $y = 1 + C\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

Spezielle Lösung 5a: $y(0) = 3: \quad y_{5a} = 1 + 2\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (C = 2)$

Allgemeine Lösung 5b: $y = 2 + C\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

Spezielle Lösung 5b: $y(0) = 3: \quad y_{5b} = 2 + e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (C = 1)$

Die Abbildung auf der nächsten Seite: Die Integralkurven der DGL 5a entsprechen folgenden Werten der Integrationskonstante und der Parameter

$$y = 1 + C\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad 1)\ C = -2, \quad 2)\ C = 1, \quad 3)\ C = 2, \quad 4)\ C = 3$$

Die Lösungen 5b unterscheiden sich von den Lösungen 5a um eine additive Konstante und zwar gewinnt man die Integralkurven 5b aus den Integralkurven 5a durch Verschieben um eine Einheit in y-Richtung.

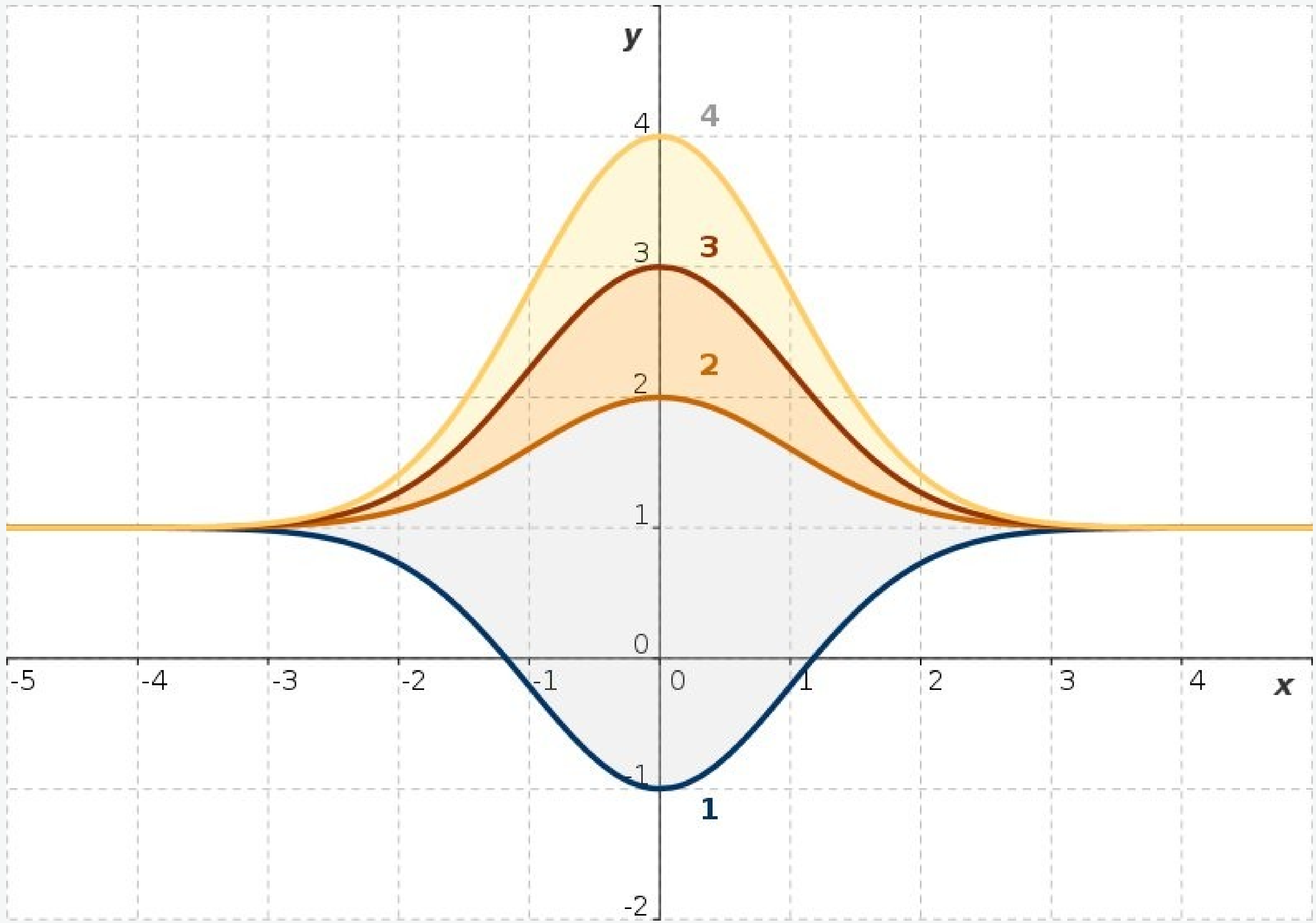

Abb. L5: Integralkurven der DGL 5a


3
2
RUE

$$y' + x\,y = x + n\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y' + x\,y = 0, \qquad y = C\,e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \to \quad y = C(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$C'(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} - x\,C(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + x\,C(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} = x + n\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$C'(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} = x + n\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad C'(x) = x\,e^{\frac{x^2}{2}} + n$$

$$C(x) = \int x\,e^{\frac{x^2}{2}}\,dx + n\int dx = e^{\frac{x^2}{2}} + n\,x + C_1$$

$$y = C(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(e^{\frac{x^2}{2}} + n\,x + C_1\right)e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + n\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}} + C_1\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = 1 + n\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}} + C_1\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

Spezielle Lösung: $\quad y(0) = 3: \quad y = 1 + n\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}} + 2\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

Variation der Konstanten: Lösung 7

$$y' + x\,y = x + n\,x^3, \qquad y(0) = 1$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = 1 - 2n + n\,x^2 + C\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

Spezielle Lösung: $\quad y(0) = 1: \qquad y = 1 - 2n + n\,x^2 + 2n\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x\,, \qquad y(\pi) = 1, \qquad y(\pi) = 2$$

$$y' + \frac{y}{x} = 0\,, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}\,, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \qquad y = \frac{C}{x}$$

$$y = \frac{C}{x} \quad \rightarrow \quad y = \frac{C(x)}{x}\,, \qquad y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x \qquad : \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \sin x$$

$$C'(x) = x \sin x\,, \qquad C(x) = \int x \sin x\, dx = \sin x - x\cos x + C_1$$

<u>Allgemeine Lösung:</u> $\quad y = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{1}{x}(\sin x - x\cos x + C_1)$

<u>Spezielle Lösung:</u>

$y(\pi) = 1: \qquad y = \dfrac{1}{x}(\sin x - x\cos x)$

$y(\pi) = 2: \qquad y = \dfrac{1}{x}(\sin x - x\cos x + \pi)$

$$y' + 2y = 4 \cdot e^{5x}, \quad y(0) = 1, \quad y(0) = 2$$

$$y' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -2x + \ln|C| \quad \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -2x \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{C} = e^{-2x}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist: $y = C\,e^{-2x} \quad (C \in \mathbb{R})$

$$C \to C(x), \qquad y \to y = C(x)\,e^{-2x}$$

$$y' + 2y = C'(x)\,e^{-2x} - 2C(x)\,e^{-2x} + 2C(x)\,e^{-2x} = C'(x)\,e^{-2x} = 4 \cdot e^{5x}$$

$$C'(x) = 4 \cdot e^{7x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = 4\int e^{7x}\,dx = \frac{4}{7}\,e^{7x} + C_1$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist:

$$y = C(x)\,e^{-2x} = \left(\frac{4}{7}\,e^{7x} + C_1\right)e^{-2x} = C_1\,e^{-2x} + \frac{4}{7}\,e^{5x}$$

Allgemeine Lösung: $$y = C\, e^{-2x} + \frac{4}{7}\, e^{5x}$$

Spezielle Lösungen:

$$y(0) = 1, \qquad y_1 = \frac{3}{7}\, e^{-2x} + \frac{4}{7}\, e^{5x}, \qquad \left(C = \frac{3}{7} \right)$$

$$y(0) = 2, \qquad y_2 = \frac{10}{7}\, e^{-2x} + \frac{4}{7}\, e^{5x}, \qquad \left(C = \frac{10}{7} \right)$$

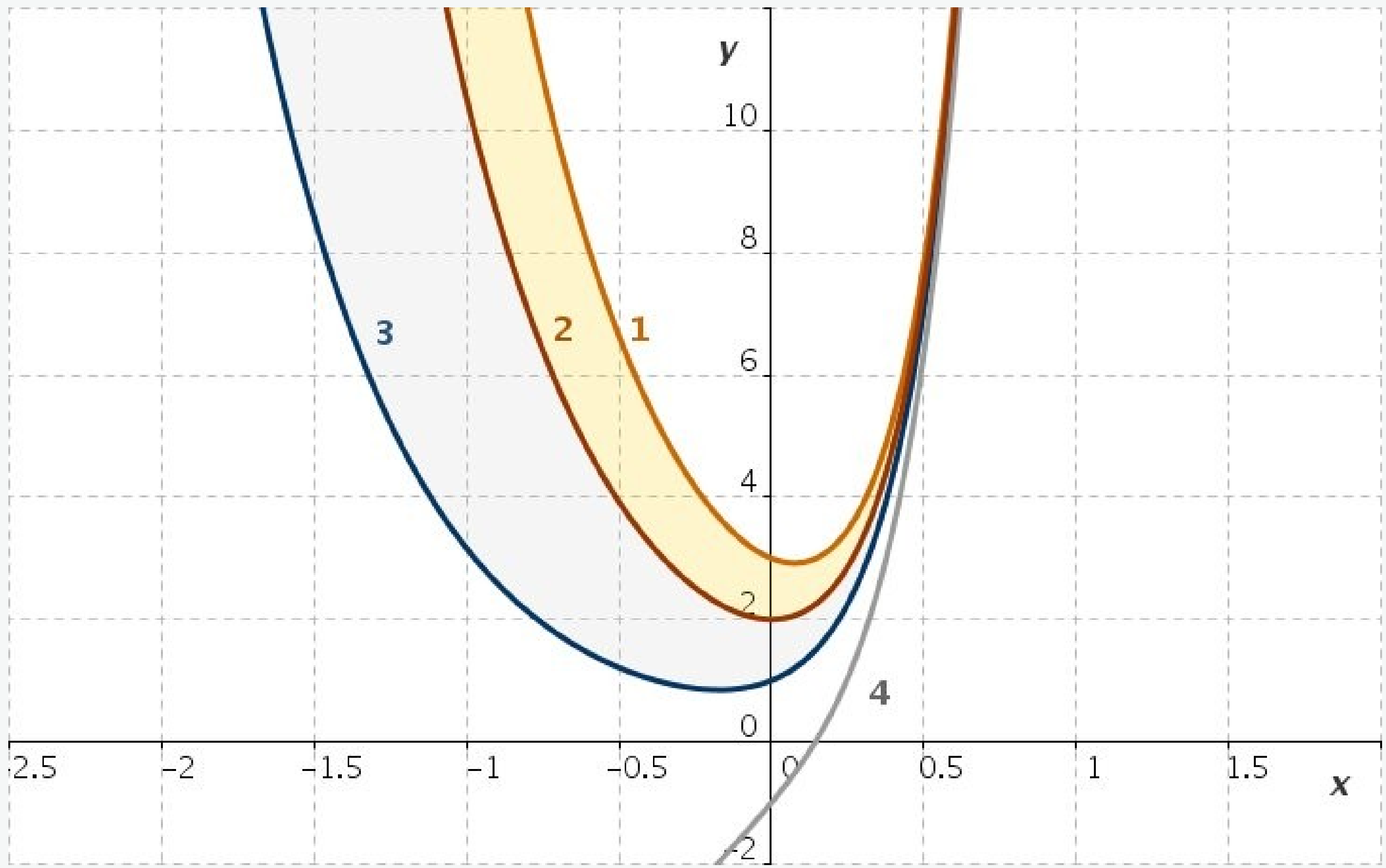

Abb. L9a: Integralkurven der DGL

Die Integralkurven in der Abbildung entsprechen folgenden Werten der Konstante C:

$$1: \quad C = \frac{17}{7}, \qquad 2: \quad C = \frac{10}{7}, \qquad 3: \quad C = \frac{3}{7}, \qquad 4: \quad C = -\frac{11}{7}$$

$$y' + 2y = 4 \cdot e^{2x}, \qquad y(0) = 1, \qquad y(0) = -1$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = C\, e^{-2x} + e^{2x}$

Spezielle Lösungen:

$$y(0) = 1, \qquad y_1 = e^{2x} \qquad (C = 0)$$

$$y(0) = -1, \qquad y_2 = e^{2x} - 2\, e^{-2x}, \qquad (C = -2)$$

Zur Abbildung L9b auf der nächsten Seite:

Die Integralkurven in der Abbildung entsprechen folgenden Werten der Konstante C:

$$1: \; C = 1, \qquad 2: \; C = 0, \qquad 3: \; C = -1, \qquad 4: \; C = -2$$

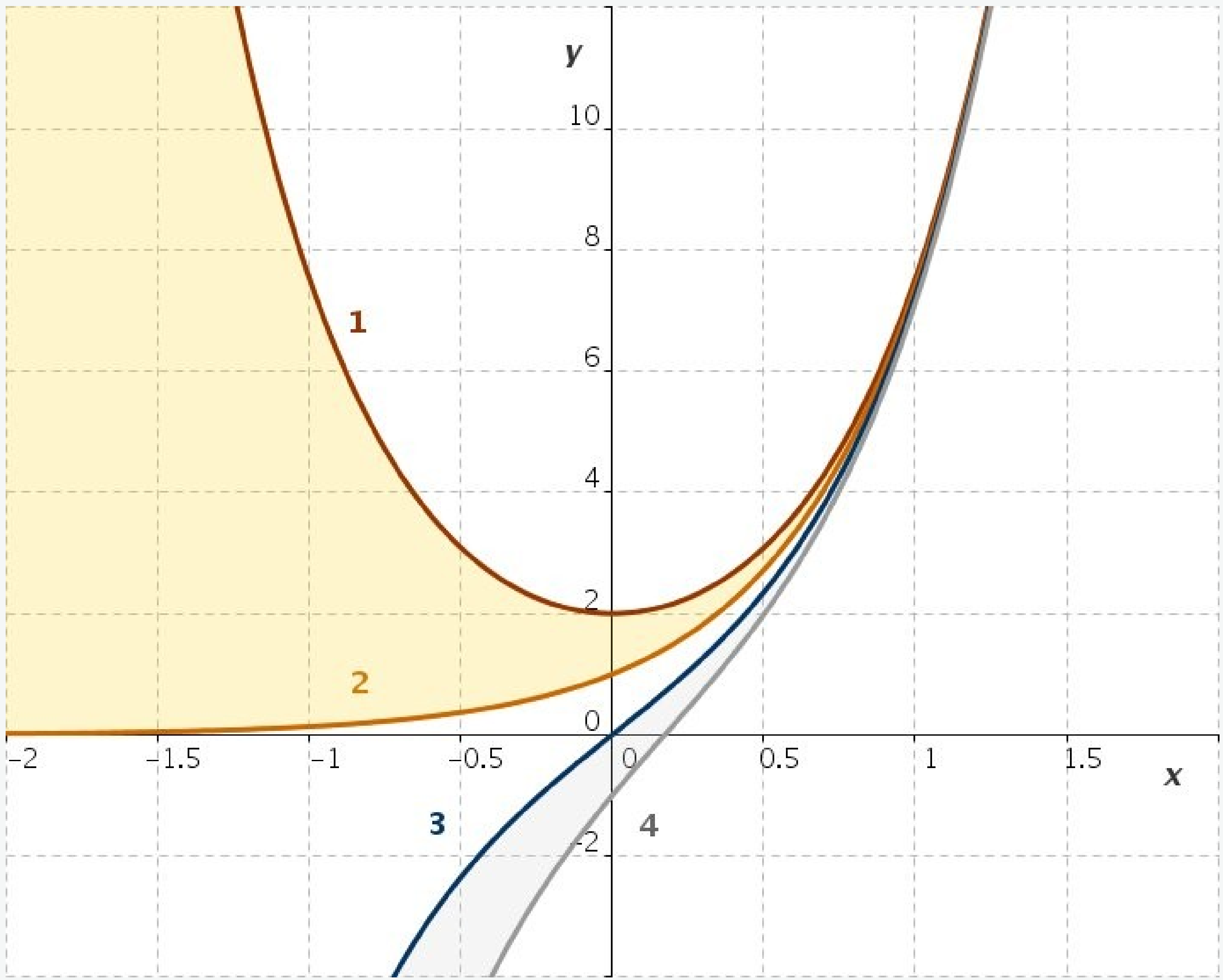

Abb. L9b: Integralkurven der DGL

$$y' + 2\,x\,y = 2\,x\;e^{-x^2}, \qquad y(0) = 1, \qquad y(0) = -1$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = (x^2 + C)\;e^{-x^2}$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = 1: \qquad y_1 = (x^2 + 1)\;e^{-x^2} \qquad (C = 1)$$

$$y(0) = -1: \qquad y_2 = (x^2 - 1)\;e^{-x^2} \qquad (C = -1)$$

Zur Abbildung L10a auf der nächsten Seite:

Die Integralkurven in der Abbildung entsprechen folgenden Werten der Konstante C:

$1: \;\; C = 0, \qquad 2: \;\; C = 1, \qquad 3: \;\; C = 2, \qquad 4: \;\; C = 3$

$5: \;\; C = -1, \qquad 6: \;\; C = -2$

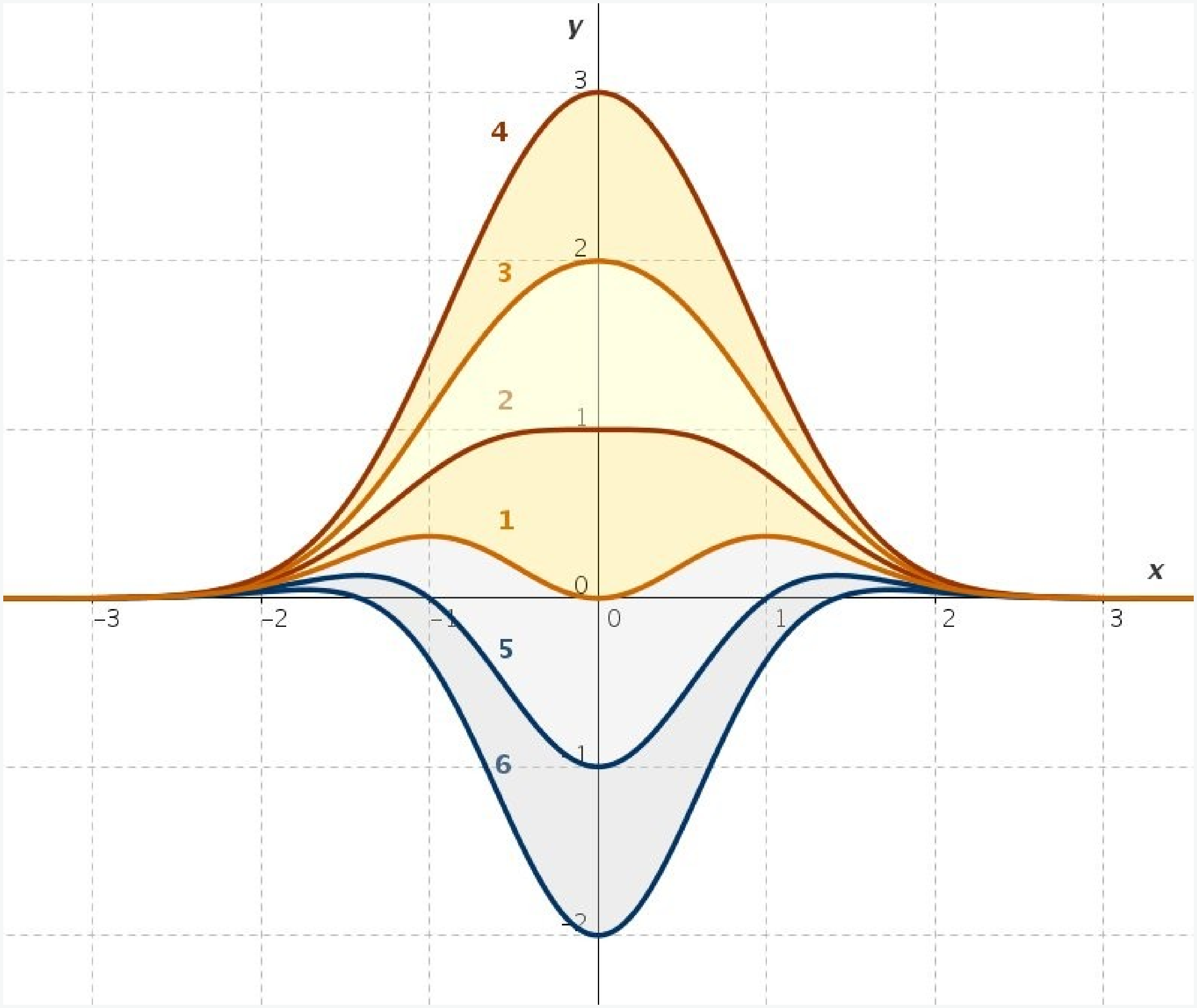

Abb. L10a: Integralkurven der DGL

$$y' + 2x\,y = 2x\;e^{-2x^2}, \qquad y(0) = 1, \qquad y(0) = -1$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = \left(-\,e^{-x^2} + C\right) e^{-x^2}$

Spezielle Lösung:

$y(0) = 1: \quad y = \left(2 - e^{-x^2}\right) e^{-x^2} \qquad (C = 2)$

$y(0) = -1: \quad y = -\,e^{-2x^2}$

Zur Abbildung L10b auf der nächsten Seite:

Die Integralkurven in der Abbildung entsprechen folgenden Werten der Konstante C:

$1: \; C = \frac{3}{2}, \qquad 2: \; C = 2, \qquad 3: \; C = 3, \qquad 4: \; C = 0.01$

$5: \; C = -\frac{1}{2}, \qquad 6: \; C = -1$

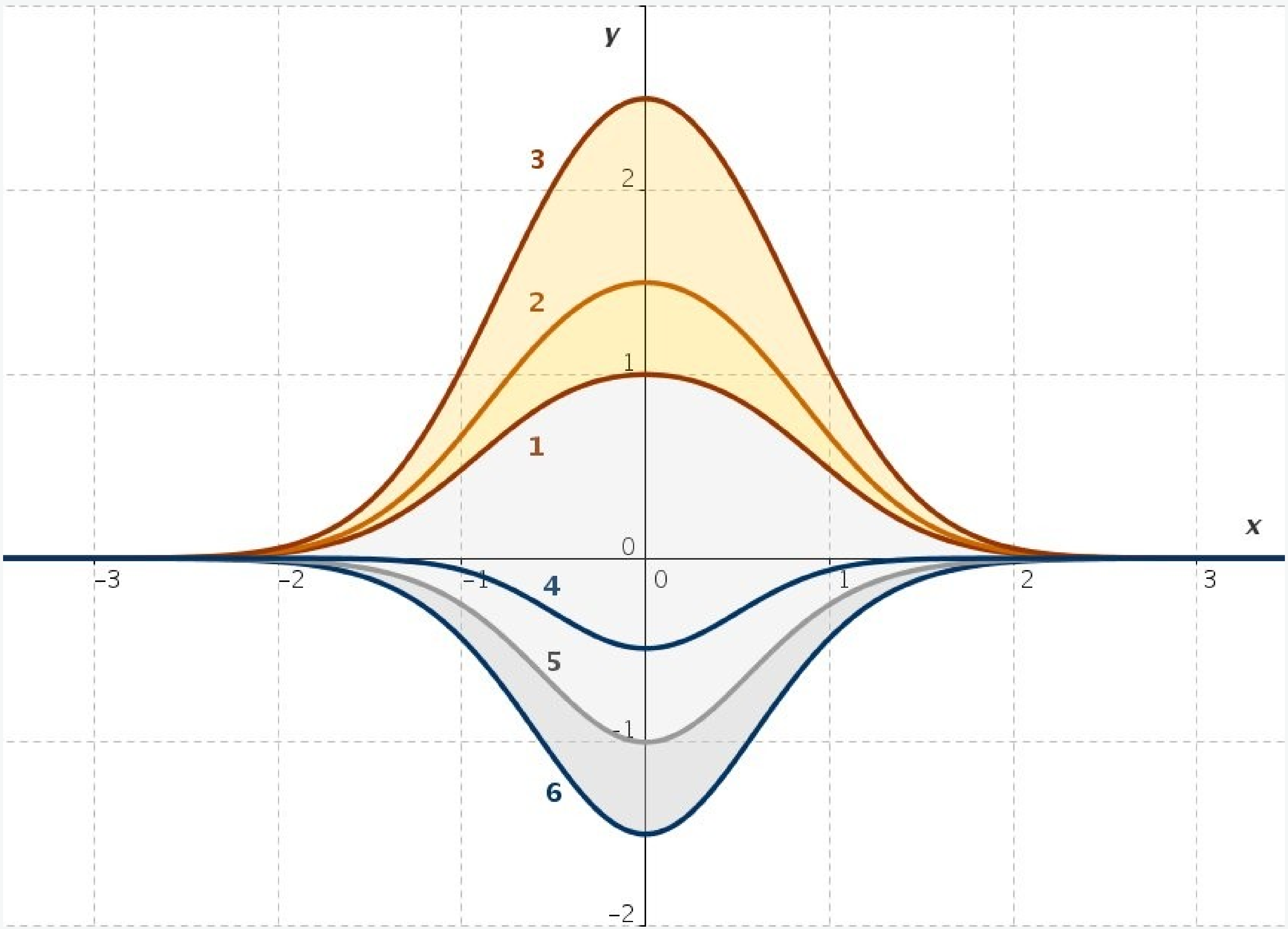

Abb. L10b: Integralkurven der DGL