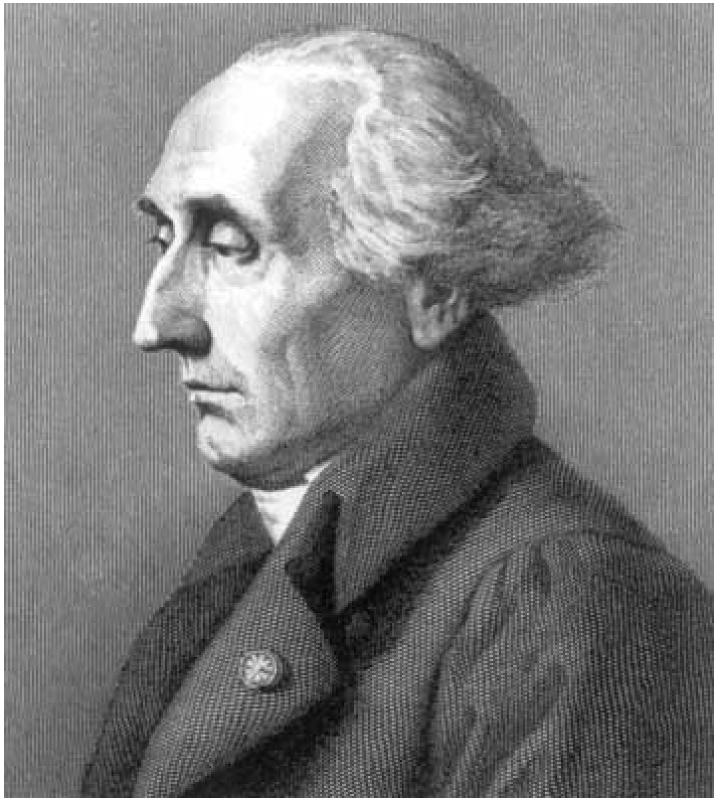
http://farm2.static.flickr.com/1126/1106887574_afb6b55b4e.jpg?v=0

Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Variation der Konstanten



Joseph Louis Lagrange (1736-1813), ein italienischer Mathematiker und Astronom

Lagrange entwickelte ein wichtiges Verfahren zur Lösung von inhomogenen Differentialgleichungen, die als Methode der Variation der Konstanten bekannt ist.

Joseph Louis Lagrange

Von Lagrange ist besonders sein kompromisloser, formaler Zugang zur Analysis und Mechanik bekannt. Er betrachtete alle Funktionen als Potenzreihen und versuchte, die Mechanik auf die Analyse dieser Funktionen zurückzuführen, ohne Verwendung von Geometrie.

http://farm2.static.flickr.com/1126/1106887574_afb6b55b4e.jpg?v=0

http://www.w-volk.de/museum/lagran03.jpg

Die wertvollen Verdienste von Lagrange veranlassten seinen französischen Zeitgenossen Napoleon Bonaparte, der im Übrigen selbst mathematisches Talent besaß, zu folgender Aussage über Lagrange: *“Lagrange ist die Pyramidenspitze der mathematischen Wissenschaft”*. Wegen seiner Bedeutung für die Mathematik streiten sich Franzosen und Italiener immer noch um seine eigentliche Nationalität.

Die Methode der Variation der Konstanten wird häufig angewendet, wenn der Einfluß aller möglichen Störungen untersucht wird. Betrachten wir z.B. die Bewegung der Planeten um die Sonne. Wenn wir die gegenseitige Anziehung der Planeten nicht berücksichtigen, erhalten wir in erster Näherung die unabhängige Bewegung der Planeten entlang der Keplerschen Ellipsen. Das ist die Lösung der ungestörten Bewegungsgleichungen.

Um den störenden Einfluß der Wechselwirkung der Planeten mit einzubeziehen, kann man annehmen, dass die Planeten sich im Keplerschen Sinne bewegen, aber die Parameter der Keplerschen Ellipsen sich mit der Zeit leicht ändern. Wir betrachten also Größen, die bei der ungestörten Bewegung konstant waren, jetzt als zeitabhängige Funktionen.

Vladimir I. Arnold “Gewöhnliche Differentialgleichungen”

Eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

lässt sich durch Variation der Konstanten auf folgende Weise lösen. Zuerst wird die entsprechende homogene Differentialgleichung

$$y_0' + f(x) \cdot y_0 = 0$$

durch Trennung der Variablen gelöst. Die allgemeine Lösung dieser DGL hat die Form:

$$y_0 = C \cdot e^{-\int f(x)\, dx} = C \cdot e^{-F(x)}, \qquad F(x) = \int f(x)\, dx \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Um die inhomogene DGL zu lösen, wird die Integrationskonstante C durch eine unbekannte Funktion $C(x)$ ersetzt

$$C \to C(x), \qquad y_0 \to y = C(x) \cdot e^{-F(x)}$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{-F(x)} - C(x) \cdot f(x) \cdot e^{-F(x)}$$

Integration der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung

Die Funktionsterme für y und y' setzen wir in die inhomogene DGL ein:

$$C'(x) \cdot e^{-F(x)} = g(x)$$

$$C'(x) = g(x) \cdot e^{F(x)} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C_1$$

Diesen Ausdruck für $C(x)$ setzen wir in die Formel für y ein und erhalten die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y = C(x) \cdot e^{-F(x)} = \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C_1 \right) e^{-F(x)} =$$

$$= \left(\int g(x) \cdot e^{\int f(x)\, dx} dx + C_1 \right) e^{-\int f(x)\, dx}$$

Diese Methode ist als Methode der Variation der Konstanten bekannt. Die Integrationskonstante C wird variiert, d.h. durch eine Funktion $C(x)$ ersetzt.

Variation der Konstanten: Aufgaben 1-4

Lösen Sie die folgenden linearen DGL 1. Ordnung durch Variation der Konstanten:

Aufgabe 1: $y' + 2y = e^{-x}, \qquad y(0) = 4$

Aufgabe 2: $y' + \dfrac{y}{x} = \cos x, \qquad y(\pi) = 1$

Aufgabe 3: $x y' + y = 6x^2, \qquad y(1) = 3, \qquad y(1) = -1$

Aufgabe 4: $x y' + y = 4x^3 - 2x^2$

$y(1) = -3, \qquad y(1) = 3$

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

$$DGL: \quad y' + 2y = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2, \quad g(x) = e^{-x}$$

Zuerst wird die entsprechende homogene Differentialgleichung durch Trennung der Variablen gelöst.

$$y_0' + 2y_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy_0}{dx} = -2y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy_0}{y_0} = -2\,dx$$

$$\int \frac{dy_0}{y_0} = -2\int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y_0| = -2x + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad y_0 = C\,e^{-2x}$$

$$C \to C(x), \qquad y_0 \to y = C(x) \cdot e^{-2x}$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{-2x} - 2C(x) \cdot e^{-2x}$$

Die Funktionsterme für y und y' werden in die inhomogene DGL eingesetzt

$$C'(x) \cdot e^{-2x} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = e^{x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = e^{x} + C_1$$

$$y = C(x)\,e^{-2x} = (e^{x} + C_1)\,e^{-2x} = C_1\,e^{-2x} + e^{-x}$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = C_1\,e^{-2x} + e^{-x}$

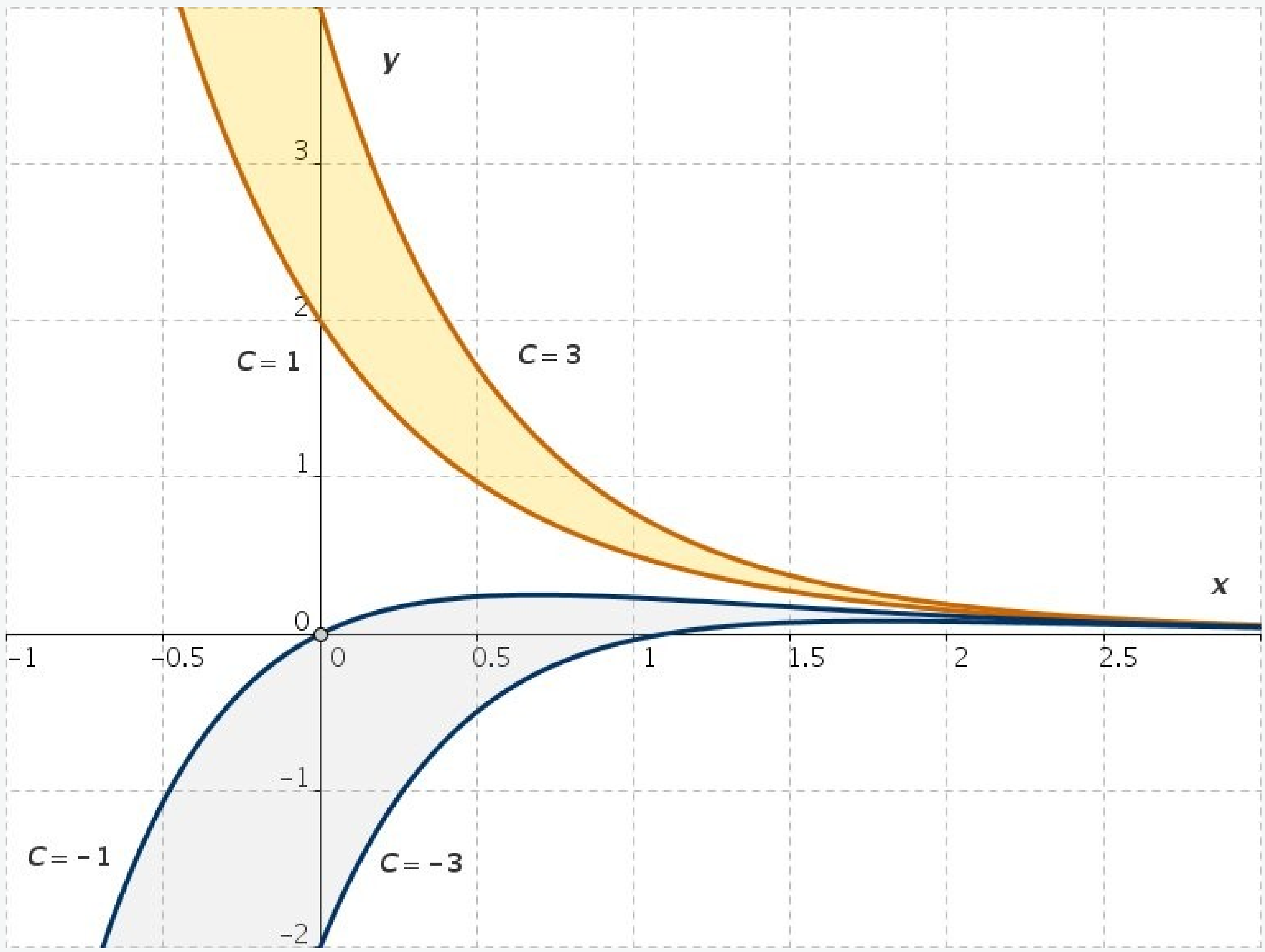


Abb. L1: Integralkurven der DGL

$$y = C_1\, e^{-2x} + e^{-x}$$

$$y\,' + \frac{y}{x} = \cos x\,, \qquad y(\pi) = 1$$

$$y_0\,' + \frac{y_0}{x} = 0, \qquad \ln|y_0| = -\ln|x| + \ln|C|\,, \qquad \ln|y_0| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \qquad y_0 = \frac{C}{x}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist: $y_0 = \dfrac{C}{x} \quad (C \in \mathbb{R})$

$$C \to C(x)\,, \qquad y_0 \to y = \frac{C(x)}{x}$$

$$y = \frac{C(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad y\,' = \frac{C\,'(x)\,x - C(x)}{x^2} = \frac{C\,'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

$$y\,' + \frac{y}{x} = \cos x: \quad \frac{C\,'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{C\,'(x)}{x} = \cos x$$

$$C\,'(x) = x\cos x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x + C_1$$

$$\int x\cos(a\,x)\,dx = \frac{\cos(a\,x)}{a^2} + \frac{x\sin(a\,x)}{a}$$

Variation der Konstanten: Lösung 2

Allgemeine Lösung: $$y = \frac{\cos x + x \sin x + C_1}{x}$$

Spezielle Lösung:

$$y(\pi) = \frac{\cos \pi + \pi \sin \pi + C_1}{\pi} = \frac{-1 + C_1}{\pi} = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$C_1 = \pi + 1$$

$$y = \frac{1}{x}\left(\cos x + x \sin x + \pi + 1\right)$$

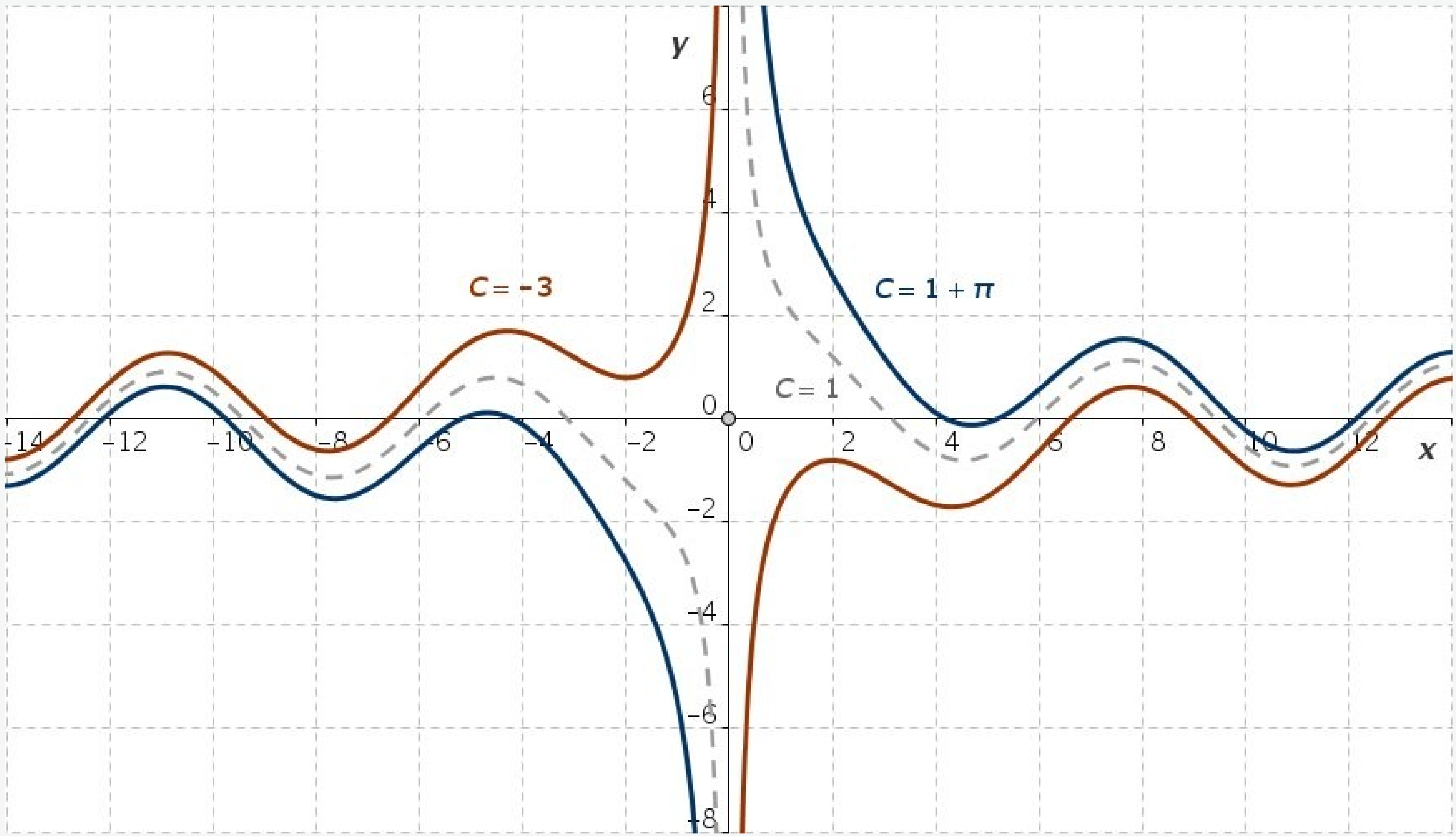


Abb. L2: Integralkurven der DGL

Lösung 3: $x\, y' + y = 6\, x^2, \qquad y' + \dfrac{y}{x} = 6\, x$

Allgemeine Lösung: $y = 2\, x^2 + \dfrac{C}{x}$

Spezielle Lösungen: $y(1) = 3, \qquad y = 2\, x^2 + \dfrac{1}{x}$

$y(1) = -1, \qquad y = 2\, x^2 - \dfrac{3}{x}$

Lösung 4: $x\, y' + y = 4\, x^3 - 2\, x^2, \qquad y' + \dfrac{y}{x} = 4\, x^2 - 2\, x$

Allgemeine Lösung: $y = x^3 - \dfrac{2}{3}\, x^2 + \dfrac{C}{x}$

Spezielle Lösungen: $y(1) = -3, \qquad y = x^3 - \dfrac{2}{3}\, x^2 - \dfrac{10}{3\, x}$

$y(1) = 3, \qquad y = x^3 - \dfrac{2}{3}\, x^2 + \dfrac{8}{3\, x}$

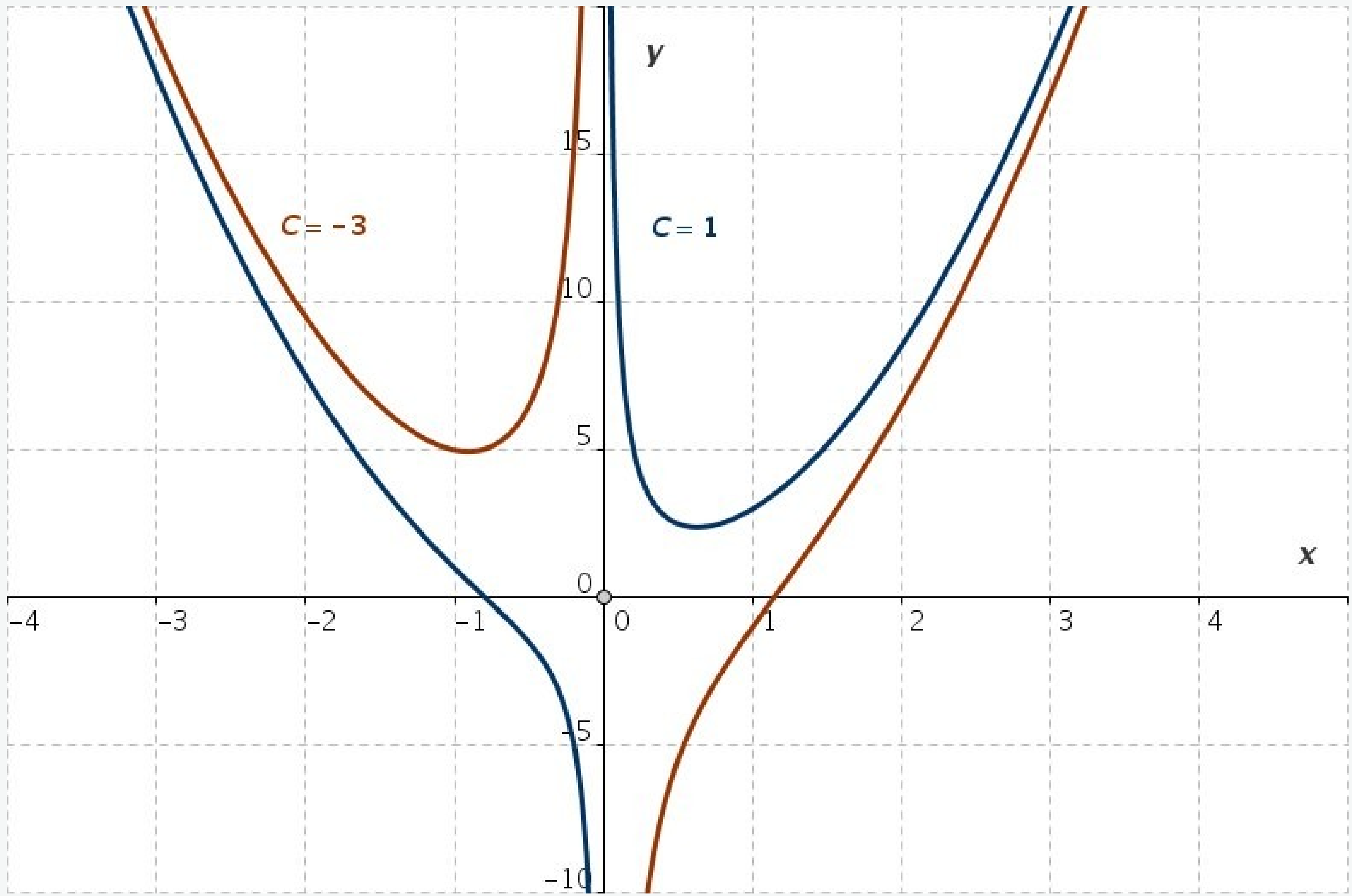


Abb. L3: Integralkurven der DGL $x\,y' + y = 6\,x^2$, die den Anfangswertbedingungen $y\,(1) = 3$ ($C = 1$, blaue Kurve) und $y\,(1) = -1$ ($C = -3$, rote Kurve) entsprechen

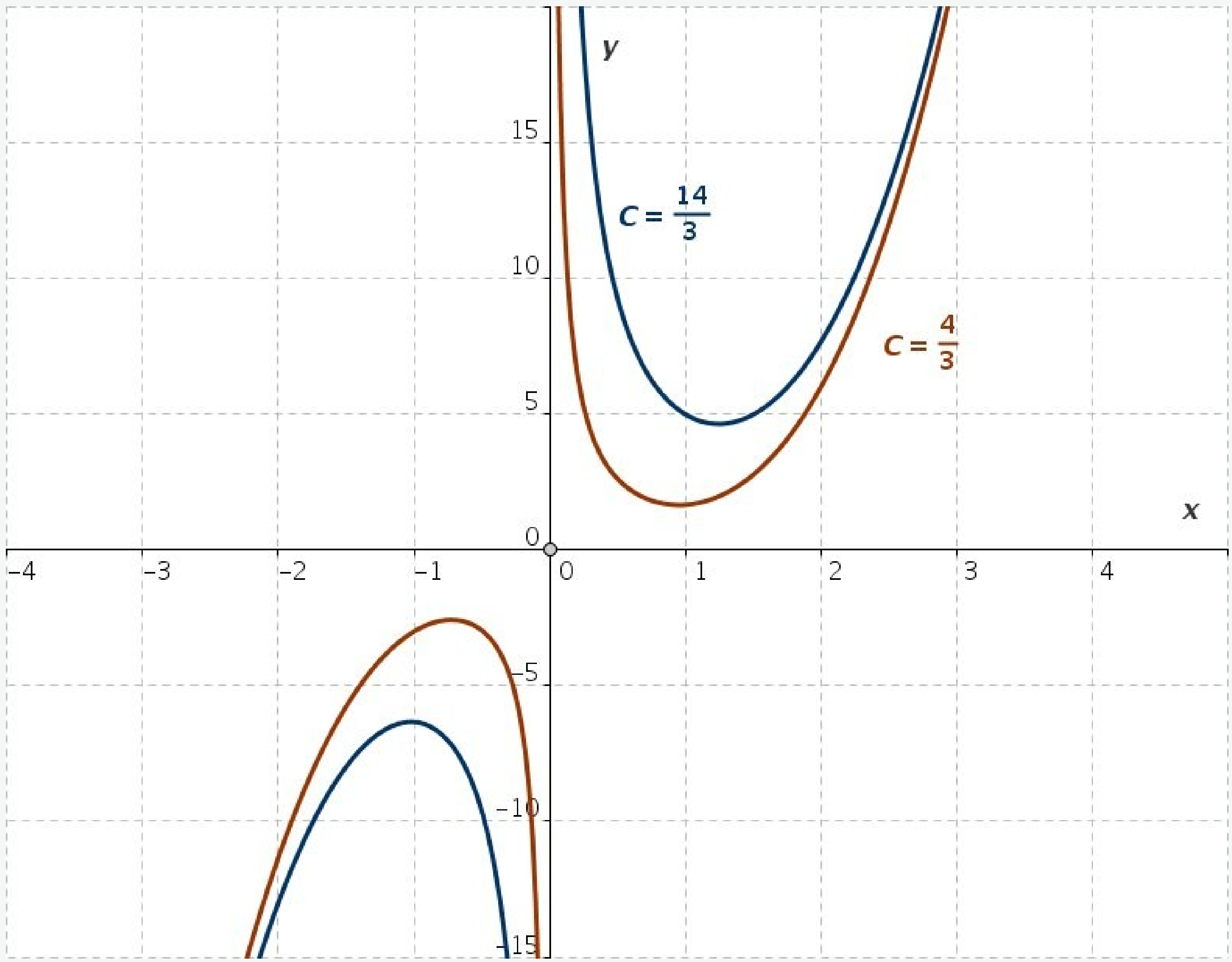


Abb. L4: Integralkurven der DGL $x\,y' + y = 4\,x^3 - 2\,x^2$, die den Anfangswertbedingungen $y\,(-1) = -3$ ($C = 4/3$, rote Kurve) und $y\,(1) = 5$ ($C = 14/3$, blaue Kurve) entsprechen