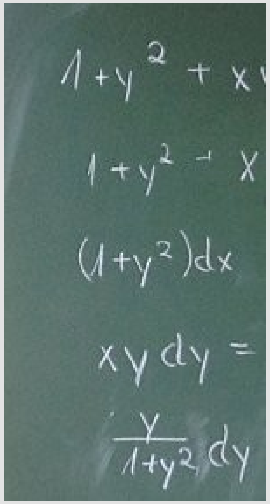
Trennung der Variablen, Aufgaben, Teil 2



Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Aufgabe 18: $y\,(1 - x^2)\,y' - x\,(1 - y^2) = 0$

Aufgabe 19: $y\,(1 - x^2)\,y' + x\,(y^2 + 1) = 0$

Aufgabe 20: $y' = \dfrac{1}{\cos^2(2x) \cdot \cos^2 y}$

Aufgabe 21: $y' = \dfrac{x\,y}{(x^2 - 2)\,(y^2 + 4)}$

$$y\,(1 - x^2)\,y' - x\,(1 - y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y\,dy}{1 - y^2} = \int \frac{x\,dx}{1 - x^2}$$

$$u = 1 - y^2, \quad du = -2\,y\;dy\,, \qquad v = 1 - x^2, \quad dv = -2\,x\;dx$$

$$\int \frac{y\,dy}{1 - y^2} = \int \frac{x\,dx}{1 - x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{d\,u}{u} = \int \frac{d\,v}{v} \quad \Rightarrow$$

$$\ln|\,u\,| = \ln|\,v\,| + \ln|\,C\,| \quad \Rightarrow \quad \ln|\,1 - y^2\,| = \ln|\,C\,(1 - x^2)|$$

$$1 - y^2 = C\,(1 - x^2) \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - C\,(1 - x^2)$$

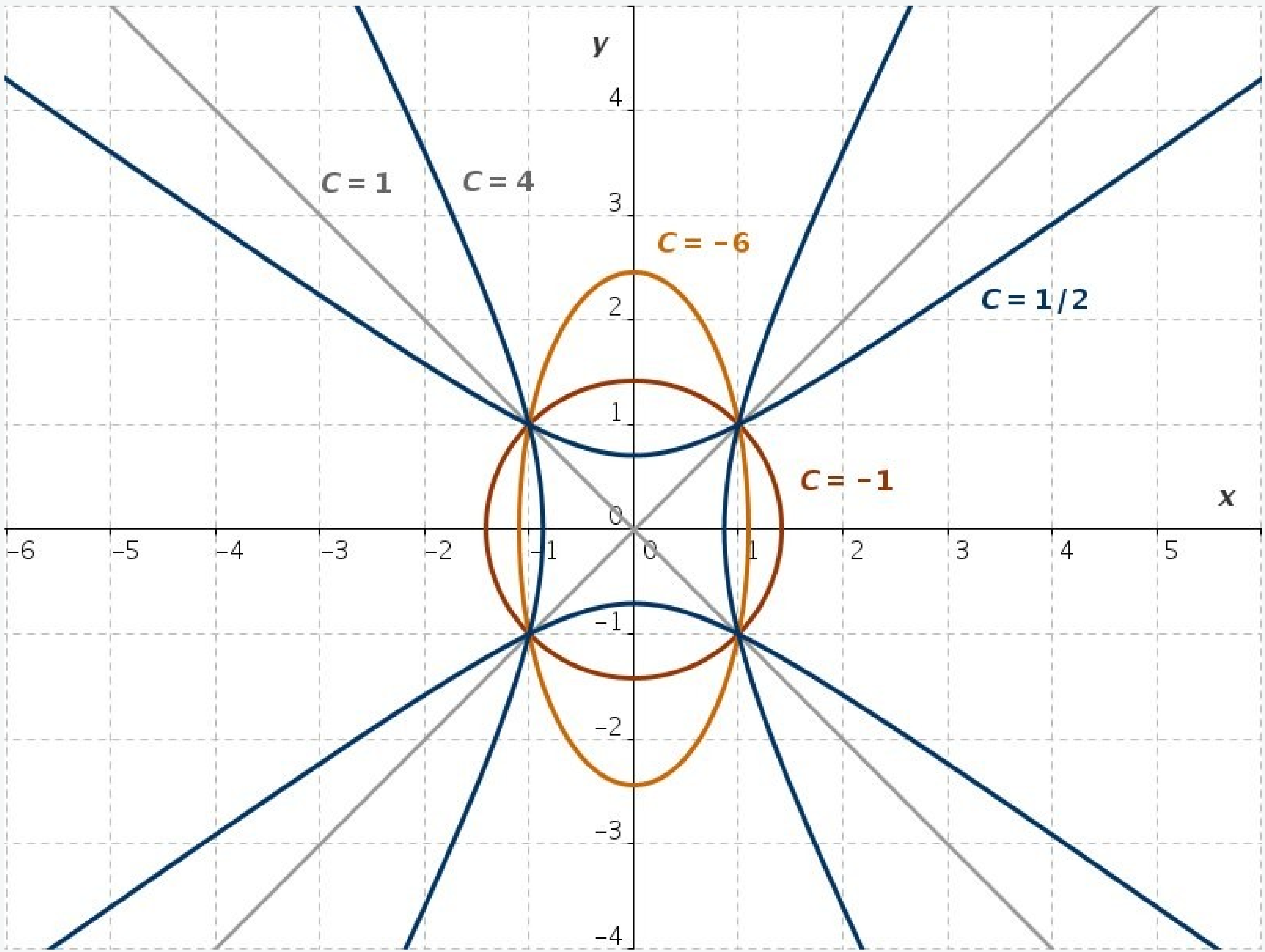


Abb. L18-1: Integralkurven der DGL $y\,(1 - x^2)\,y' - x\,(1 - y^2) = 0$

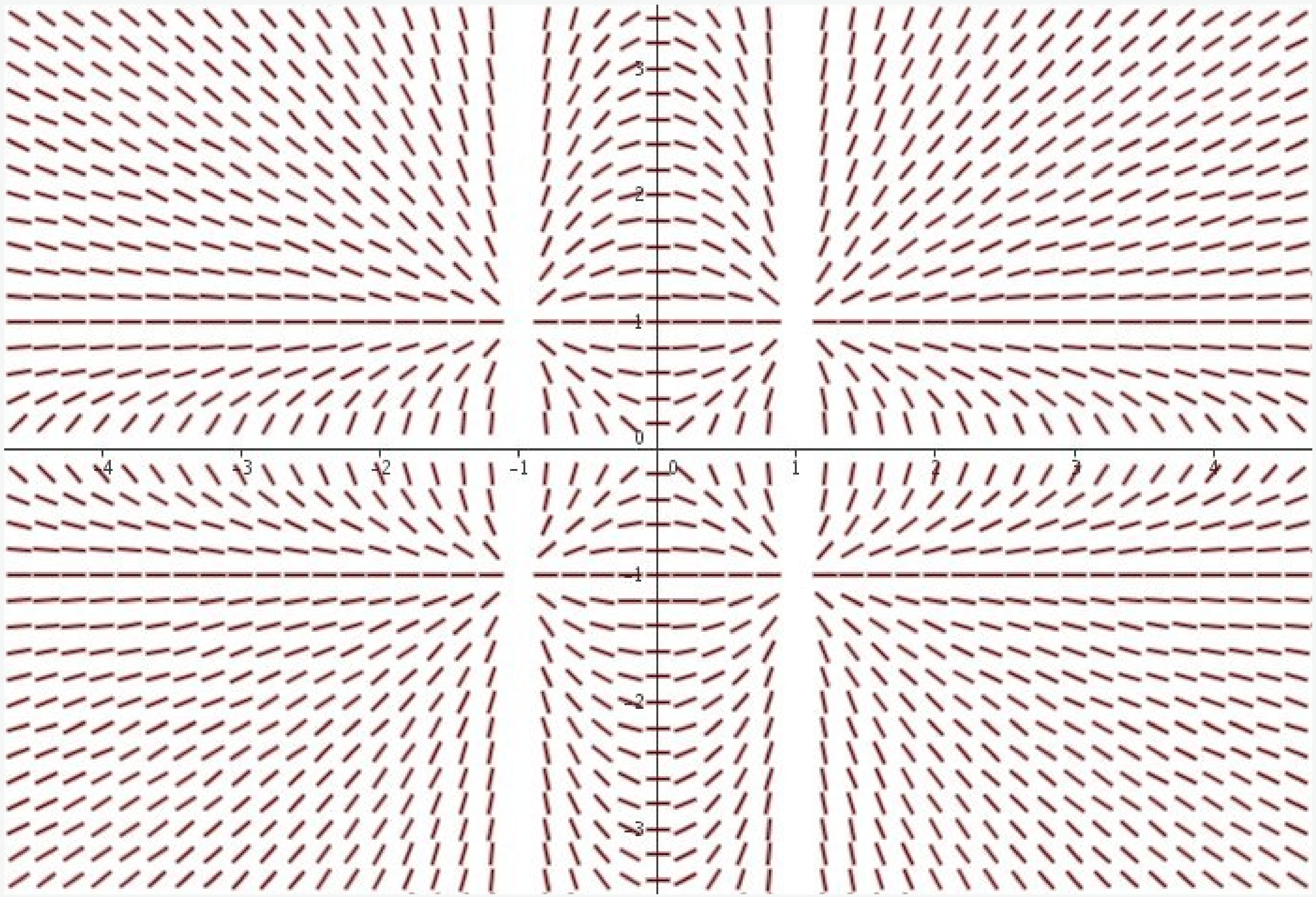


Abb. L18-2: Richtungsfeld der DGL $y\,(1 - x^2)\,y' - x\,(1 - y^2) = 0$

$$y\ (1 - x^2)\ y' + x\ (y^2 + 1) = 0$$

$$y\ (1 - x^2)\ dy + x\ (y^2 + 1)\ dx = 0 \qquad \left(\times \ \frac{1}{(1 - x^2)(y^2 + 1)} \right)$$

$$\frac{y\,dy}{y^2 + 1} = \frac{x\,dx}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y\,dy}{y^2 + 1} = \int \frac{x\,dx}{x^2 - 1}$$

$$s = y^2 + 1, \quad ds = 2\,y\,dy\,, \qquad u = x^2 - 1, \quad du = 2\,x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ \ln|\,s\,| = \frac{1}{2}\ \ln|\,u\,| + \frac{1}{2}\ \ln|\,C\,| \quad \Leftrightarrow \quad \ln|\,s\,| = \ln|\,u\,| + \ln|\,C\,|$$

$$\ln\ |y^2 + 1| = \ln\ |x^2 - 1| + \ln\ |\,C\,| = \ln\ |\,C\ (x^2 - 1)\,| \quad \Rightarrow$$

$$y^2 + 1 = C\ (x^2 - 1) \quad \Rightarrow$$

$$y^2 = C\ (x^2 - 1) - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{C\ x^2 - C - 1}$$

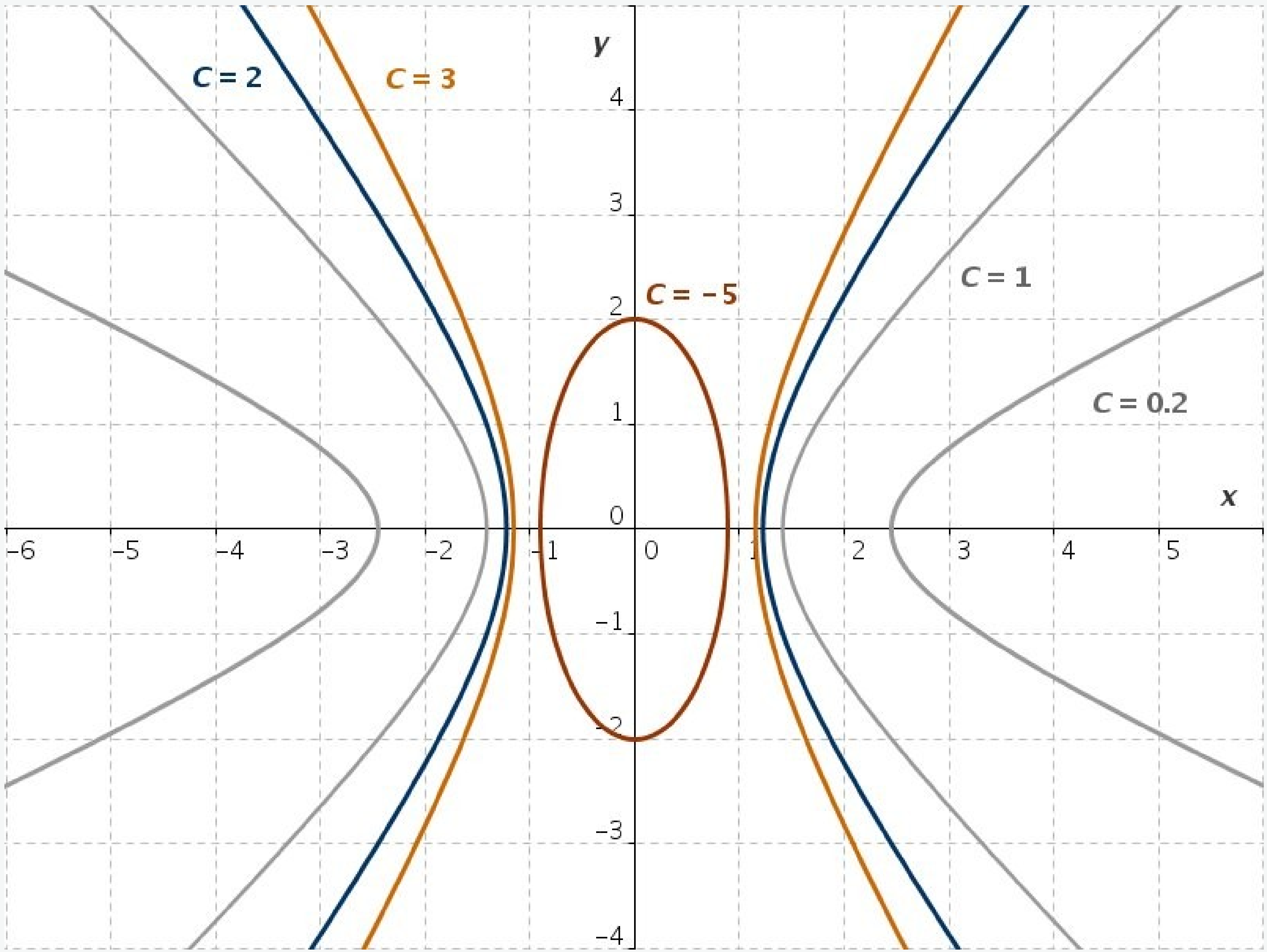


Abb. L19: Integralkurven der DGL mit den eingezeichneten Werten der Integrationskonstante

$$y\,' = \frac{1}{\cos^2(2\,x)\cdot\cos^2 y} \quad \to \quad \int \cos^2 y \;\, dy = \int \frac{dx}{\cos^2(2\,x)}$$

$$\int \cos^2 y \;\, dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\,\sin(2\,y)\,, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2(2\,x)} = \frac{1}{2}\,\tan(2\,x)$$

$$\frac{y}{2} + \frac{1}{4}\,\sin(2\,y) = \frac{1}{2}\,\tan(2\,x) - \frac{1}{2}\,C$$

$$y + \frac{1}{2}\,\sin(2\,y) = \tan(2\,x) - C$$

Diese Gleichung lösen wir ohne Mühe nach x auf und erhalten die Umkehrung des gesuchten Integrals *y (x)*:

$$x(y) = \frac{1}{2}\,\arctan\left(y + \frac{1}{2}\,\sin(2\,y) + C\right)$$

$$y\,' = \frac{x\;y}{(x^2 - 2)\;(y^2 + 4)}, \qquad (y^2 + 4)\;\frac{dy}{y} = \frac{x\;dx}{x^2 - 2}$$

$$\frac{y^2}{2} + 4\ln y = \frac{1}{2}\;\ln\;(x^2 - 2) + C$$

$$y^2 + 8\ln y = \ln\;(x^2 - 2) + C_1$$

Diese Gleichung lassen wir stehen und nennen sie ein implizites Integral.