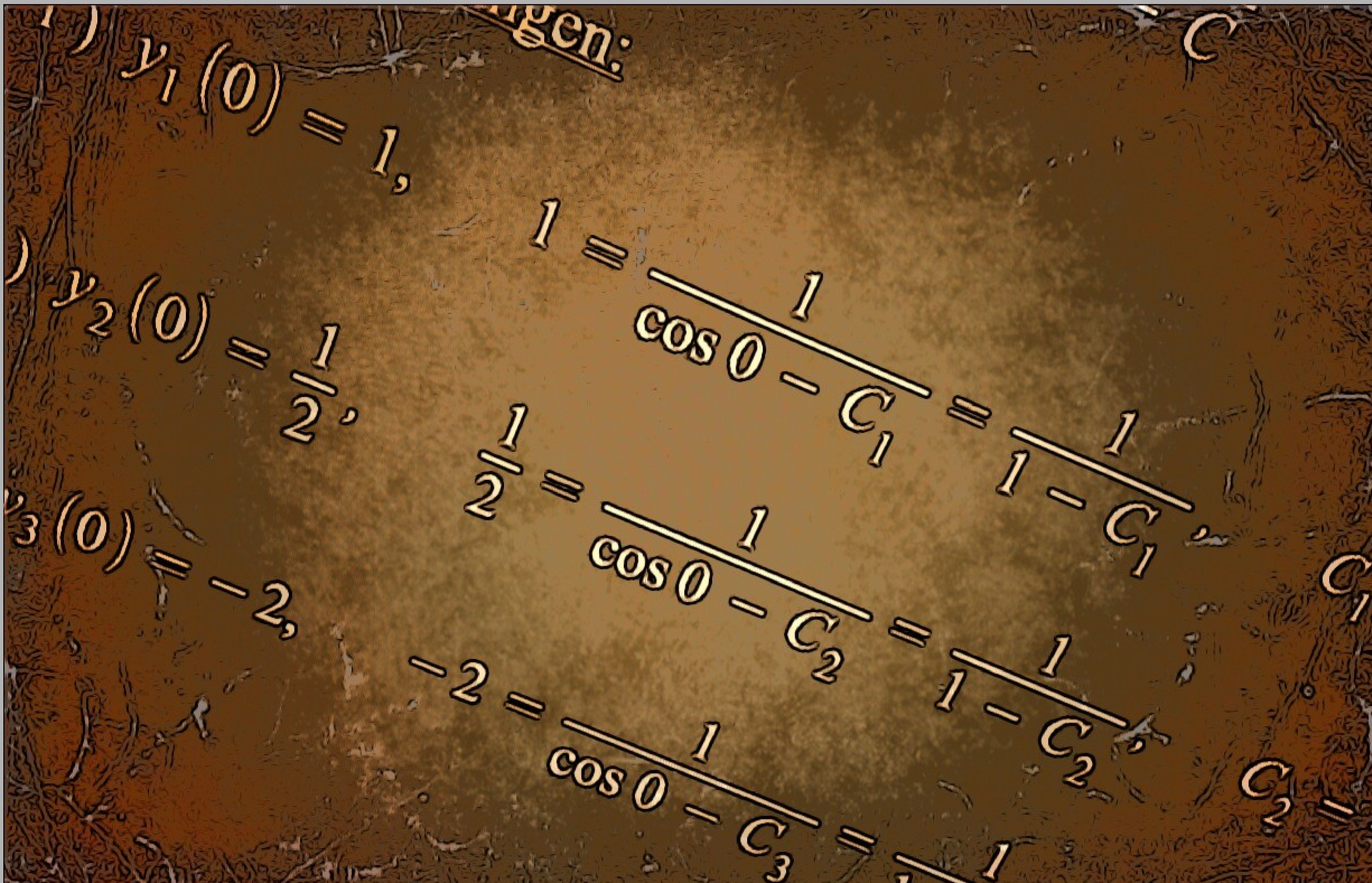
Trennung der Variablen, Aufgaben, Teil 1


$y_1(0) = 1,$
$1 = \frac{1}{\cos 0 - C_1} = \frac{1}{1 - C_1},$
$y_2(0) = \frac{1}{2},$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{\cos 0 - C_2} = \frac{1}{1 - C_2},$
$y_3(0) = -2,$
$-2 = \frac{1}{\cos 0 - C_3} =$

Die Differenzialgleichung 1. Ordnung mit getrennten Variablen hat die Gestalt

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx$$

Satz:

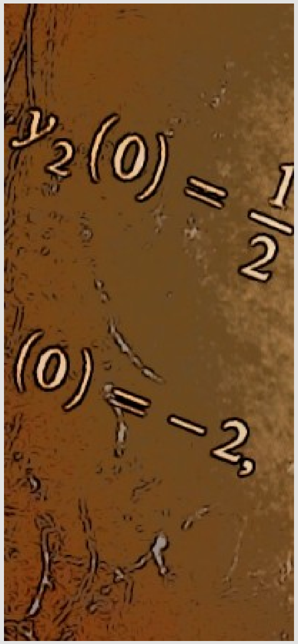
Sei $f(y)$ im Intervall I und $g(x)$ im Intervall I stetig. Die Anfangswertaufgabe

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx\,, \qquad y(x_0) = y_0\,, \qquad x_0 \in I_x\,, \quad y_0 \in I_y$$

ist in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 eindeutig lösbar

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C$$

Die Integrationskonstante C soll soll so gewählt werden, dass die Anfangsbedingung erfüllt wird.



Eine Differenzialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx$$

lässt sich schrittweise wie folgt lösen:

- Trennung der beiden Variablen.
- Integration auf beiden Seiten der Gleichung.
- Auflösung der in Form einer impliziten Gleichung vom Typ

  $$F(y) = G(x)$$

  vorliegenden allgemeinen Lösung nach der Variablen y (falls überhaupt möglich).

$$x\,y' + y = 0$$

Schritt 1: Trennung der Variablen

$$x\,y' + y = 0, \qquad x\,\frac{dy}{dx} + y = 0, \qquad \frac{dy}{y} = -\,\frac{dx}{x}$$

Schritt 2: Integration

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}\,, \qquad \ln|\,y\,| = -\ln|\,x\,| + \ln|\,C\,| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\ln|\,y\,| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

Schritt 3: Die Gleichung nach y aufzulösen $\quad y = \dfrac{C}{x}$

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Aufgabe 1: $y' = x + 1, \quad y(-2) = -1$

Aufgabe 2: $y' = 0.5\,(3 - y), \quad y(0) = 2$

Aufgabe 3: $y' = y - 5, \quad 1)\ y(0) = 2, \quad 2)\ y(1) = -2$

Aufgabe 4: $y' = y^2 \sin x$

$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = \frac{1}{2}, \quad y_3(0) = -2$

Aufgabe 5: $y' = y \cos x, \quad 1)\ y(\pi) = 4, \quad 2)\ y(\pi/2) = 2$

Aufgabe 6: $(x - 1)\, y' = 2y, \quad 1)\ y(0) = 3, \quad 2)\ y(3) = -2$

Aufgabe 7: $(2x - 1)\, y' = y, \quad y(1) = 7$

Aufgabe 8: $(x - 2)\, y' = y, \quad y(0) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 9: $(2x - 1)\, y' = 2y, \quad y(0) = 3$

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Aufgabe 10: $(x^2 - 1)\, y' = 2\, y, \qquad y(0) = 5$

Aufgabe 11: $x\, y + (x + 1)\, y' = 0, \qquad 1)\; y(0) = 2, \qquad 2)\; y(-2) = -3$

Aufgabe 12: $2\, x\, y + (x + 1)\, y' = 0, \qquad 1)\; y(0) = 1, \qquad 2)\; y(1) = 1$

Aufgabe 13: $x\, y + (x + 2)\, y' = 0, \qquad 1)\; y(0) = 1, \qquad 2)\; y(1) = 2$

Aufgabe 14: $x\, y^2 + (x + 1)\, y' = 0, \qquad 1)\; y(0) = 1, \qquad 2)\; y(1) = 1$

Aufgabe 15: $y' = -x\, e^{y}, \qquad 1)\; y(0) = -2, \qquad 2)\; y(0) = 1$

Aufgabe 16: $y' = -x^2\, e^{y}, \qquad y(0) = -3$

Aufgabe 17: $y' = x\, e^{y-2}, \qquad 1)\; y(0) = 1, \qquad 2)\; y(0) = -1$

Trennung der Variablen: Lösung 1

$$y' = x + 1, \qquad \frac{dy}{dx} = x + 1$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$

Spezielle Lösung:

$$y(-2) = -1, \qquad C = -1, \qquad y(x) = \frac{x^2}{2} + x - 1$$

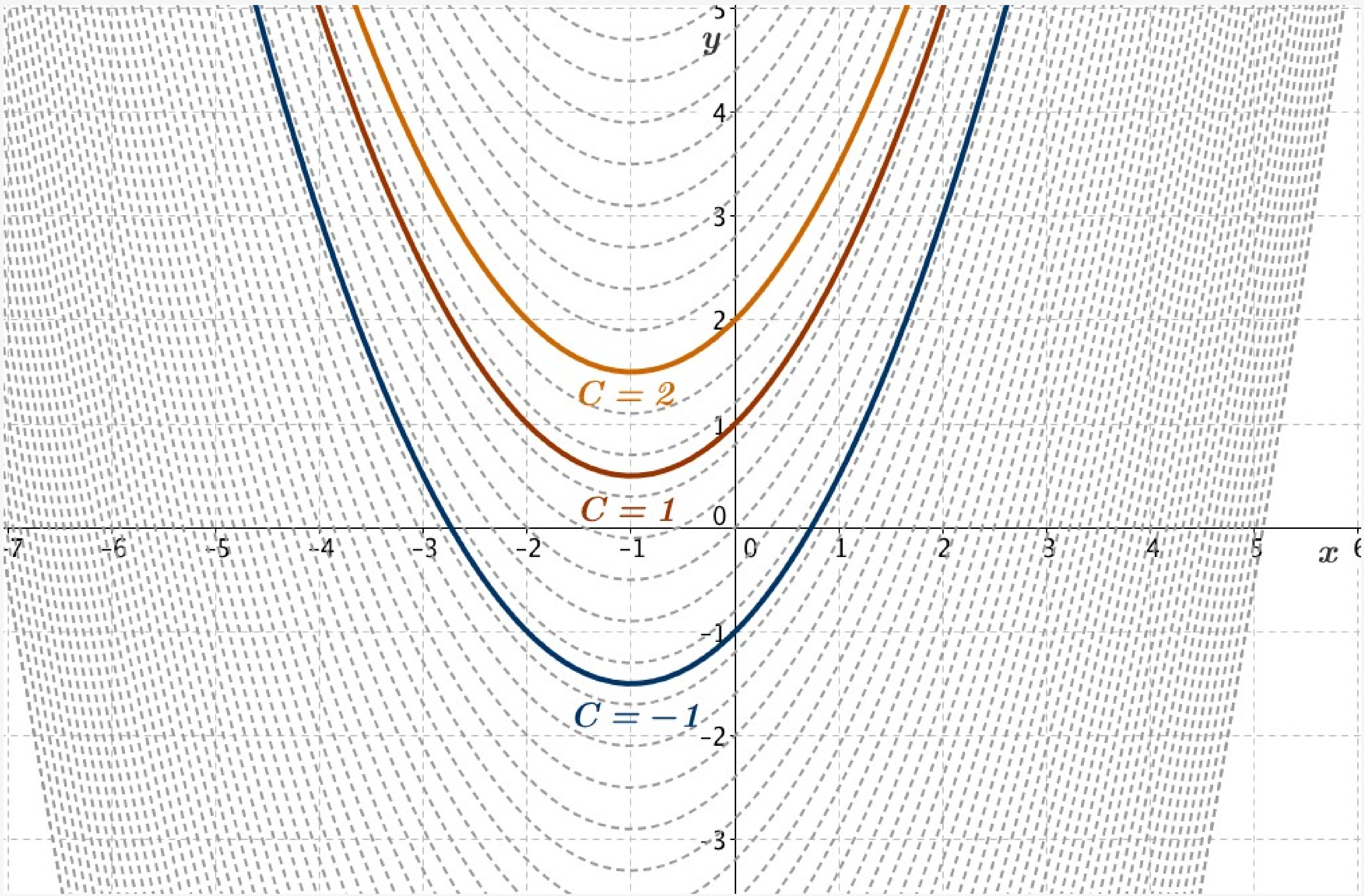


Abb. L1-1: Integralkurven der DGL $y' = x + 1$. Die blaue Kurve entspricht der speziellen Lösung der Gleichung mit $C = -1$, die dunkelrote Kurve $C = 1$ und die rote Kurve $C = 2$

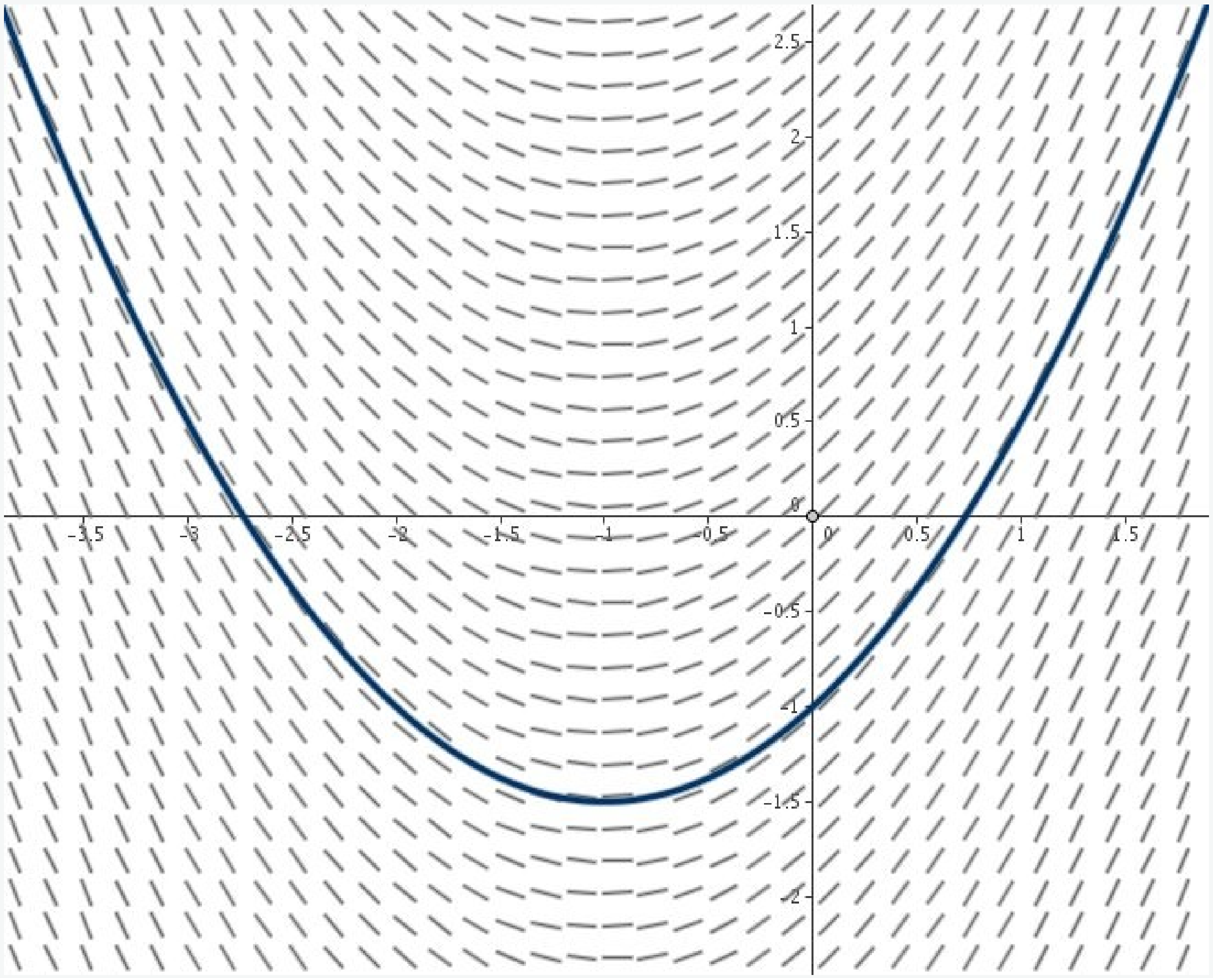


Abb. L1-2: Richtungsfeld der DGL y' = x + 1. Die blaue Kurve entspricht f (x) = x²/2 + x – 1, der speziellen Lösung der Gleichung mit y (–2) = – 1

Spezielle Lösung: $y\left(-2\right) = -1, \quad C = -1, \quad f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{2} + x - 1$

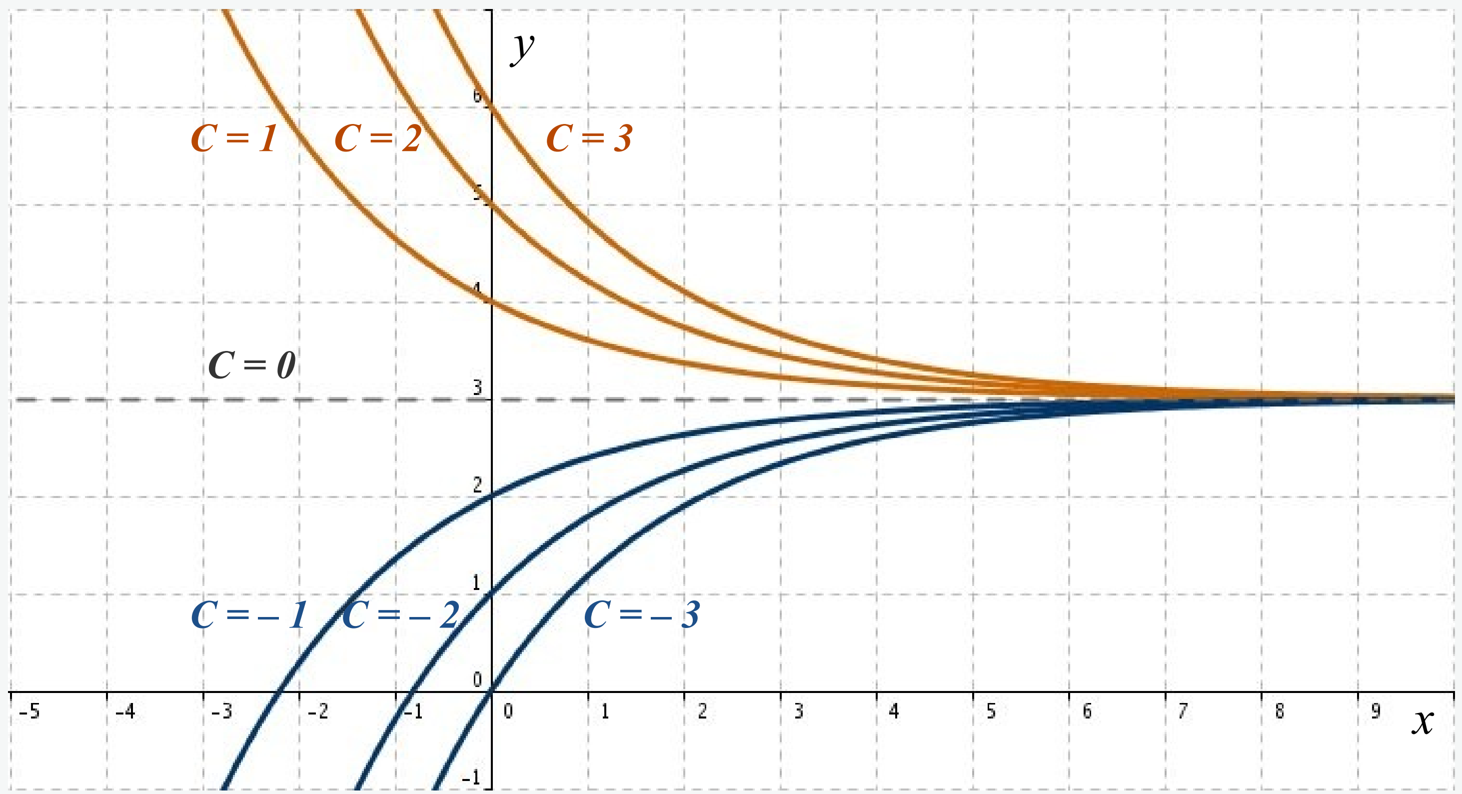


Abb. L2-1: Integralkurven der DGL y' = (3 - y)/2. Die blaue Kurve mit C = - 1 entspricht der speziellen Lösung der Gleichung mit y (0) = 2

$$y' = 0.5\ (3 - y) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y-3} = -\frac{1}{2} \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|\,y-3\,| = -\frac{x}{2} + \ln|\,C\,|$$

$$\ln\left|\frac{y-3}{C}\right| = -\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y - 3 = C\ e^{-\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = 3 + C\ e^{-\frac{x}{2}}$$

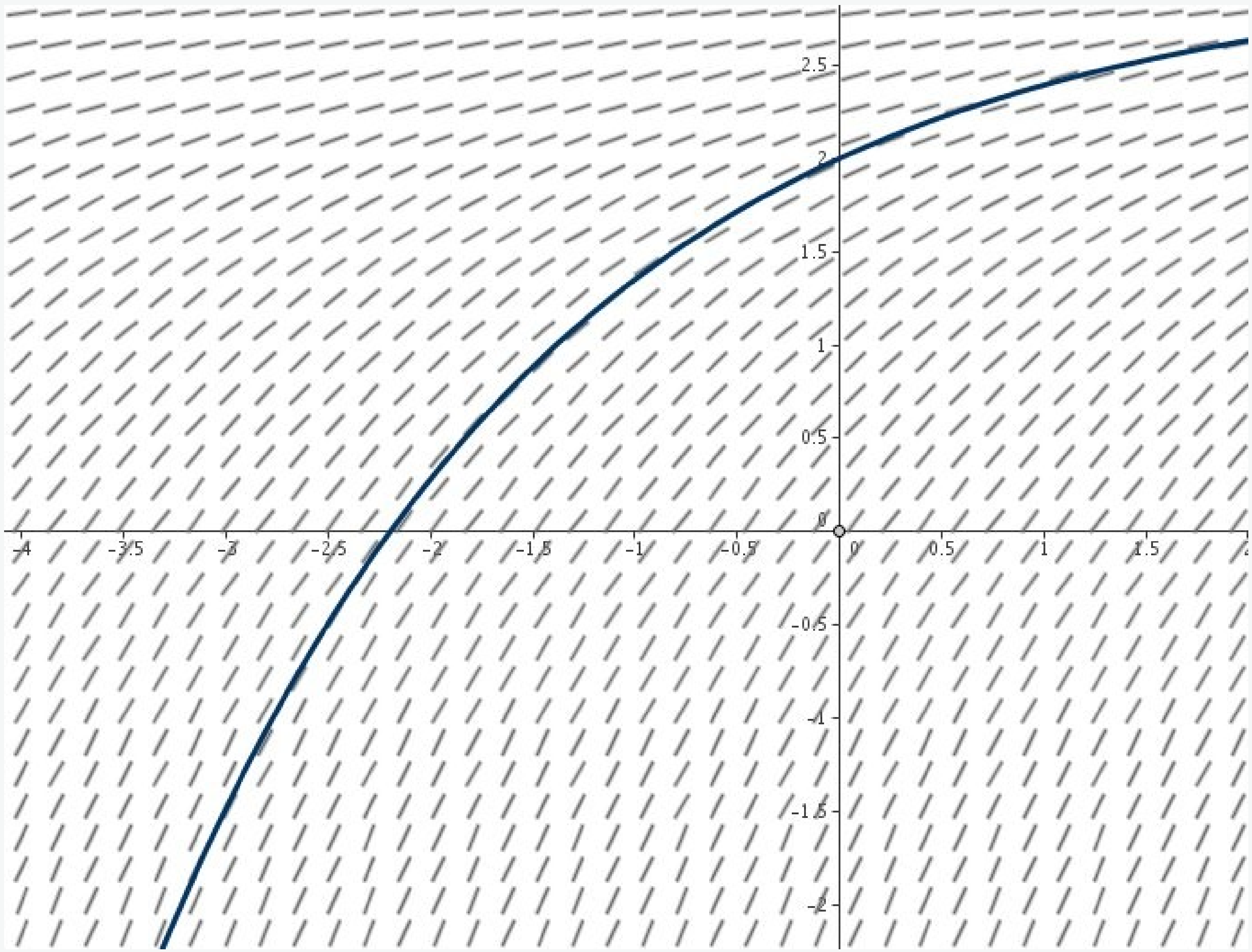


Abb. L2-2: Richtungsfeld der DGL y' = (3 - y)/2. Die blaue Kurve entspricht y = f (x), der speziellen Lösung der Gleichung mit y (0) = 2

$$f(x) = 3 - e^{-\frac{x}{2}}$$

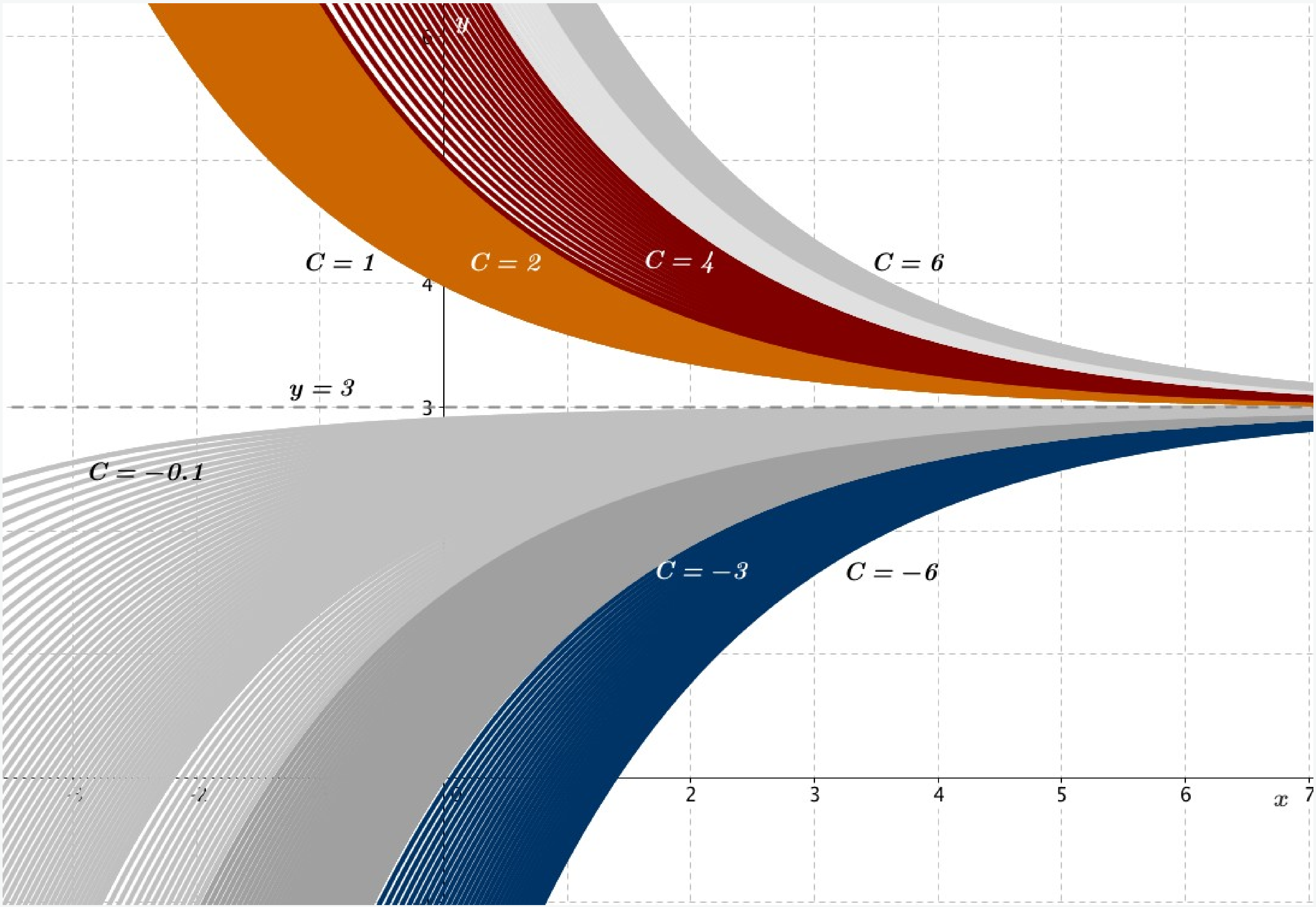


Abb. L2-3: Integralkurven der DGL y' = (3 - y)/2

$$y' = y - 5, \qquad 1)\ y(0) = 2, \qquad 2)\ y(1) = -2$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = C\,e^{x} + 5$

Spezielle Lösungen:

$1)\ y(0) = 2, \qquad y_1(x) = 5 - 3\,e^{x}$

$2)\ y(1) = -2, \qquad y_2(x) = 5 - 7\,e^{x-1}$

$$y' = y^2 \sin x\,, \qquad \frac{dy}{dx} = y^2 \sin x\,, \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \int \sin x \; dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + C\,, \qquad y = \frac{1}{\cos x - C}$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = \dfrac{1}{\cos x - C}$

Spezielle Lösungen:

1) $y_1(0) = 1, \qquad 1 = \dfrac{1}{\cos 0 - C_1} = \dfrac{1}{1 - C_1}\,, \qquad C_1 = 0, \qquad y_1(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

2) $y_2(0) = \dfrac{1}{2}\,, \qquad \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\cos 0 - C_2} = \dfrac{1}{1 - C_2}\,, \qquad C_2 = -1, \qquad y_2(x) = \dfrac{1}{\cos x + 1}$

3) $y_3(0) = -2, \qquad -2 = \dfrac{1}{\cos 0 - C_3} = \dfrac{1}{1 - C_3}\,, \qquad C_3 = \dfrac{3}{2}\,, \qquad y_3(x) = \dfrac{1}{\cos x - 3/2}$

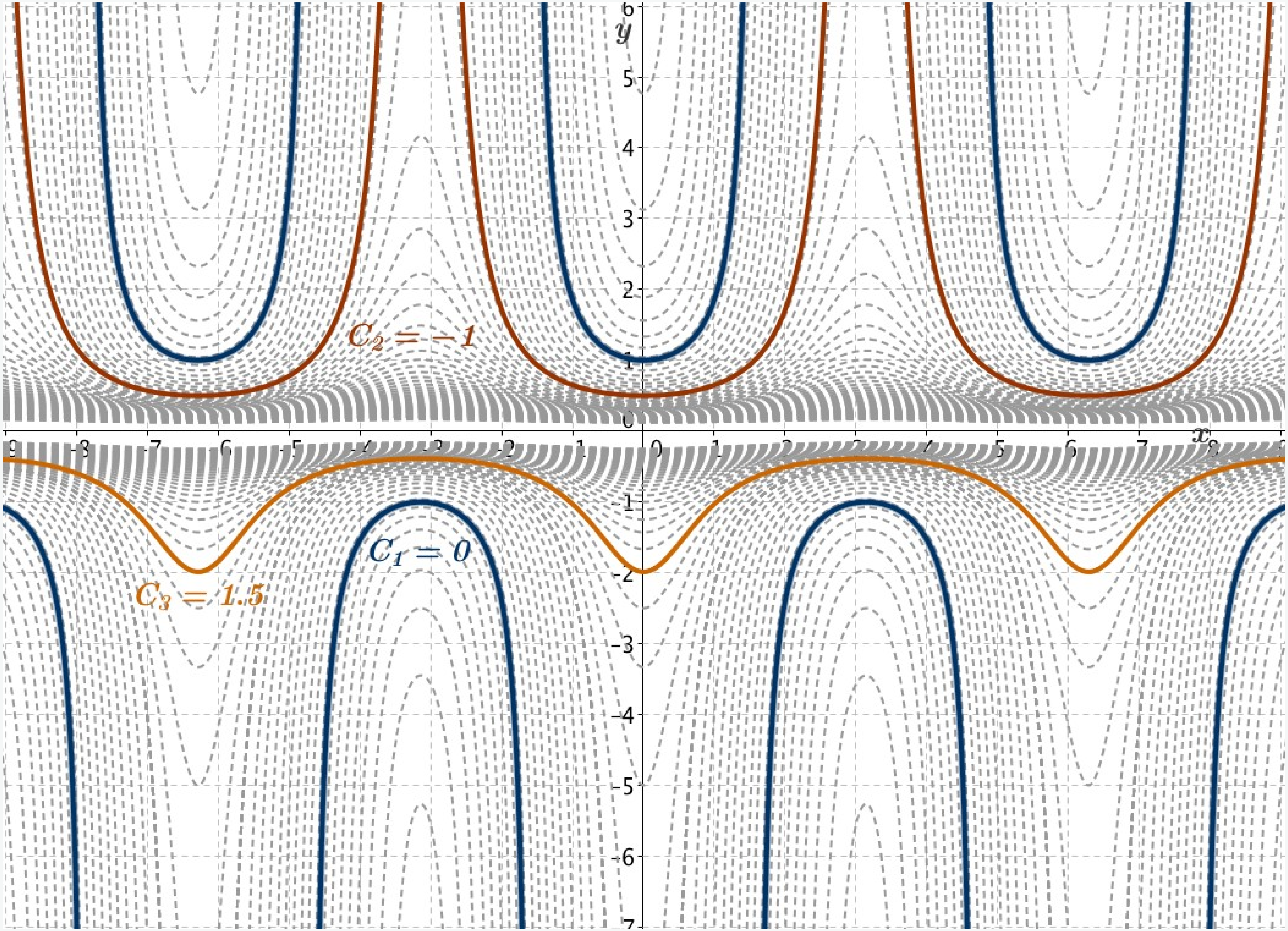


Abb. L4-1: Integralkurven der DGL $y' = y^2 \sin x$. Die mit Farbe gezeichneten Kurven entsprechen folgenden Werten der Integrationskonstante C: -1, 0, 1.5

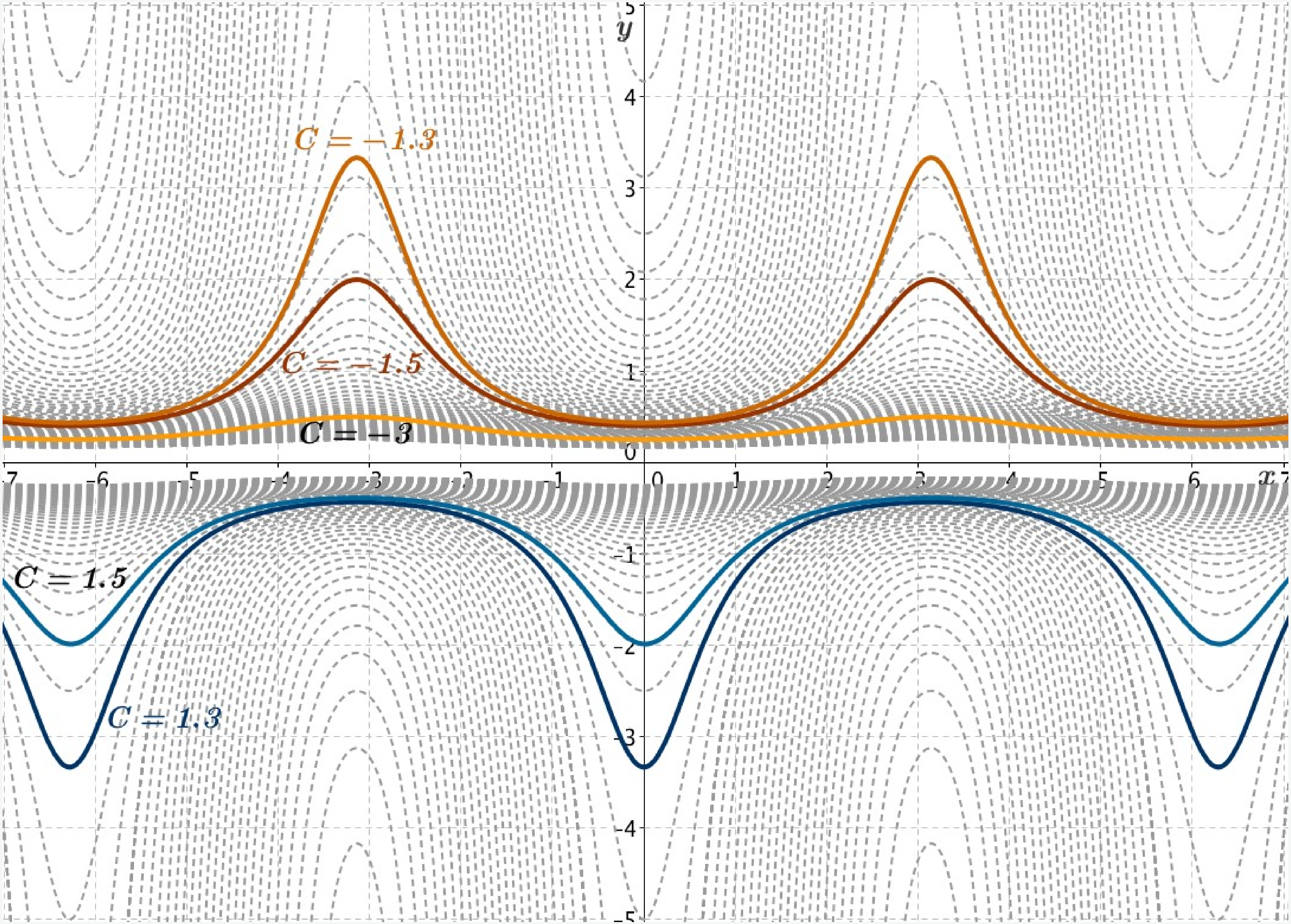


Abb. L4-2: Integralkurven der DGL $y' = y^2 \sin x$. Die mit Farbe gezeichneten Kurven entsprechen folgenden Werten der Integrationskonstante C: -3, - 1.5, - 1.3, 1.3, 1.5

$$y' = y \cos x\,, \qquad 1)\ y(\pi) = 4, \qquad 2)\ y(\pi/2) = 2$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = C\, e^{\sin x}$

Spezielle Lösungen:

$$1)\ y(\pi) = 4, \qquad y_1(x) = 4\, e^{\sin x}$$

$$2)\ y(\pi/2) = 2, \qquad y_2(x) = 2\, e^{\sin x - 1} = \frac{2}{e} \cdot e^{\sin x}$$

$$(x - 1)\, y' = 2\, y\,, \qquad 1)\ y(0) = 3, \qquad 2)\ y(3) = -2$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = C\,(x - 1)^2$

Spezielle Lösungen:

$1)\ y(0) = 3, \qquad y_1(x) = 3\,(x - 1)^2$

$2)\ y(3) = -2, \qquad y_2(x) = -\dfrac{1}{2}\,(x - 1)^2$

$$(2x - 1)\, y' = y, \qquad y(1) = 7$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = C\sqrt{2x - 1}$

Spezielle Lösung:

$$y(1) = 7, \qquad y(x) = 7\sqrt{2x - 1}$$

Aufgabe 8: $(x - 2)\, y' = y, \qquad y(0) = \frac{1}{2}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = C\,(x - 2)$

Spezielle Lösung: $y(0) = \frac{1}{2}, \qquad y(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$

Aufgabe 9: $(2x - 1)\, y' = 2y, \qquad y(0) = 3$

Allgemeine Lösung: $y(x) = C\,(2x - 1)$

Spezielle Lösung: $y(0) = 3, \qquad y(x) = 3 - 6x$

$$(x^2 - 1)\, y' = 2\, y, \qquad y(0) = 5$$

$$(x^2 - 1)\, y' = 2\, y, \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2\, dx}{x^2 - 1}$$

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

$$\ln |y| = \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + \ln |C|, \qquad y = C\, \frac{x - 1}{x + 1}$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = C\, \dfrac{x - 1}{x + 1}$

Spezielle Lösung: $\quad y(0) = 5, \qquad y = 5\, \dfrac{1 - x}{x + 1}$

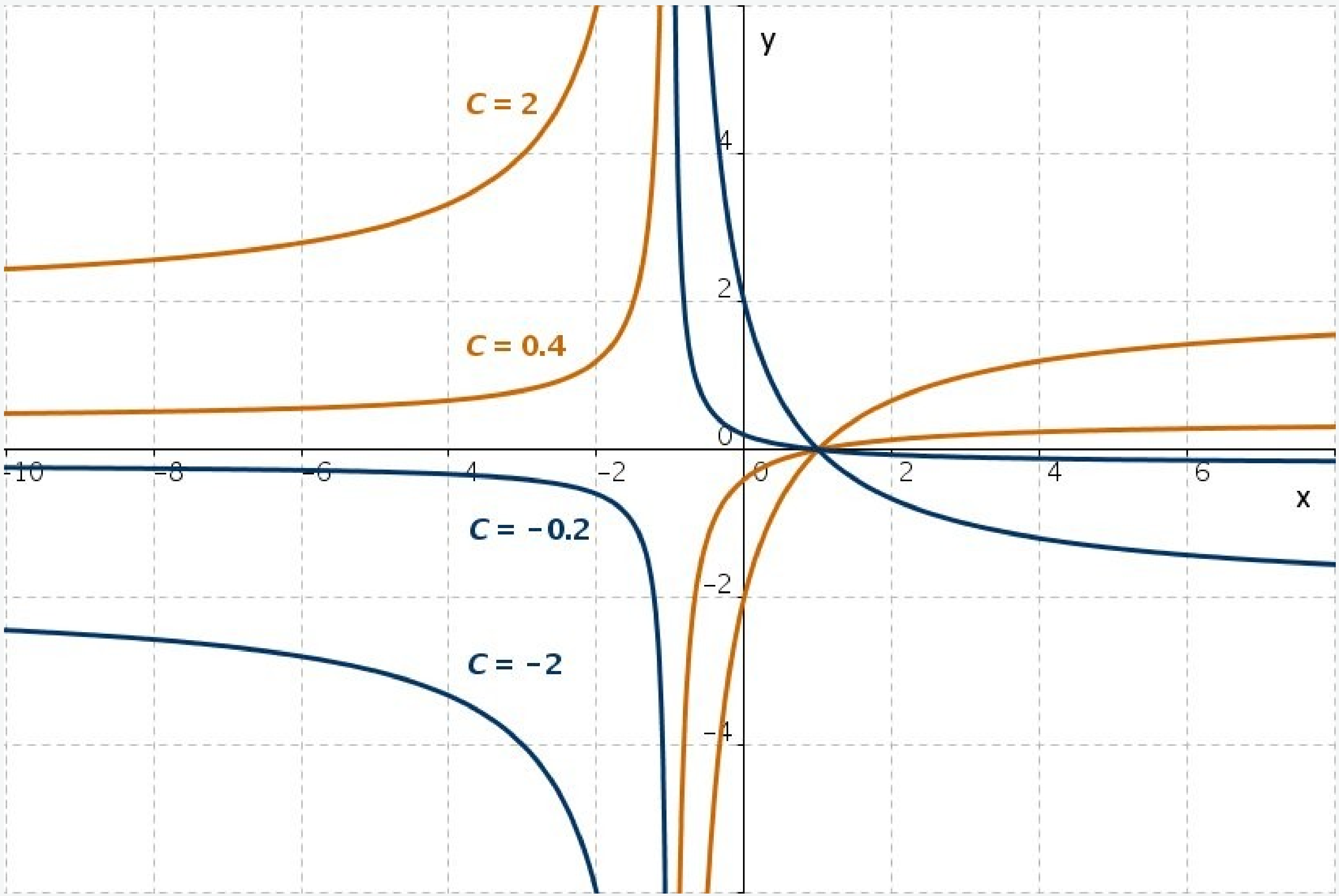


Abb. L10: Integralkurven der DGL $(x^2 - 1)\, y' = 2\, y$

$$x\,y + (x+1)\,y' = 0, \qquad 1)\ y(0) = 2, \qquad 2)\ y(-2) = -3$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x\,dx}{x+1}, \qquad \ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = -x + \ln|C(x+1)|, \qquad \ln\left|\frac{y}{C(x+1)}\right| = -x$$

$$\frac{y}{C(x+1)} = e^{-x}, \qquad y = C(x+1)\,e^{-x}$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = C(x+1)\,e^{-x}$

Spezielle Lösung: $\quad 1)\ y(0) = 2, \qquad y_1(x) = 2(x+1)\,e^{-x}$

$\quad 2)\ y(-2) = -3, \qquad y_2(x) = 3(x+1)\,e^{-x-2}$

$$2xy + (x+1)\,y' = 0, \qquad 1)\ y(0) = 1, \qquad 2)\ y(1) = 1$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = C\,(x+1)^2\, e^{-2x}$

Spezielle Lösung:

$$1)\ y(0) = 1, \qquad y_1(x) = (x+1)^2\, e^{-2x}$$

$$2)\ y(1) = 1, \qquad y_2(x) = \frac{1}{4}\,(x+1)^2\, e^{2-2x}$$

Trennung der Variablen: Lösung 13

$$x\,y + (x + 2)\,y\,' = 0, \qquad 1)\;\; y(0) = 1, \qquad 2)\;\; y(1) = 2$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = C\,(x + 2)^2\,e^{-x}$

Spezielle Lösung: $\quad 1)\;\; y(0) = 1, \qquad y_1(x) = \dfrac{1}{4}\,(x + 2)^2\,e^{-x}$

$$2)\;\; y(1) = 2, \qquad y_2(x) = \frac{2}{9}\,(x + 2)^2\,e^{\,1-x}$$

$$x\,y^2 + (x+1)\,y' = 0, \qquad 1)\ y(0) = 1, \qquad 2)\ y(1) = 1$$

Allgemeine Lösung: $$y = \frac{1}{C + x - \ln|x+1|}$$

Spezielle Lösung: $1)\ y(0) = 1,$ $$y = \frac{1}{1 + x - \ln|x+1|}$$

$2)\ y(1) = 1,$ $$y = \frac{1}{\ln 2 + x - \ln|x+1|}$$

$$y' = -x\, e^{y}, \qquad 1)\ y(0) = -2, \qquad 2)\ y(0) = 1$$

$$\int e^{-y}\, dy = -\int x\, dx, \qquad e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C, \qquad \ln\left(e^{-y}\right) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

$$y = -\ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = -\ln\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$

Spezielle Lösung: $\quad 1)\ y(0) = -2, \qquad y_1(x) = -\ln\left(\dfrac{x^2}{2} + e^2\right)$

$2)\ y(0) = 1, \qquad y_2(x) = -\ln\left(e\, x^2 + 2\right) + 1 + \ln 2$

Trennung der Variablen: Lösungen 16, 17

Aufgabe 16: $y' = -x^2 e^{y}, \quad y(0) = -3$

Allgemeine Lösung: $y(x) = -\ln\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)$

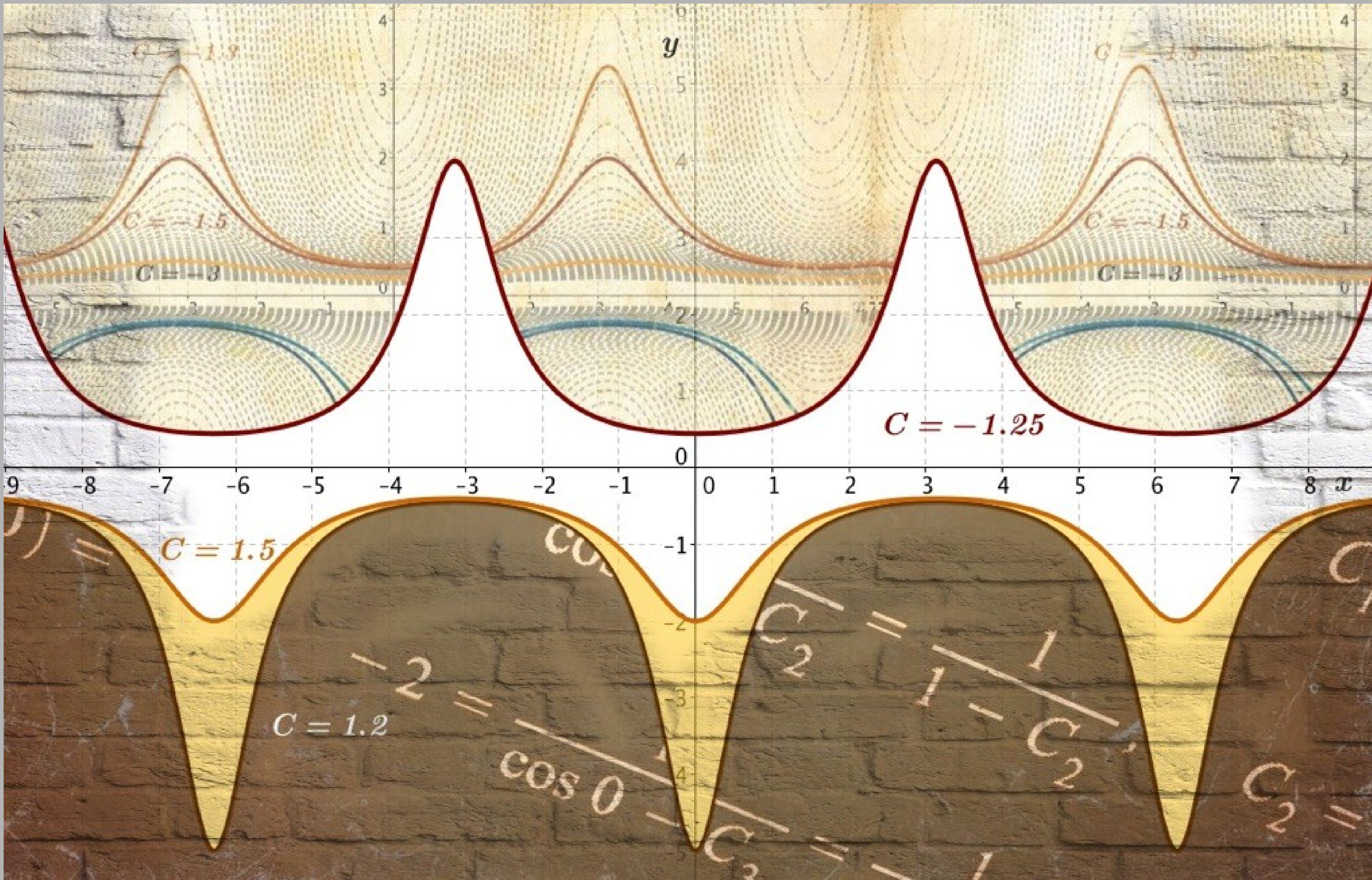
Spezielle Lösung: $y(0) = -3, \quad y(x) = -\ln\left(\dfrac{x^3}{3} + e^3\right)$

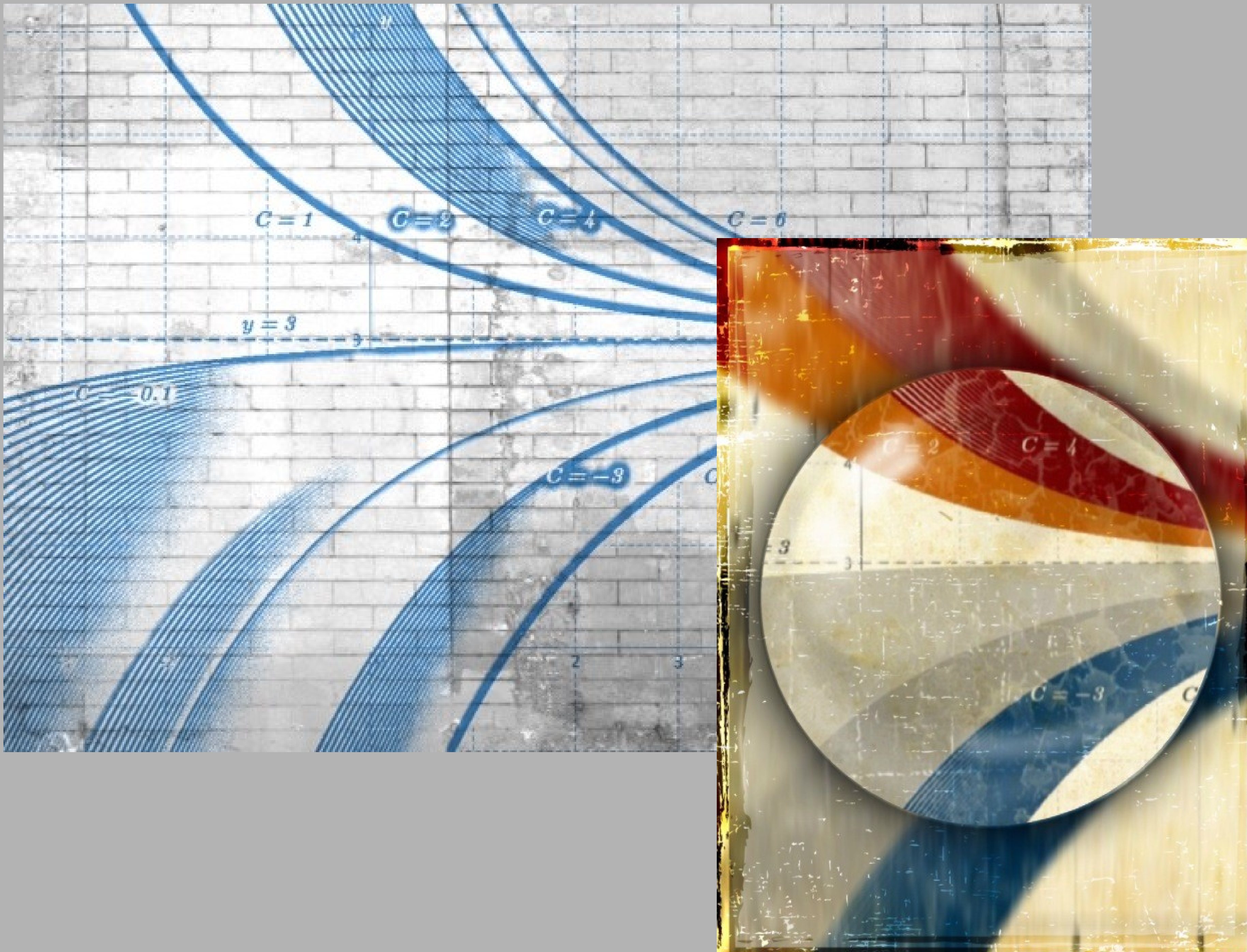
Aufgabe 17: $y' = x\, e^{y-2}, \quad 1)\ y(0) = 1, \quad 2)\ y(0) = -1$

Allgemeine Lösung: $y(x) = -\ln\left(C - \dfrac{x^2}{2e^2}\right)$

Spezielle Lösung: $1)\ y(0) = 1, \quad y_1(x) = 2 - \ln\left(e - \dfrac{x^2}{2}\right)$

$2)\ y(0) = 1, \quad y_2(x) = 2 - \ln\left(e^3 - \dfrac{x^2}{2}\right)$


y
x
C = −1.5
C = −3
C = −1.25
C = 1.5
C = 1.2
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
-1
-2
-3
-4
-5


C = 1
C = 2
C = 4
C = 6
y = 3
C = −0.1
C = −3
C = 2
C = 4
C = −3