Differentialgleichungen

Aufgaben mit Lösungen

Jörg Gayler,   Lubov Vassilevskaya

Inhaltsverzeichnis

1. Tabelle unbestimmter Integrale

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1), \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x, \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x, \qquad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| \quad (a \neq 0,\ \ |x| \neq |a|)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} \quad (a > 0)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \quad (a > 0)$$

1.1. *Integrale mit Exponentialfunktionen*

$$\int e^x\,dx = e^x, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \tag{1}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} \tag{2}$$

$$\int x\,e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) \tag{3}$$

$$\int x^2 e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) \tag{4}$$

$$\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}} \tag{5}$$

$$\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab} \ln (b+ce^{ax}) \tag{6}$$

$$\int \frac{e^{ax}\,dx}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ac} \ln (b+ce^{ax}) \tag{7}$$

1.2. *Integrale trigonometrischer Funktionen*

1.2.1. Integrale mit Sinusfunktionen

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) \tag{8}$$

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax) \tag{9}$$

$$\int \sin^3(ax)\,dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + \frac{1}{3a} \cos^3(ax) \tag{10}$$

$$\int \sin^4(ax)\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4a} \sin(2ax) + \frac{1}{32a} \sin(4ax) \tag{11}$$

$$\int x \sin(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a} \tag{12}$$

$$\int x^2 \sin(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2} \sin(ax) - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \cos(ax) \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(ax)} = -\frac{1}{a} \cot(ax) \tag{14}$$

1.2.2. Integrale mit Kosinusfunktionen

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a} \sin(ax) \tag{15}$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax) \tag{16}$$

$$\int \cos^3(ax)\,dx = \frac{1}{a} \sin(ax) - \frac{1}{3a} \sin^3(ax) \tag{17}$$

$$\int \cos^4(ax)\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4a} \sin(2ax) + \frac{1}{32a} \sin(4ax) \tag{18}$$

$$\int x \cos(ax)\,dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a} \tag{19}$$

$$\int x^2 \cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2} \cos(ax) - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \sin(ax) \tag{20}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(ax)} = \frac{1}{a} \tan(ax) \tag{21}$$

2. Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL): Grundbegriffe

A1 Eine Differentialgleichung ist gegeben. Prüfen Sie, ob gegebene Funktion die Lösung der DGL ist.

1. $y' + \frac{x+y}{x} = 0, \qquad y(x) = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$
2. $y' + \frac{y}{x} + xy^2 = 0, \qquad y(x^2 + Cx) = 1$
3. $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y - x^3 = 0, \qquad y(x) = x\sqrt{1-x^2} + x$
4. $y' = \frac{y}{x} + 2x^2 \cdot e^{x^2}, \qquad y(x) = x\left(e^{x^2} + C\right)$
5. $x = \ln y' + \sin y', \qquad x = \ln t + \sin t, \quad y = t(1 + \sin t) + \cos t$

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

3.1. Integration durch Trennung der Variablen

Die Differenzialgleichung 1. Ordnung mit getrennten Variablen hat die Gestalt

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \tag{22}$$

die Variablen x und y sind insofern “getrennt”, als die rechte Seite von Eq (22) ein Produkt zweier Faktoren ist, von denen der eine allein von x, der andere allein von y abhängt. Ganz speziell haben die folgenden Differenzialgleichungen getrennte Variablen

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad g(y) = 1, \tag{23}$$

$$\frac{dy}{dx} = g(y), \qquad f(x) = 1, \tag{24}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,y, \qquad \text{homogene lineare Differenzialgleichung} \tag{25}$$

Wie schreiben Differenzialgleichung (22) in der Form

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \tag{26}$$

Satz Sei $f(x)$ im Intervall I_x und $g(y)$ im Intervall I_y stetig, ferner sei $g(y)$ dort ständig $\neq 0$. Ist nun x_0 in I_x und y_0 in I_y, so ist die Anfangswertaufgabe

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{27}$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 *eindeutig lösbar*

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C \tag{28}$$

Die Integrationskonstante ist so zu wählen, dass die Anfangsbedingung erfüllt wird.

Für die Lösung einer Differenzialgleichung durch Trennung der Variablen gibt es folgendes *Schema*:

Erster Schritt: Man bringt die Differenzialgleichung Eq (22)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

auf die Form Eq (26)

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

Zweiter Schritt: Man integriert diese Gleichung

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

Dritter Schritt: Man löst die Gleichung nach y auf, erhält die allgemeine Lösung $y(x,\,C)$ und passt die Lösung der Anfangsbedingung an.

Lösen Sie folgende Anfangsprobleme durch Trennung der Variablen

A2

1. $2(x-1)\,dx + 3\,y^2\,dy = 0, \qquad y(2) = 1$
2. $y' = x(y-1), \qquad y(0) = \frac{1}{2}$
3. $y' + x^2(y-2) = 0, \qquad y(0) = -2$

A3

1. $y' - x^2 = 0, \qquad a)\; y(-3) = 1, \quad b)\; y(2) = 5$
2. $y' = x^2 + 4x - 3, \qquad a)\; y(1) = -2, \quad b)\; y(-3) = 3$
3. $y' = 4 + y, \qquad a)\; y(0) = 1, \quad b)\; y(1) = 3$

A4 *Beispiel:*

$$y'\,x^3 = 2y - 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx}\,x^3 = 2y - 5\,, \qquad \frac{dy}{2y-5} = \frac{dx}{x^3}\,, \qquad \int \frac{dy}{2y-5} = \int \frac{dx}{x^3}$$

$$u = 2y - 5\,, \qquad du = 2dy\,, \qquad dy = \frac{1}{2}\,du$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x^3}\,, \qquad \frac{1}{2}\,\ln|u| = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\,\ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|2y-5| = -\frac{1}{x^2} + \ln C$$

$$\ln\left|\frac{2y-5}{C}\right| = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 2y - 5 = C\,e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \Rightarrow \quad y = \tilde{C}\,e^{-\frac{1}{x^2}} + 2.5\,, \quad \tilde{C} = \frac{1}{2}\,C$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = \tilde{C}\,e^{-\frac{1}{x^2}} + 2.5$

Aufgaben:

1. $x^2\,y' = 2 + y, \qquad y(-1) = 1$
2. $x^4\,y' = 3 - 2\,y, \qquad y(1) = 2$
3. $(x^2-1)\,y' = 3 - 2\,y, \qquad a)\; y(0) = -2, \quad b)\; y(0) = 2$

3.2. Integration durch Substitution

A5

1. $y' = 4x - y$, $\quad a)\ y(2) = 4$, $\quad b)\ y(0) = -2$
2. $y' = x + y$, $\quad a)\ y(0) = 2$, $\quad b)\ y(-2) = 3$

3.2.1. Integration einer Differentialgleichung vom Typ $y' = f(y/x)$

In einigen Fällen ist es möglich, eine explizite Differenzialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x, y)$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf eine separable Differenzialgleichung 1. Ordnung zurückzuführen, die dann durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. In diesem Abschnitt behandeln wir Differenzialgleichungen von Typ

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Eine Differenzialgleichung von diesem Typ wird durch die Substitution

$$u = \frac{y}{x}, \qquad d.h. \qquad y = ux$$

gelöst. Wir differenzieren diese Gleichung nach x und erhalten:

$$y' = 1 \cdot u + x \cdot u' = u + xu'$$

(wiederum sind y und u Funktionen von x). Da $y' = f(u)$ ist, geht die Differenzialgleichung $y' = f(y/x)$ schließlich in die separable Differenzialgleichung

$$u + xu' = f(u) \qquad \text{oder} \qquad u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

über, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Anschließend erfolgt die Rücksubstitution.

A6 *Beispiel:*

$$(x - y)\,dx + x\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{y}{x}\right) dx + dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -1 + \frac{y}{x}$$

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y = xu, \qquad y' = \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = u + x \cdot u'$$

$$y' = -1 + u \quad \Leftrightarrow \quad u + x \cdot u' = -1 + u \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot u' = -1 \quad \Leftrightarrow \quad u' = -\frac{1}{x}$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x}, \qquad u = -\ln|x| + C, \qquad \frac{y}{x} = -\ln|x| + C, \qquad y = x\,(C - \ln|x|)$$

Aufgaben:

1. $xy' = y\,(\ln y - \ln x)$
2. $x^2 dy = (y^2 - xy + x^2)\,dy$

A7

1. $2x^2y' = x^2 + y^2$
2. $x\,y' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

A8 *Beispiel:*

$$xy' = y - 2x - x\,e^{\frac{y}{x}}, \qquad a)\ \ y(1) = 0, \qquad b)\ \ y(1) = -1$$

$$y' = \frac{y}{x} - 2 - e^{\frac{y}{x}}, \qquad u + x\,u' = u - 2 - e^{u}, \qquad u' = -\frac{2+e^u}{x}$$

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y = x\,u, \qquad y' = u + x\,u'$$

$$\int \frac{du}{2+e^u} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\frac{e^u}{2+e^u} = -\ln x + \ln C = \ln\left(\frac{C}{x}\right) \qquad \text{(Eq. (6))}$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1+2\,e^{-u}} = \ln\left(\frac{C}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{1}{\sqrt{1+2\,e^{-u}}} = \ln\left(\frac{C}{x}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\,e^{-u}}} = \frac{C}{x}, \qquad \frac{1}{1+2\,e^{-u}} = \frac{C^2}{x^2}, \qquad e^{-u} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{C^2} - 1\right)$$

$$y = -x\,\ln\frac{x^2 - C^2}{2\,C^2} = x\,\ln\frac{2\,C^2}{x^2 - C^2} = x\,\ln\frac{2}{\frac{x^2}{C^2} - 1} = x\,\ln\frac{2}{C_1\,x^2 - 1}, \qquad C_1 = \frac{1}{C^2}$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = x\,\ln\dfrac{2}{C_1\,x^2 - 1}$

a) $y(1) = 0$: $\quad y = x\,\ln\dfrac{2}{3\,x^2 - 1}$

b) $y(1) = -1$: $\quad y = x\,\ln\dfrac{2}{(2e+1)\,x^2 - 1}$

Aufgaben:

1. $xy' = y - x - x\,e^{\frac{y}{x}}, \qquad a)\ \ y(1) = 0, \qquad b)\ \ y(1) = -1$
2. $xy' = y - x - x\,e^{-\frac{y}{x}}, \qquad a)\ \ y(1) = 0, \qquad b)\ \ y(1) = 1$
3. $xy' = y + 3x - x\,e^{-\frac{y}{x}}, \qquad y(1) = 0$
4. $xy' = y - 4x - x\,e^{\frac{y}{x}}, \qquad a)\ \ y(1) = 0, \qquad b)\ \ y(1) = 1$

3.3. Variation der Konstanten

A9

1. $y' + y = m\,e^{-nx}, \quad y(0) = 1,$

   $a)\ m = n = 1, \quad b)\ m = 1,\ n = 2, \quad c)\ m = 2,\ n = 1$

2. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin(mx), \quad y(\pi) = 1, \quad a)\ m = 1, \quad b)\ m = 2$

3. $xy' + my = x, \quad y(1) = -1, \quad a)\ m = 1, \quad b)\ m = 2, \quad c)\ m = 4$

4. $xy' + my = x^2, \quad y(1) = 0, \quad a)\ m = 2, \quad b)\ m = -2$

5. $xy' - y = x^m, \quad y(1) = 1, \quad a)\ m = 1, \quad b)\ m = 2, \quad c)\ m = 3$

3.4. Die Bernoulli-Differentialgleichung

Die Bernoulli-Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung, die sich auf lineare zurückführen lässt.

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n \tag{29}$$

mit $n \neq 0, 1$ heißt *Bernoulli-Differentialgleichung*. Wir schließen mit den Bedingungen an die Konstante n die bisher bekannten Fälle aus (mit $n = 0$, $n = 1$ ist die Gleichung Eq. (29) linear). Die Bernoulli-Differentialgleichung (29) ist eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Mit welcher Substitution kann man die Bernoulli-Differentialgleichung auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen? Zunächst würde man versuchen, in (29) die beiden Potenzen von y zusammenzufassen, dies gelingt durch Multiplikation mit y^{-n} und führt zu y^{1-n}. Damit wird die anzuwendende Substitution plausibel:

$$u = y^{1-n} \quad (y \neq 0)\,, \qquad u' = (1-n)\,y^{-n}\,y' \tag{30}$$

Wir dividieren die beiden Seiten der Gleichung (29) durch y^n:

$$y^{-n}\,y' + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

$$y' = \frac{u'}{(1-n)\,y^{-n}} = \frac{1}{1-n}\,u'\,y^n$$

$$\frac{1}{1-n}\,u' + p(x)\,u = q(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad u' + (1-n)\,p(x)\,u = (1-n)\,q(x)$$

A10 <u>*Beispiel:*</u> Wir bestimmen die Lösung der DGL:

$$y' + 2xy = 2xy^2$$

Diese Gleichung ist eine Bernoulli-Differenzialgleichung (29):

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n\,.$$

Mit der Substitution

$$n = 2, \quad u = y^{1-n} = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0), \quad u' = (1-n)\, y^{-n}\, y', \quad u' = -\frac{y'}{y^2}$$

kann man die Bernoulli-Differenzialgleichung auf eine lineare Differenzialgleichung zurückführen

$$y' + 2xy = 2xy^2 \quad \left(\times \frac{1}{y^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^2} + \frac{2x}{y} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad -u' + 2xu = 2x \quad \Leftrightarrow$$

$$u' = 2x(u-1) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u-1} = 2 \int x\, dx \quad \Rightarrow \quad \ln|u-1| = x^2 + \ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{u-1}{C}\right| = x^2 \quad \Rightarrow \quad u = 1 + C\, e^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = 1 + C\, e^{x^2}, \quad y = \frac{1}{1 + C\, e^{x^2}}$$

Aufgaben: Bestimmen Sie die Lösungen folgender Bernoulli-Differenzialgleichungen:

$$a) \quad y' - xy = -3xy^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$$

$$b) \quad y' + 2xy = 2xy^2, \quad y(0) = 2$$

$$c) \quad y' + xy = x^3 y^2, \quad y(0) = 1, \quad y(0) = -3$$

A11 *Beispiel:*

$$y' - \frac{2y}{x} = -x^2\, y^2 \quad : \frac{1}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^2} - \frac{2}{xy} = -x^2$$

$$n = 2, \quad u = y^{1-n} = \frac{1}{y}, \quad u' = -\frac{y'}{y^2} \quad \Leftrightarrow \quad u' + \frac{2u}{x} = x^2$$

$$u' + \frac{2u}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u' = -\frac{2u}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = -2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -2 \ln|x| + \ln|C| = \ln \frac{C}{x^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{C}{x^2}, \quad C \to C(x), \quad u = \frac{C(x)}{x^2}$$

$$u = \frac{C(x)}{x^2}, \quad u' = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} \quad \to \quad u' + \frac{2u}{x} = x^2$$

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2C(x)}{x^3} = x^2 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = x^4, \quad C(x) = \frac{x^5}{5} + C_1$$

$$u = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{x^3}{5} + \frac{C_1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{x^3}{5} + \frac{C_1}{x^2} = \frac{x^5 + 5C_1}{5x^2}, \quad y = \frac{5x^2}{x^5 + 5C_1}$$

Aufgaben:

$$a) \quad y' - \frac{y}{x} = 2\, x^2\, y^2, \quad y(1) = 2, \quad y(1) = -2$$

$$b) \quad y' - \frac{y}{x} = 4x^3 y^2, \quad y(1) = 1, \quad y(1) = -1$$

$$c) \quad y' - \frac{y}{x} = 2\, x^4 y^2, \quad y(1) = 1, \quad y(1) = -1$$

4. Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

4.1. Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

A12 Lösen Sie folgende DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$
\begin{array}{lll}
a) & y'' - 2y' + 5y = 0, & y(0) = -2, \quad y'(0) = -2 \\
b) & y'' - 2y' + 10y = 0, & y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \\
c) & y'' + 4y' + 12y = 0, & y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \\
d) & y'' + 6y' + 9y = 0, & y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \\
e) & y'' + 4y' + 4y = 0, & y(0) = -1, \quad y'(0) = 2 \\
f) & y'' + 4y' - 3y = 0, & y(0) = 1, \quad y'(0) = 0
\end{array}
$$

5. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Grundbegriffe: Lösungen

L1

5. $x = \ln y' + \sin y', \qquad x = \ln t + \sin t, \qquad y = t\,(1 + \sin t) + \cos t$

$$y' = y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$x'(t) = \frac{1}{t} + \cos t, \qquad y'(t) = 1 + \sin t - \sin t + t\,(1 + \cos t) = 1 + t \cos t$$

$$y' = \frac{1 + t \cos t}{\frac{1}{t} + \cos t} = \frac{1 + t \cos t}{\frac{1}{t}\,(1 + t \cos t)} = t, \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln t + \sin t = \ln t + \sin t$$

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

6.1. Integration durch Trennung der Variablen

L2

1. $2\,(x-1)\,dx + 3\,y^2\,dy = 0, \qquad y\,(2) = 1$

$$2\int (x-1)\,dx + 3\int y^2\,dy = 0, \qquad (x-1)^2 + y^3 = C$$

Allgemeine Lösung: $\quad (x-1)^2 + y^3 = C$

$y\,(2) = 1: \quad C = 2, \quad (x-1)^2 + y^3 = 2$

2. $y' = x\,(y-1), \qquad y\,(0) = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int x\,dx, \qquad \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + \ln|C|, \qquad \ln\left|\frac{y-1}{C}\right| = \frac{x^2}{2}$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = 1 + C\,e^{\frac{x^2}{2}}$

$y\,(0) = \frac{1}{2}: \quad C = -\frac{1}{2}, \quad y = 1 - \frac{1}{2}\,e^{\frac{x^2}{2}}$

3. $y' + x^2\,(y-2) = 0, \qquad y\,(0) = -2$

$$\int \frac{dy}{y-2} = -\int x^2\,dx, \qquad \ln|y-2| = -\frac{x^3}{3} + \ln|C|$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = 2 + C\,e^{-\frac{x^3}{3}}$

$y\,(0) = -2: \quad C = -4, \quad y = 2 - 4\,e^{-\frac{x^3}{3}}$

L3

1. $y' - x^2 = 0, \qquad a)\ y(-3) = 1, \quad b)\ y(2) = 5$

   Allgemeine Lösung: $\quad y = \dfrac{x^3}{3} + C$

   $a)\ y(-3) = 1: \quad y = \dfrac{x^3}{3} + 10, \qquad b)\ y(2) = 5: \quad y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{7}{3}$

2. $y' = x^2 + 4x - 3, \qquad a)\ y(1) = -2, \quad b)\ y(-3) = 3$

   Allgemeine Lösung: $\quad y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + C$

   $a)\ y(1) = -2: \quad y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x - \dfrac{4}{3}$

   $b)\ y(-3) = 3: \quad y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x - 15$

3. $y' = 4 + y, \qquad a)\ y(0) = 1, \quad b)\ y(1) = 3$

   Allgemeine Lösung: $\quad y = C\,e^x - 4$

   $a)\ y(0) = 1: \quad y = 5\,e^x - 4, \qquad b)\ y(1) = 3: \quad y = \dfrac{7}{e}\,e^x - 4 = 7\,e^{x-1} - 4$

L4

1. $x^2 y' = 2 + y, \qquad y(-1) = 1$

   Allgemeine Lösung: $\quad y = C\,e^{-\frac{1}{x}} - 2$

   $y(-1) = 1: \quad y = \dfrac{3}{e}\,e^{-\frac{1}{x}} - 2 = 3\,e^{-\frac{1}{x}-1} - 2$

2. $x^4 y' = 3 - 2y, \qquad y(1) = 2$

   Allgemeine Lösung: $\quad y = C\,e^{\frac{2}{3x^3}} + \dfrac{3}{2}$

   $y(1) = 2: \quad y = \dfrac{1}{2}\,e^{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^3}-1\right)} + \dfrac{3}{2}$

3. $(x^2 - 1)\,y' = 3 - 2y, \qquad a)\ y(0) = -2, \quad b)\ y(0) = 2$

   Allgemeine Lösung: $\quad y = \dfrac{3}{2} + C \cdot \dfrac{1+x}{1-x},$

   $a)\ y(0) = -2: \quad y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{1+x}{1-x},$

   $b)\ y(0) = 2: \quad y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1+x}{1-x}.$

6.2. Integration durch Substitution

L5

1. $y' = 4x - y, \qquad a)\ \ y\,(2) = 4, \qquad b)\ \ y\,(0) = -2$

$$u = 4x - y, \qquad \frac{du}{dx} = 4 - \frac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad u' = 4 - y'$$

$y' = 4x - y = u$ in Eq. $u' = 4 - y'$ einsetzen: $u' = 4 - u$

$$\frac{du}{dx} = 4 - u, \qquad \int \frac{du}{4 - u} = \int dx, \qquad \ln\,(4 - u) = x + \ln C, \qquad 4 - u = C\,e^{x}$$

weiter folgt die Rücksubstitution

Allgemeine Lösung: $\quad y = C\,e^{-x} + 4\,x - 4$

$a)\ \ y\,(2) = 4\ :\quad y = 4\,x - 4, \qquad b)\ \ y\,(0) = -2\ :\quad y = 2\,e^{-x} + 4\,x - 4$

2. $y' = x + y, \qquad a)\ \ y\,(0) = 2, \qquad b)\ \ y\,(-2) = 3$

Allgemeine Lösung: $\quad y = C\,e^{x} - x - 1$

$a)\ \ y\,(0) = 2\ :\quad y = 3\,e^{x} - x - 1, \qquad b)\ \ y\,(-2) = 3\ :\quad y = 2\,e^{x+2} - x - 1$

L6

1. $xy' = y\,(\ln y - \ln x) \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x} = u\,\ln u$

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y = xu, \qquad y' = \frac{dy}{dx} = u + x\,\frac{du}{dx} = u + x \cdot u'$$

$$x\,u' = x\,\frac{du}{dx} = u\,(\ln u - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{du}{u\,(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$v = \ln u - 1, \qquad v' = \frac{dv}{du} = \frac{1}{u}, \qquad du = u\,dv, \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|, \qquad v = C\,x \quad \Leftrightarrow \quad \ln u - 1 = C\,x \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = 1 + C\,x, \qquad \frac{y}{x} = e^{1+C\,x}, \qquad y = x\,e^{1+C\,x}$$

2. $x^2 dy = (y^2 - xy + x^2)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} + 1, \qquad u = \frac{y}{x}$

$$u + x \cdot u' = u^2 - u + 1, \qquad x \cdot u' = u^2 - 2u + 1 = (u - 1)^2, \qquad \frac{u'}{(u - 1)^2} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{du}{(u - 1)^2} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{d\tau}{\tau^2} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \tau = u - 1, \quad d\tau = du$$

$$-\frac{1}{\tau} = \ln|\,C\,x\,|, \qquad \tau = -\frac{1}{\ln|\,C\,x\,|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{\ln|\,C\,x\,|}$$

$$y = x - \frac{x}{\ln|\,C\,x\,|}$$

L7

1. $2\,x^2\,y' = x^2 + y^2, \quad 2\,y' = 1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2, \quad u = \dfrac{y}{x}, \quad 2\,(u + x\,u') = 1 + u^2$

   $$x \cdot u' = \frac{1}{2}\,(1+u^2) - u = \frac{1}{2}\,(1 - 2u + u^2) = \frac{1}{2}\,(u-1)^2$$

   $$x \cdot u' = \frac{1}{2}\,(u-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\,(u-1)^2, \qquad \int \frac{du}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

   $$\int \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2}\,\ln|x| + \frac{1}{2}\,\ln|C| = \frac{1}{2}\,\ln|Cx|, \quad \tau = -\frac{2}{\ln|Cx|}, \quad \tau = u - 1$$

   $$\frac{y}{x} - 1 = -\frac{2}{\ln|Cx|}, \qquad y = x - \frac{2}{\ln|Cx|}$$

2. $x\,y' = y + \sqrt{y^2 - x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1}$

   $$u = \frac{y}{x}, \qquad y = x\,u, \qquad y' = u + x \cdot u'$$

   $$u + x\,u' = u + \sqrt{u^2-1}, \quad x \cdot \frac{du}{dx} = \sqrt{u^2-1}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \int \frac{dx}{x}$$

   $$\ln\,|u + \sqrt{u^2-1}| = \ln\,|Cx|, \quad u + \sqrt{u^2-1} = Cx, \quad \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Cx$$

   $$y + \sqrt{y^2 - x^2} = C\,x^2, \qquad y = \pm x$$

   $$\sqrt{y^2 - x^2} = C\,x^2 - y, \quad \left(\sqrt{y^2-x^2}\right)^2 = \left(C\,x^2 - y\right)^2, \quad y = \frac{1}{2}\left(C\,x^2 + \frac{1}{C}\right)$$

Bei der Trennung der Variablen haben wir durch Wurzel $\sqrt{u^2-1}$ dividiert und dabei Löseungen mit Wurzel $\sqrt{u^2-1}$ verloren.

L8

1. $xy' = y - x - x\,e^{\frac{y}{x}}, \qquad a)\;\; y(1) = 0, \qquad b)\;\; y(1) = -1$

   Allgemeine Lösung: $\quad y = -x\,\ln(C\,x\, -\, 1) = x\,\ln\dfrac{1}{C\,x\, -\, 1}$

   $a)\;\; y(1) = 0\;: \qquad y = x\,\ln\dfrac{1}{2x-1}$

   $b)\;\; y(1) = -1\;: \qquad y = x\,\ln\dfrac{1}{(1+e)\,x-1}$

2. $xy' = y - x - x\,e^{-\frac{y}{x}}, \qquad a)\;\; y(1) = 0, \qquad b)\;\; y(1) = 1$

   Allgemeine Lösung: $\quad y = -x\left(\ln\left(\dfrac{x}{1-x\,e^{C}}\right) + C\right) = x\left(\ln\left(\dfrac{1}{x} - e^{C}\right) - C\right)$

   $a)\;\; y(1) = 0\;: \qquad y = -x\,\ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right) = x\,\ln\left(\dfrac{2}{x} - 1\right)$

   $b)\;\; y(1) = 1\;: \qquad y = -x\,\ln\left(\dfrac{x}{1+e-x}\right) = x\,\ln\left(\dfrac{1+e}{x} - 1\right)$

3. $xy' = y + 3x - x\,e^{-\frac{y}{x}}, \qquad y(1) = 0$

   Allgemeine Lösung: $\quad y = -x\,\ln\left(\dfrac{3}{1-C\,x^3}\right) = x\,\ln\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{C}{3}\,x^3\right)$

   $y(1) = 0\;: \qquad y = -x\,\ln\left(\dfrac{3}{1+2\,x^3}\right) = x\,\ln\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\,x^3\right)$

4. $xy' = y - 4x - x\,e^{\frac{y}{x}}, \qquad y(1) = 0$

   Allgemeine Lösung: $\quad y = x\,\ln\left(\dfrac{4}{C\,x^4-1}\right)$

   $a)\;\; y(1) = 0\;: \qquad y = x\,\ln\left(\dfrac{4}{5\,x^4-1}\right)$

   $b)\;\; y(1) = 1\;: \qquad y = x\left(1 + \ln\left(\dfrac{4}{(4+e)\,x^4 - e}\right)\right)$

6.3. Variation der Konstanten

L9

1. a) $m = n = 1: \quad y' + y = e^{-x}, \qquad y = (x + C)\, e^{-x}$

   $y(0) = 1: \quad y = (1 + x)\, e^{-x}$

   b) $m = 1,\ n = 2: \quad y' + y = e^{-2x}, \qquad y = (-\, e^{-x} + C)\ e^{-x}$

   $y(0) = 1: \quad y = (2 - e^{-x})\, e^{-x}$

   c) $m = 2,\ n = 1: \quad y' + y = 2\, e^{-x}, \qquad y = (2\, x + C)\, e^{-x}$

   $y(0) = 1: \quad y = (1 + 2\, x)\, e^{-x}$

2. a) $m = 1: \quad y' + \frac{y}{x} = \sin\, x, \qquad y = \frac{1}{x}\, (\sin\, x - x\, \cos\, x + C)$

   $y(\pi) = 1: \quad y = \frac{1}{x}\, (\sin\, x - x\, \cos\, x)$

   b) $m = 2: \quad y' + \frac{y}{x} = \sin(2x), \qquad y = \frac{1}{4x}\, (\sin(2x) - 2x\, \cos(2x) + 4\, C)$

   $y(\pi) = 1: \quad y = \frac{1}{4x}\, \sin(2x) - \frac{1}{2}\, \cos(2x) + \frac{3\pi}{2x}$

3. a) $m = 1: \quad xy' + y = x, \qquad y = \frac{x}{2} - \frac{C}{x}, \qquad y(1) = -1: \quad y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2x}$

   b) $m = 2: \quad xy' + 2\, y = x, \qquad y = \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}, \qquad y(1) = -1: \quad y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3x^2}$

   c) $m = 4: \quad xy' + 4\, y = x, \qquad y = \frac{x}{5} + \frac{C}{x^4}, \qquad y(1) = -1: \quad y = \frac{x}{5} - \frac{6}{5x^4}$

4. a) $m = 2: \quad xy' + 2\, y = x^2, \qquad y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}, \qquad y(1) = 0: \quad y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4\, x^2}$

   b) $m = -2: \quad xy' - 2\, y = x^2, \qquad y = (\ln\, x + C)\, x^2, \qquad y(1) = 0: \quad y = x^2\, \ln\, x$

5. a) $m = 1: \quad xy' - y = x, \qquad y = (\ln\, x + C)\, x, \qquad y(1) = 1: \quad y = (\ln\, x + 1)\, x$

   b) $m = 2: \quad xy' - y = x^2, \qquad y = (x + C)\, x, \qquad y(1) = 1: \quad y = x^2$

   c) $m = 3: \quad xy' - y = x^3, \qquad y = \frac{x^3}{2} + C\, x, \qquad y(1) = 1: \quad y = \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2}$

6.4. Die Bernoulli-Differentialgleichung

L10

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^2, \qquad n = 2, \qquad u = y^{1-n} = \frac{1}{y}, \qquad u' = (1-n)\,y^{-n}\,y' = -\frac{y'}{y^2}$$

a) $p(x) = -x, \quad q(x) = -3x, \quad y' - xy = -3xy^2 \quad \Rightarrow \quad u' + xu = 3x$

$$y(0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad u(0) = 2, \quad u = \frac{1}{y} = 3 - e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3 - e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$y(0) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad u(0) = -2, \quad u = \frac{1}{y} = 3 - 5e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3 - 5\,e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

b) $p(x) = 2x, \quad q(x) = 2x, \quad y' + 2xy = 2xy^2 \quad \Rightarrow \quad u' - 2xu = -2x$

$$y = \frac{1}{1 + C\,e^{x^2}}, \qquad y(0) = 2: \quad y = \frac{2}{2 - e^{x^2}}$$

c) $p(x) = x, \quad q(x) = x^3, \quad y' + xy = x^3y^2 \quad \Rightarrow \quad u' - xu = -x^3$

homogene lineare DGL: $u' - xu = 0, \quad \int \frac{du}{u} = \int x\,dx, \quad \ln|u| = \frac{x^2}{2} + \ln|C|$

$$u = C\,e^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \to C(x), \quad u = C(x)\,e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{in DGL:} \quad u' - xu = -x^3$$

$$C'(x)\,e^{\frac{x^2}{2}} = -x^3, \qquad C'(x) = -x^3\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$C(x) = -\int x^3\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -2\int z\,e^z\,dz = 2\,e^z\,(1-z) + C_1 = e^{-\frac{x^2}{2}}\,(2 + x^2) + C_1 \qquad \left(z = \frac{x^2}{2}\right)$$

$$u = C(x)\,e^{\frac{x^2}{2}} = 2 + x^2 + C_1\,e^{\frac{x^2}{2}}, \qquad y = \frac{1}{2 + x^2 + C_1\,e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$y(0) = 1: \quad y = \frac{1}{2 + x^2 - e^{\frac{x^2}{2}}}, \qquad y(0) = -3: \quad y = \frac{1}{2 + x^2 - \frac{7}{3}\,e^{\frac{x^2}{2}}}$$

L11

a) $y' - \frac{y}{x} = 2x^2y^2, \quad p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = 2\,x^2: \quad y = \frac{2x}{2\,C - x^4}$

$$y(1) = 2, \quad y = \frac{2x}{2 - x^4}, \qquad y(1) = -2, \quad y = -\frac{2}{x^3}$$

b) $y' - \frac{y}{x} = 4x^3y^2, \quad p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = 4\,x^3: \quad y = \frac{5x}{5\,C - 4x^5}$

$$y(1) = 1, \quad y = \frac{5x}{9 - 4x^5}, \qquad y(1) = -1, \quad y = -\frac{5x}{4x^5 + 1}$$

c) $y' - \frac{y}{x} = 2\,x^4y^2, \quad p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = 2\,x^4: \quad y = \frac{3x}{3\,C - x^6}$

$$y(1) = 1, \quad y = \frac{3x}{4 - x^6}, \qquad y(1) = -1, \quad y = -\frac{3x}{x^6 + 2}$$

7. Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

7.1. Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

L12

a) $y'' - 2y' + 5y = 0, \qquad y(0) = -2, \quad y'(0) = -2$

$y(x) = (C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x))\, e^x$

$y(0) = -2, \quad y'(0) = -2: \quad y(x) = -2\, e^x \cos(2x)$

b) $y'' - 2y' + 10y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

$y(x) = (C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x))\, e^x$

$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0: \quad y(x) = \left(-\frac{2}{3} \sin(3x) + 2 \cos(3x)\right) e^x$

c) $y'' + 4y' + 12y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

$y(x) = \left(C_1 \sin(2\sqrt{2}x) + C_2 \cos(2\sqrt{2}x)\right) e^{-2x}$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2: \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-2x} \sin(2\sqrt{2}x)$

d) $y'' + 6y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

$y(x) = (C_1 + C_2\, x)\, e^{-3x}$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1: \quad y(x) = (1 + 4x)\, e^{-3x}$

e) $y'' + 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$

$y(x) = (C_1 + C_2\, x)\, e^{-2x}$

$y(0) = -1, \quad y'(0) = 2: \quad y(x) = -e^{-2x}$

f) $y'' + 4y' - 3y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

$y(x) = C_1\, e^{(-2+\sqrt{7})\,x} + C_2\, e^{-(2+\sqrt{7})\,x}$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0: \quad y(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) e^{(-2+\sqrt{7})\,x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) e^{-(2+\sqrt{7})\,x}$