Inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

mit konstanten Koeffizienten, Teil 3

Ma 2 – Lubov Vassilevskaya

Die Störfunktion ist Exponentialfunktion

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(x), \qquad g(x) = e^{c\,x}$$

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad \rightarrow \qquad y_0(x)$$

1) c ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung

$$y_p = C_3\,e^{c\,x}$$

2) c ist einfache Lösung der charakteristischen Gleichung

$$y_p = C_3\,x\,e^{c\,x}$$

3) c ist doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung

$$y_p = C_3\,x^2\,e^{c\,x}$$

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

Aufgabe 1: Lösen Sie folgende Differentialgleichung für $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

$$a)\ y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$$

$$b)\ y'' + 2y' - 3y = 2e^{-3x}$$

$$c)\ y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$$

Aufgabe 2:

$$a)\ y'' + 3y' + 2y = e^{-3x}, \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = 1$$

$$b)\ y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 0$$

$$c)\ y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

Aufgabe 3: Lösen Sie folgende Differentialgleichung für $y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

$$a)\ y'' + \frac{3}{2}y' - y = 2e^{-x}$$

$$b)\ y'' + \frac{3}{2}y' - y = 2e^{-2x}$$

$$c)\ y'' - y' + \frac{1}{4}y = 2e^{-x/2}$$

Aufgabe 4: Lösen Sie folgende Differentialgleichung für $y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$

$a)\ y'' + 2y' = -3e^{-x}$

$b)\ y'' + 2y' = -3e^{-2x}$

$$a)\ y'' + 2y' - 3y = e^{2x}, \qquad g(x) = e^{2x}, \qquad c = 2$$

$$y_0'' + 2y_0' - 3y_0 = 0, \qquad y_0 = e^{rx}$$

$$y_0 = e^{rx}: \qquad r^2 + 2r - 3 = 0, \qquad r_1 = -3, \qquad r_2 = 1$$

$$y_0(x) = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x} = C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^{x}$$

$$c = 2, \qquad r_1 \neq c, \qquad r_2 \neq c$$

$$y_p(x) = C_3 e^{2x}, \qquad y_p'(x) = 2C_3 e^{2x}, \qquad y_p''(x) = 4C_3 e^{2x}$$

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) - 3y_p(x) = e^{2x}$$

$$(4 + 4 - 3)\, C_3 e^{2x} = e^{2x}, \qquad 5C_3 = 1, \qquad C_3 = \frac{1}{5}$$

Allgemeine Lösung:

$$y_{AL}(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^{x} + \frac{1}{5}\, e^{2x}$$

Spezielle Lösung:

$$y_{SL}(x) = \frac{1}{5}\,(e^{2x} - e^{-3x})$$

$$b)\ y'' + 2y' - 3y = 2e^{-3x}, \qquad c = -3$$

$$y_0'' + 2y_0' - 3y_0 = 0, \qquad y_0 = e^{rx}$$

$$y_0 = e^{rx}: \qquad r^2 + 2r - 3 = 0, \qquad r_1 = -3, \quad r_2 = 1$$

$$y_0(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$$

$$r_1 = c = -3, \qquad y_p = C_3 x e^{-3x} = -\frac{1}{2} x e^{-3x}$$

$$y_{AL}(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{2} x e^{-3x}$$

$$y_{SL}(x) = \frac{1}{8}\left(3e^{x} - (4x + 3)e^{-3x}\right)$$

$$c)\ y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$$

$$y_{AL}(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + 2x^2 e^{-x} = (C_1 + C_2 x + 2x^2)e^{-x}$$

$$y_{SL}(x) = x(2x + 1)e^{-x}$$

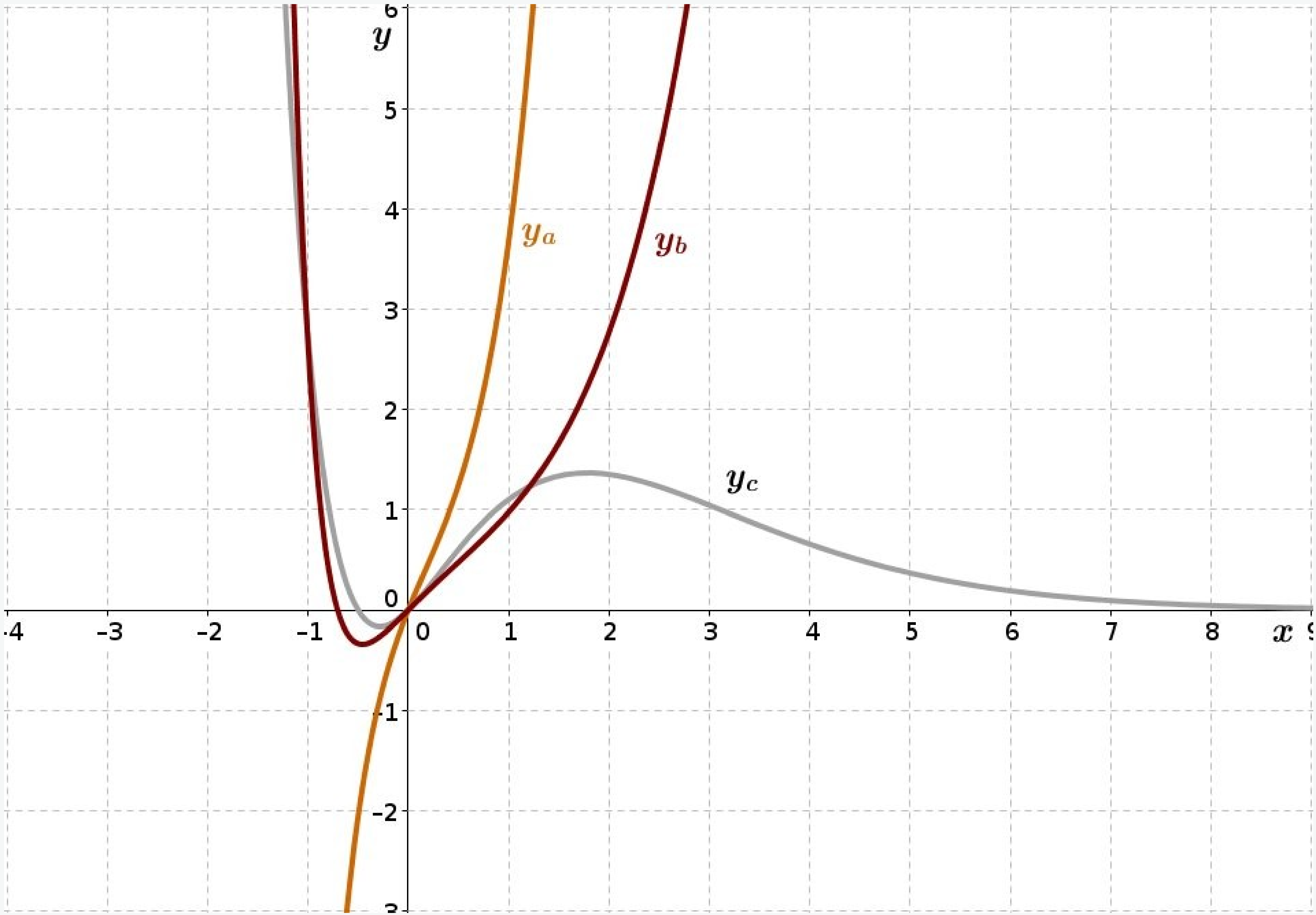


Abb. 1L: Die Integralkurven der Differentialgleichungen der Aufgabe, die der Anfangsbedingung y (0) = 0, y'(0) = 1 entsprechen

$$y_a(x) = \frac{1}{5}\left(e^{2x} - e^{-3x}\right), \quad y_b(x) = \frac{1}{8}\left(3e^{x} - (4x+3)e^{-3x}\right), \quad y_c(x) = x(2x+1)e^{-x}$$

$$a)\ y'' + 3y' + 2y = e^{-3x}, \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = 1$$

$$y_{AL}(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{-x} + \frac{1}{2}\, e^{-3x}$$

$$y_{SL}(x) = \frac{1}{2}\, e^{-3x} - e^{-2x} - \frac{1}{2}\, e^{-x}$$

$$b)\ y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 0$$

$$y_{AL}(x) = y_0(x) + y_p(x) = (C_1 - x)\, e^{-2x} + C_2\, e^{-x}$$

$$y_{SL}(x) = (1 - x)\, e^{-2x} - 3\, e^{-x}$$

$$c)\ y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

$$y_{AL}(x) = y_0(x) + y_p(x) = \left(C_1 + C_2\, x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-2x}$$

$$y_{SL}(x) = \frac{1}{2}\, x\,(x + 2)\, e^{-2x}$$

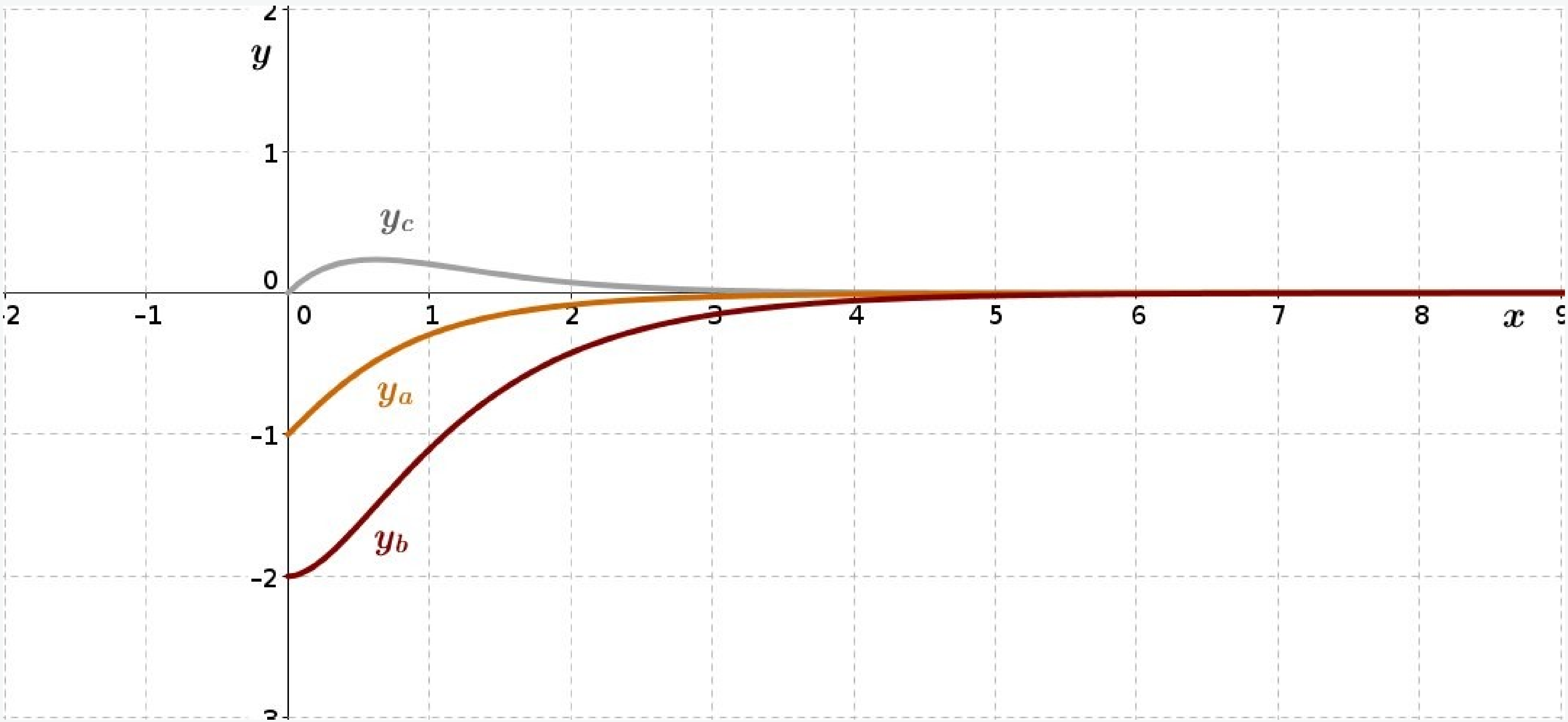


Abb. 2L: Die Integralkurven der Differentialgleichungen der Aufgabe

$$y_a(x) = \frac{1}{2}\, e^{-3x} - e^{-2x} - \frac{1}{2}\, e^{-x}$$

$$y_b(x) = (1 - x)\, e^{-2x} - 3\, e^{-x}$$

$$y_c(x) = \frac{1}{2}\, x\,(x + 2)\, e^{-2x}$$

$$a)\ y'' + \frac{3}{2}\, y' - y = 2\, e^{-x}$$

$$y_{AL}(x) = C_1\, e^{\frac{x}{2}} + C_2\, e^{-2x} - \frac{4}{3}\, e^{-x}, \qquad y_{SL}(x) = \frac{4}{3}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-x}\right)$$

$$b)\ y'' + \frac{3}{2}\, y' - y = 2\, e^{-2x}$$

$$y_{AL}(x) = C_1\, e^{\frac{x}{2}} + C_2\, e^{-2x} - \frac{4}{5}\, x\, e^{-2x}$$

$$y_{SL}(x) = \frac{28}{25}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-2x}\right) - \frac{4}{5}\, x\, e^{-2x}$$

$$c)\ y'' - y' + \frac{1}{4}\, y = 2\, e^{-x/2}$$

$$y_{AL}(x) = \left(C_1 + C_2\, x\right) e^{\frac{x}{2}} + 2\, e^{-x/2}$$

$$y_{SL}(x) = 2\,(2x - 1)\, e^{\frac{x}{2}} + 2\, e^{-x/2}$$

$$a)\ y'' + 2y' = -3e^{-x}, \quad g(x) = -3e^{-x}, \quad c = -1$$

$$y_0'' + 2y_0' = 0, \quad y_0(x) = e^{rx}, \quad r^2 + 2r = 0, \quad r_1 = -2, \quad r_2 = 0$$

$$y_0(x) = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x} = C_1\, e^{-2x} + C_2 e^0 = C_1\, e^{-2x} + C_2$$

$$c = -1, \quad r_1 \neq c, \quad r_2 \neq c$$

$$y_p(x) = C_3 e^{-x}, \quad y_p'(x) = -C_3 e^{-x}, \quad y_p''(x) = C_3 e^{-x}$$

$$y_p'' + 2y_p' = -3e^{-x}, \quad C_3 e^{-x} - 2C_3 e^{-x} = -3e^{-x}$$

$$C_3 - 2C_3 = -3, \quad C_3(1-2) = -3, \quad C_3 = 3, \quad y_p(x) = 3e^{-x}$$

Allgemeine Lösung:

$$y_{AL}(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1\, e^{-2x} + C_2 + 3e^{-x}$$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = -1, \ y'(0) = 1: \quad y_{SL}(x) = -2e^{-2x} + 3e^{-x} - 2$$

Lösung 4a

$$y_{AL}(x) = C_1\, e^{-2x} + C_2 + 3\, e^{-x}$$

1) $y(0) = -1,\ \ y'(0) = 1:\qquad y_{SL}(x) = -2\, e^{-2x} + 3\, e^{-x} - 2$

2) $y(0) = -1,\ \ y'(0) = 2:\qquad y_{SL}(x) = -\dfrac{5}{2}\, e^{-2x} + 3\, e^{-x} - \dfrac{3}{2}$

3) $y(0) = -1,\ \ y'(0) = 10:\qquad y_{SL}(x) = -\dfrac{13}{2}\, e^{-2x} + 3\, e^{-x} + \dfrac{5}{2}$

Lösung 4b

$$y'' + 2y' = -3e^{-2x}, \quad g(x) = -3e^{-2x}, \quad c = -2$$

$$y_0'' + 2y_0' = 0, \quad y_0(x) = e^{rx}, \quad r^2 + 2r = 0, \quad r_1 = -2, \quad r_2 = 0$$

$$y_0(x) = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x} = C_1\, e^{-2x} + C_2$$

$$c = -2, \quad r_1 = c, \quad r_2 \neq c$$

$$y_p(x) = C_3\, x\, e^{-2x}, \quad y_p'(x) = C_3(1 - 2x)\, e^{-2x}$$

$$y_p''(x) = 4C_3(x - 1)\, e^{-2x}$$

$$y_p'' + 2y_p' = -3e^{-2x}, \quad 4C_3(x-1)e^{-2x} + 2C_3(1-2x)e^{-2x} = -3e^{-2x}$$

$$4C_3(x - 1) + 2C_3(1 - 2x) = -3, \quad -2C_3 = -3, \quad C_3 = \frac{3}{2}$$

$$y_p(x) = C_3\, x\, e^{-2x} = \frac{3}{2}\, x\, e^{-2x}$$

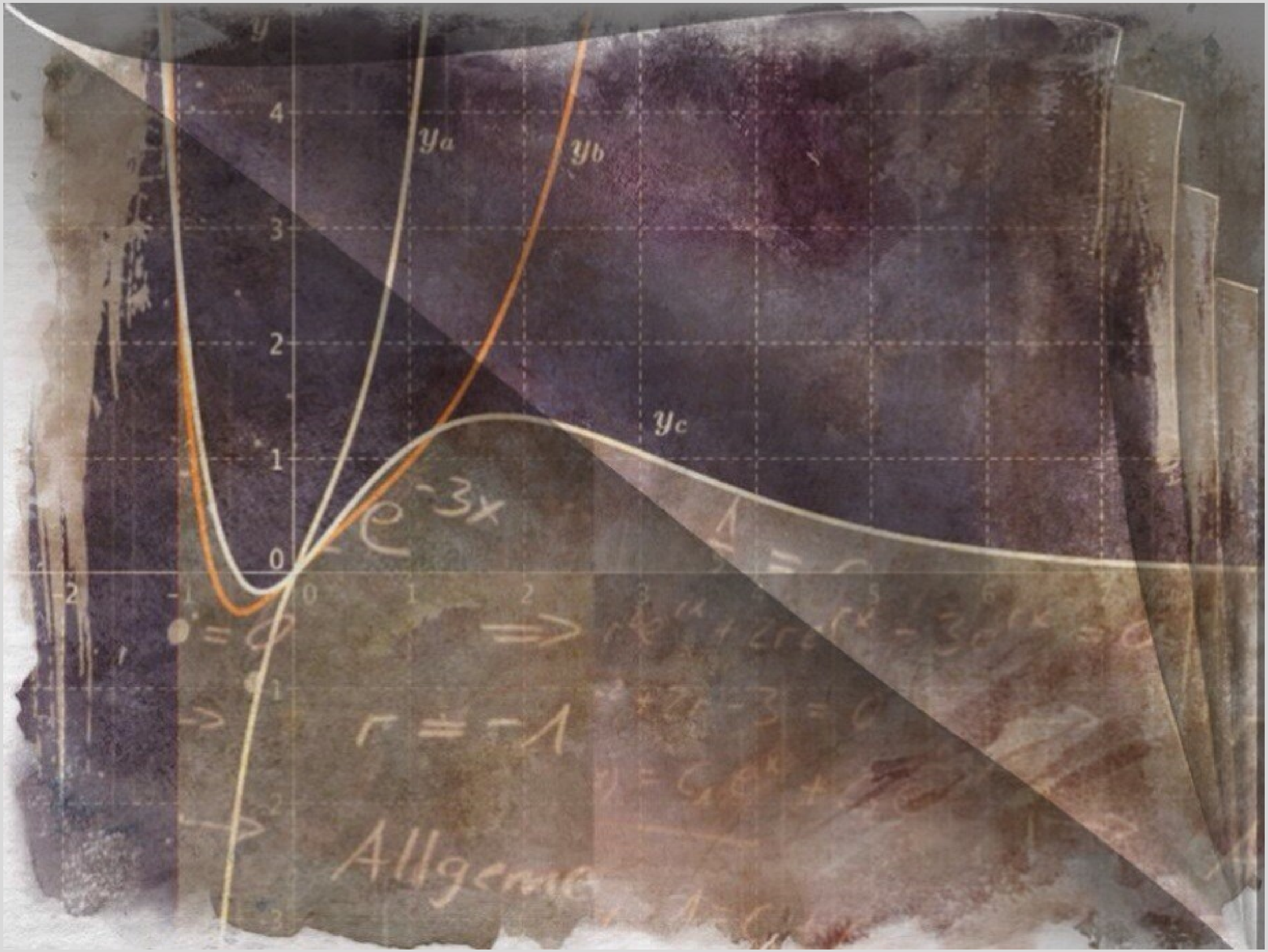
Lösung 4b

Allgemeine Lösung:

$$y_{AL}(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1\, e^{-2x} + C_2 + \frac{3}{2}\, x\, e^{-2x} = \left(C_1 + \frac{3}{2}\, x\right) e^{-2x} + C_2$$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 1: \qquad y_{SL}(x) = -2\,e^{-2x} + 3\,e^{-x} - 2$$


ya
yb
yc
4
3
2
1
0
r = −1