Inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

mit konstanten Koeffizienten (Teil 2)

Ma 2 – Lubov Vassilevskaya

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme

Aufgabe 1:

$$y'' + y' + y = x + 2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3$$

Aufgabe 2:

$$y'' + \frac{1}{4}\, y = 4 - x^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2$$

Aufgabe 3:

$$y'' + 9\, y = x^3 - x, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 0$$

Aufgabe 4:

$$y'' + \frac{1}{2}\, y = 4 - x, \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = 1$$

$$y'' + y' + y = x + 2, \quad P_n(x) = x + 2, \quad n = 1$$

1) Homogene DGL *2*. Ordnung: $y_0'' + y_0' + y_0 = 0$

Die charakteristische Gleichung lautet $r^2 + r + 1 = 0$
und ihre Würzeln sind

$$r_{1,\,2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \lambda \pm i\,\mu\,, \qquad \lambda = -\frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_0(x) = C_1\, e^{\lambda x} \cos(\mu x) + C_2\, e^{\lambda x} \sin(\mu x)$$

Die Lösung der homogenen DGL ist

$$y_0(x) = C_1\, e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + C_2\, e^{-\frac{x}{2}} \left(\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$$

2) Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL stellen wir in folgender Form dar:

$$b \neq 0 \qquad : y_p = Q_n(x), \qquad n = 1$$

$$y_p = a_1 x + a_0\,, \qquad y_p' = a_1\,, \qquad y_p'' = 0$$

$$y_p'' + y_p' + y_p = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + a_1 x + a_0 = x + 2$$

$$a_1 x + (a_1 + a_0) = x + 2$$

$$a_1 = 1, \quad a_1 + a_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1$$

$$y_p = a_1 x + a_0 = x + 1$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = C_1 \, e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_2 \, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + x + 1$$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \qquad : C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{4}{3}$$

$$y(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} \, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + x + 1$$

In folgender Abbildung werden die Integralkurven der Anfangswertprobleme der homogen DGL

$$y_0'' + y_0' + y_0 = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3$$

$$y_0(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) + \frac{7}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{x}{2}} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right)$$

und der inhomogen DGL

$$y'' + y' + y = x + 2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3$$

$$y(x) = \frac{4}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) + x + 1$$

dargestellt.

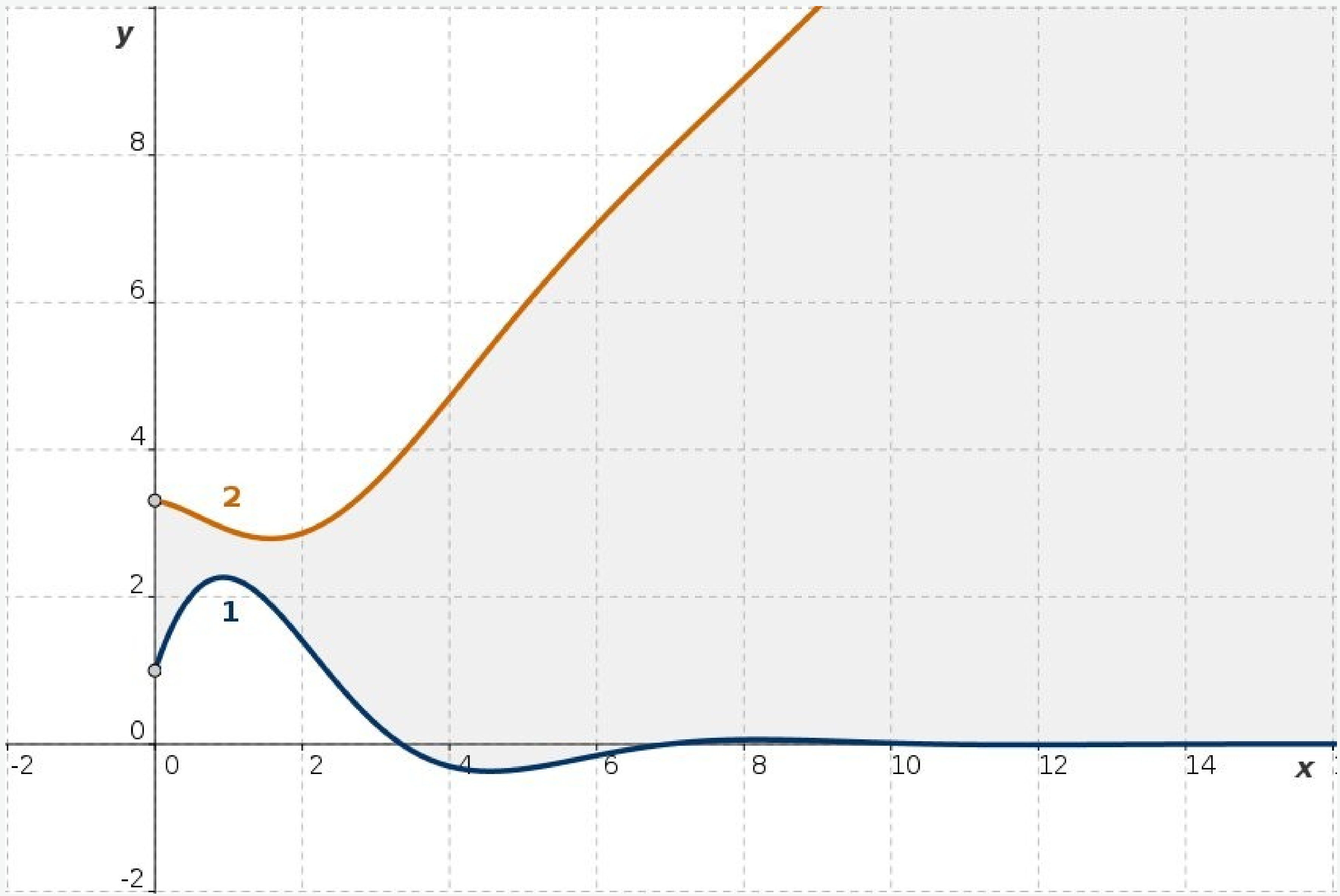

Abb. 1-1: Integralkurven der homogenen DGL $y'' + y' + y = 0$ (1) und der inhomogenen $y'' + y' + y = x + 1$ DGL (2), die dem Anfangswertproblem $y(0) = 1, \; y'(0) = 3$ entsprechen

In Abbildung auf der nächsten Seite werden Integralkurven dargestellt, die folgenden Werten der Integrationskonstanten entsprechen

$$y(x) = C_1\, e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) + C_2\, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) + x + 1$$

1) $C_1 = -2, \qquad C_2 = 0$

2) $C_1 = 2, \qquad C_2 = \frac{1}{2}$

3) $C_1 = -3, \qquad C_2 = 4$

Die vierte Kurve, gestrichelt dargestellt (grau), entspricht der "ungestörten" homogenen DGL:

$$y_0(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right) + \frac{7}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{x}{2}} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right)$$

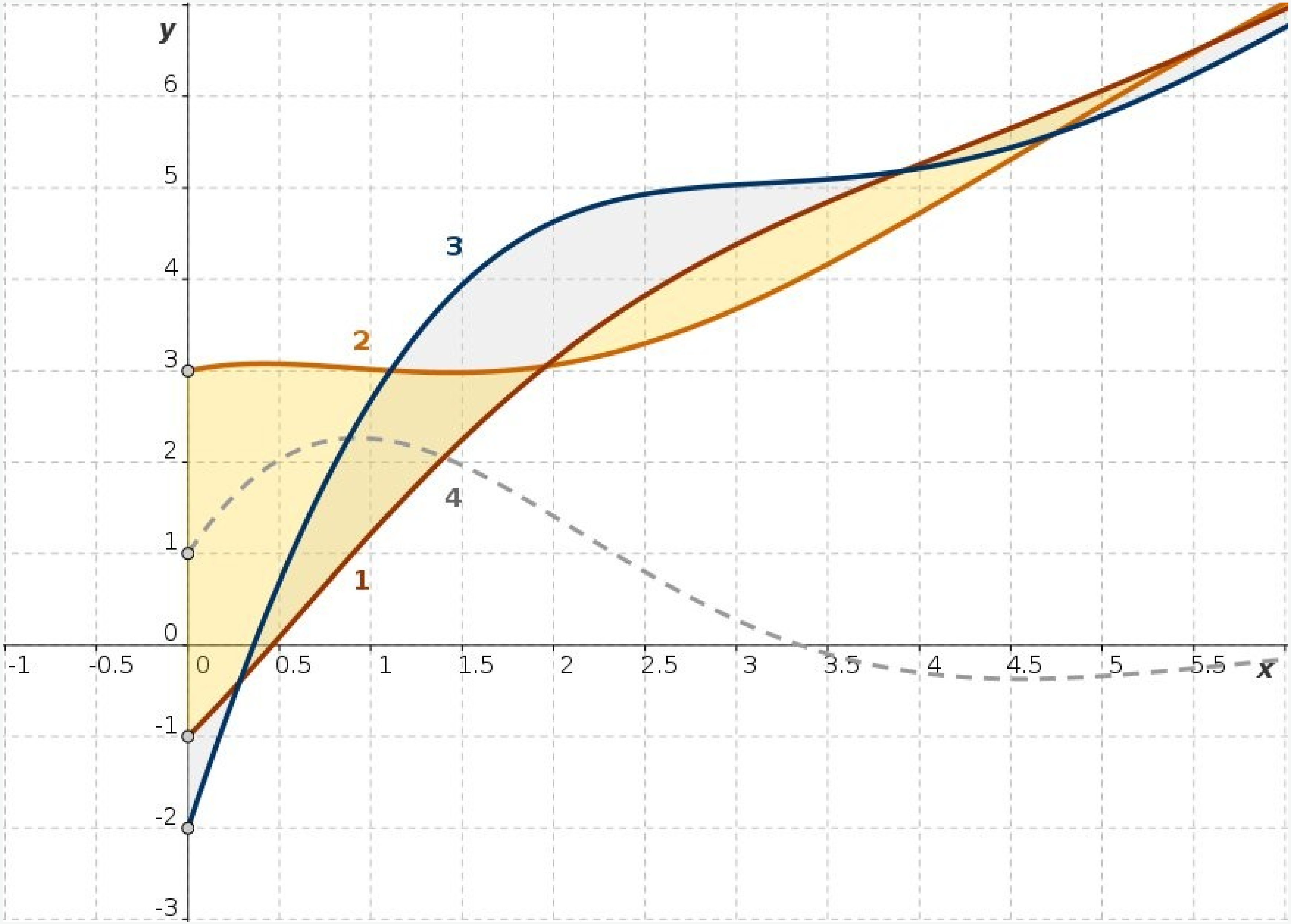

Abb. 1-2: Integralkurven der inhomogenen DGL $y'' + y' + y = x + 1$ (1-3) und der homogenen $y'' + y' + y = 0$ DGL (4)

Lösungsansatz 1: Lösung 2

$$y'' + \frac{1}{4}\, y = 4 - x^2, \qquad P_n = 4 - x^2, \qquad n = 2$$

$$y_0'' + \frac{1}{4}\, y_0 = 0, \qquad r^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$r_{1,\,2} = \pm\, \frac{i}{2}, \qquad \lambda = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}$$

$$y_0(x) = C_1\, e^{\lambda x} \cos \mu x + C_2\, e^{\lambda x} \sin \mu x$$

Allgemeine Lösung: $\quad y_0(x) = C_1 \cos \dfrac{x}{2} + C_2 \sin \dfrac{x}{2}$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2: \qquad y_0(x) = 4 \sin \frac{x}{2}$$

2) Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL stellen wir in folgender Form dar:

$$b \neq 0: \qquad y_p = Q_n(x), \qquad n = 2$$

$$y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad y_p' = 2\, a_1 x + a_1, \qquad y_p'' = 2\, a_1$$

$$y'' + \frac{1}{4}\, y = 4 - x^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 48 - 4x^2$$

Spezielle Lösung:

$$y(x) = C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 48 - 4x^2$$

Lösungsansatz 1: Lösung 3

$$y'' + 9y = x^3 - x, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 0$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) - \frac{5}{27} x + \frac{x^3}{9}$$

Spezielle Lösung:

$$y(x) = 3 \cos(3x) + \frac{5}{81} \sin(3x) - \frac{5}{27} x + \frac{x^3}{9}$$

$$y'' + \frac{1}{2}\, y = 4 - x\,, \qquad y\,(0) = -1, \qquad y\,'(0) = 1$$

Allgemeine Lösung:

$$y\,(x) = C_1 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 8 - 2\,x$$

Spezielle Lösung:

$$y\,(x) = 3\sqrt{2}\,\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 9\,\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 8 - 2\,x$$

Aufagabe 5: $y'' + 2y' - 3y = 3x^2 - 3$

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \qquad$ 2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$

Aufagabe 6: $6y'' - y' - y = x - 3$

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \qquad$ 2) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$

Aufagabe 7: $y'' - y' = 2x - 1$

1) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 1, \qquad$ 2) $y(0) = -1, \quad y'(0) = -1$

3) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{2}$

Aufagabe 8: $-3y'' - y' = -x^2 - 2x + 4$

1) $y(0) = 0, \quad y'(0) = -2, \qquad$ 2) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Aufagabe 9: $2\, y'' = -x^3 + x$

1) $y(0) = 0, \quad y'(0) = -2,$ 2) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Aufagabe 10:

$$y'' + 6\, y' + 9\, y = 9, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

Aufagabe 11:

$$y'' + 2\, y' + y = -x\,, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

Aufagabe 12:

$$y'' - 2\, y' + y = -x^2 + 1, \qquad y(0) = -2, \quad y'(0) = -1$$

Lösungsansatz 1: Lösung 5

$$y'' + 2y' - 3y = 3x^2 - 3$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - x^2 - \frac{4}{3} x - \frac{5}{9}$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2: \qquad y_1(x) = -\frac{4}{9} e^{-3x} + 2 e^x - x^2 - \frac{4}{3} x - \frac{5}{9}$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -2: \qquad y_2(x) = \frac{5}{9} e^{-3x} + e^x - x^2 - \frac{4}{3} x - \frac{5}{9}$

$$6y'' - y' - y = x - 3$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + 4 - x$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -2: \quad y_1(x) = -\frac{3}{5} e^{-\frac{x}{3}} - \frac{12}{5} e^{\frac{x}{2}} + 4 - x$

2) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 1: \quad y_2(x) = -\frac{27}{5} e^{-\frac{x}{3}} + \frac{2}{5} e^{\frac{x}{2}} + 4 - x$

$$y'' - y' = 2x - 1$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 + C_2\, e^{x} - x^2 - x$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 1: \qquad y_1(x) = 2\, e^{x} - x^2 - x - 3$

2) $y(0) = -1, \quad y'(0) = -1: \qquad y_2(x) = -x^2 - x - 1$

3) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{2}: \qquad y_3(x) = \frac{1}{2}\, e^{x} - x^2 - x + \frac{1}{2}$

$$-3\,y'' - y' = -x^2 - 2x + 4$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 + C_2\, e^{-\frac{x}{3}} + \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 8x$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 0, \qquad y'(0) = -2:$

$$y_1(x) = 30\, e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 8x - 30$$

2) $y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1:$

$$y_2(x) = 21\, e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 8x - 21$$

Lösungsansatz 1: Lösung 9

$$2y'' = -x^3 + x$$

Allgemeine Lösung: $$y(x) = C_1 + C_2\,x + \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{40}$$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1: \qquad y(x) = 1 - x + \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{40}$$

$$y'' + 6\,y' + 9\,y = 9$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = (C_1 + C_2\,x)\,e^{-3x} + 1$

Spezielle Lösung:

$y(0) = 3, \quad y'(0) = 1: \qquad y(x) = 1 + (2 + 7\,x)\,e^{-3x}$

Lösungsansatz 1: Lösung 11

$$y'' + 2y' + y = -x$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = (C_1 + C_2\, x)\, e^{-x} + 2 - x$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1: \qquad y(x) = 2 + 2x\, e^{-x} - x$$

$$y'' - 2y' + y = -x^2 + 1$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^x - 5 - 4x - x^2$$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = -1: \qquad y(x) = 3e^x - x^2 - 4x - 5$$