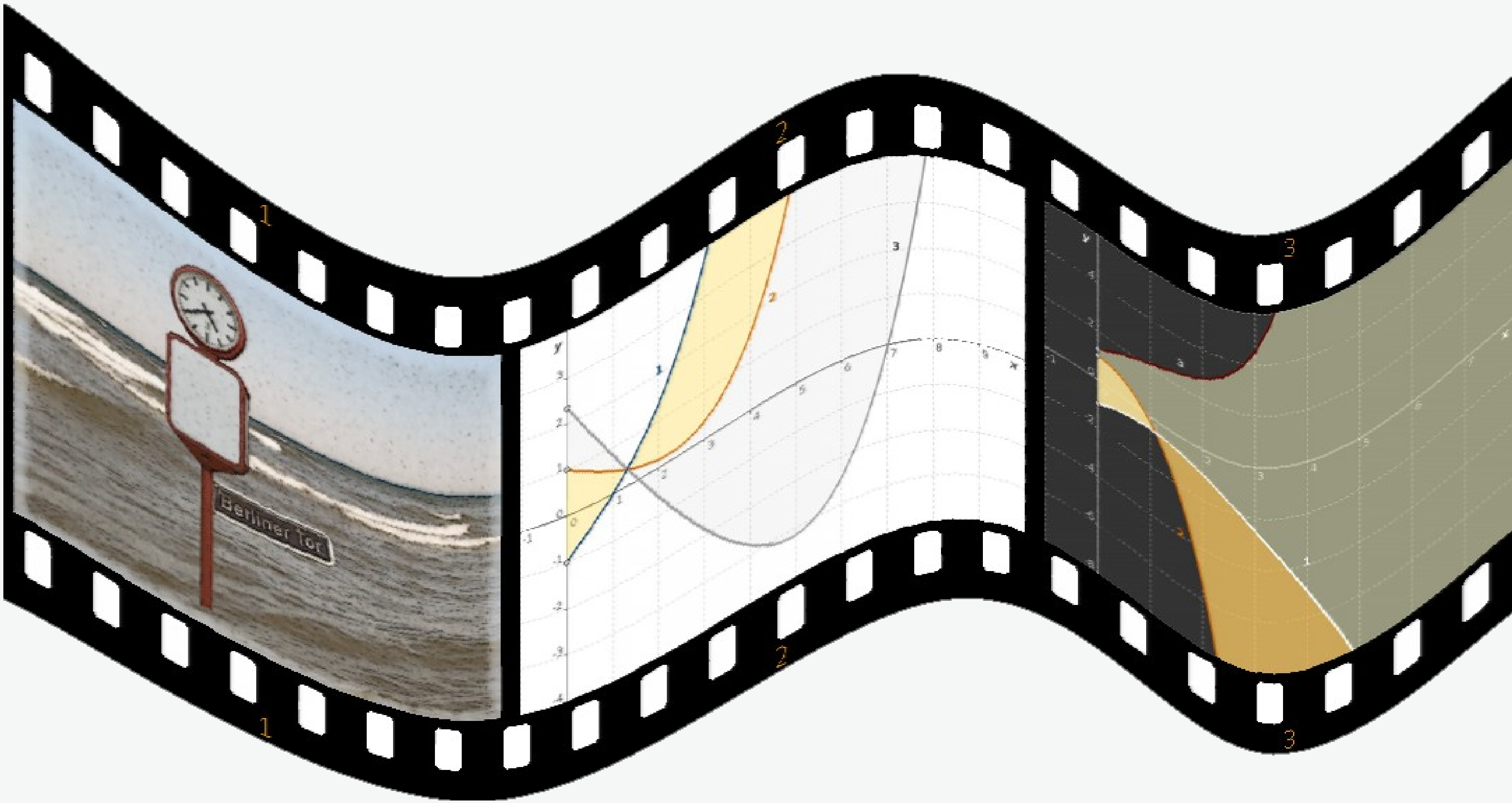
Inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

mit konstanten Koeffizienten (Teil 1)


Berliner Tor
1
2
3

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung *2*. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(x)$$

($g(x)$ wird Störfunktion genannt) kann man als Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen linearen DGL

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad \rightarrow \qquad y_0(x)$$

und einer partikulären Lösung der inhomogenen linearen DGL darstellen

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

Lösungsansatz 1

Die Störfunktion sei ein Polynom n-ten Grades

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(x), \qquad g(x) = P_n(x)$$

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad \rightarrow \quad \text{Lösung} \quad y_0(x)$$

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_p = Q_n(x) & b \neq 0 \\ y_p = x\,Q_n(x) & a \neq 0, \quad b = 0 \\ y_p = x^2 Q_n(x) & a = b = 0 \end{array}}$$

$Q_n(x)$ ist jeweils ein Polynom n-ten Grades

Aufgabe 1: $y'' + 2y' - 3y = x^2 - 1, \quad 1)\ y(0) = 0, \quad y(0) = -1$

Aufgabe 2: $6y'' - y' - y = 2x - 1$

$1)\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1, \qquad 2)\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{2}$

Aufgabe 3: $y'' - y' = x - 2$

$1)\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1, \qquad 2)\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Aufgabe 4: $y' - 2y'' = -3x^2 + 6x - 2$

$1)\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \qquad 2)\ y(0) = -2, \quad y'(0) = 0$

Aufgabe 5: $y'' = -x^2 + 2x + 1$

$1)\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \qquad 2)\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$

1) Inhomogene lineare DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 2\,y' - 3\,y = x^2 - 1$$

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(x), \qquad g(x) = P_n(x)$$

$$a = 2, \qquad b = -1 \qquad (!\;\; b \neq 0)$$

2) Störfunktion vom Grad $n = 2$

$$g(x) = P_2(x) = x^2 - 1$$

3) Die Lösung der allgemeinen homogenen linearen DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 2\,y' - 3\,y = 0 \quad \rightarrow \quad y_0$$

wird durch Lösen der charakteristischen Gleichung bestimmt

$$y = e^{r\,x}: \qquad r^2 + 2\,r - 3 = 0, \qquad r_1 = -3, \qquad r_2 = 1$$

$$y_0(x) = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x} = C_1\, e^{-3\,x} + C_2\, e^{x}$$

4) Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL stellen wir in folgender Form dar:

$$b \neq 0: \qquad y_p = Q_n(x), \qquad n = 2$$

$$y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad y_p' = 2a_2 x + a_1, \qquad y_p'' = 2a_2$$

5) Die partikuläre Lösung und ihre Ableitungen werden in die inhomogene DGL eingesetzt, d.h.

$$y_p'' + 2y_p' - 3y_p = x^2 - 1$$

$$2a_2 + 2(2a_2 x + a_1) - 3(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = x^2 - 1$$

$$-3a_2 x^2 + (4a_2 - 3a_1)\, x + (2a_2 + 2a_1 - 3a_0) = x^2 - 1$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir ein lineares Gleichungssystem, um die unbekannten Polynomkoeffizienten zu bestimmen

$$\begin{cases} -3a_2 = 1 \\ 4a_2 - 3a_1 = 0 \\ 2a_2 + 2a_1 - 3a_0 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = -\dfrac{1}{3} \\ a_1 = -\dfrac{4}{9} \\ a_0 = -\dfrac{5}{27} \end{cases}$$

$$y'' + 2y' - 3y = x^2 - 1$$

$$y_p(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{4}{9}x - \frac{5}{27}, \qquad y_0(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - \frac{x^2}{3} - \frac{4}{9}x - \frac{5}{27}$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \qquad y(x) = \frac{5}{27} e^{-3x} - \frac{x^2}{3} - \frac{4}{9}x - \frac{5}{27}$

2) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \qquad y(x) = -\frac{7}{108} e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x - \frac{x^2}{3} - \frac{4}{9}x - \frac{5}{27}$

3) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \qquad y(x) = -\frac{17}{54} e^{-3x} + \frac{1}{2} e^x - \frac{x^2}{3} - \frac{4}{9}x - \frac{5}{27}$

Die Abbildung der folgenden Seite zeigt Integralkurven, die diesen Funktionen Entsprechen.

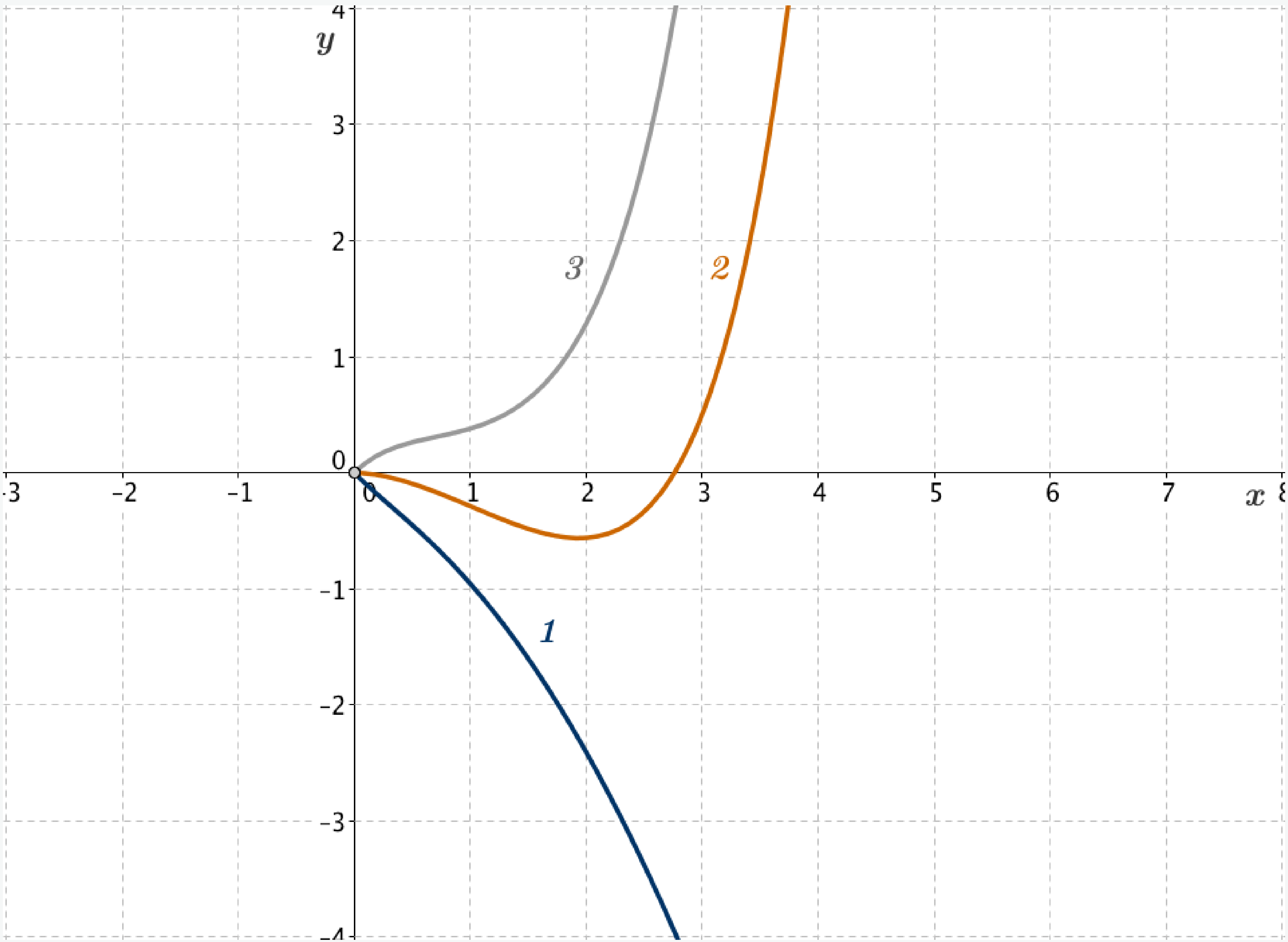


Abb. 1: Die Integralkurven der Differentialgleichung

1) Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$6\,y'' - y' - y = 2\,x - 1, \qquad y'' - \frac{1}{6}\,y' - \frac{1}{6}\,y = \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$$

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(x), \qquad g(x) = P_n(x)$$

$$a = -\frac{1}{6}, \qquad b = -\frac{1}{6} \qquad (!\ \ b \neq 0)$$

2) Störfunktion vom Grad $n = 1$

$$g(x) = P_1(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$$

3) Die Lösung der allgemeinen homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - \frac{1}{6}\,y' - \frac{1}{6}\,y = 0 \quad \rightarrow \quad y_0$$

wird durch Lösen der charakteristischen Gleichung bestimmt

$$y = e^{r\,x} \qquad : r^2 - \frac{r}{6} - \frac{1}{6} = 0, \qquad r_1 = -\frac{1}{3}, \qquad r_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_0(x) = C_1\,e^{r_1 x} + C_2\,e^{r_2 x} = C_1\,e^{-\frac{x}{3}} + C_2\,e^{\frac{x}{2}}$$

4) Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL stellen wir in folgender Form dar:

$$b \neq 0: \qquad y_p = Q_n(x), \qquad n = 1$$

$$y_p = a_1 x + a_0, \qquad y_p' = a_1, \qquad y_p'' = 0$$

5) Die partikuläre Lösung und ihre Ableitungen werden in die inhomogene DGL eingesetzt, d.h.

$$y_p'' - \frac{1}{6}\, y_p' - \frac{1}{6}\, y_p = \frac{x}{3} - \frac{1}{6}\quad :$$

$$0 - \frac{1}{6}\, a_1 - \frac{1}{6}\,(a_1 x + a_0) = \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$$

$$-\frac{a_1}{6}\, x - \frac{1}{6}\,(a_0 + a_1) = \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir ein lineares Gleichungssystem, um die unbekannten Polynomkoeffizienten zu bestimmen

$$\begin{cases} -\dfrac{a_1}{6} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] a_0 + a_1 = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} a_1 = -2 \\[2ex] a_0 = 3 \end{cases}$$

$$6\,y'' - y' - y = 2\,x - 1$$

$$y_0(x) = C_1\,e^{-\frac{x}{3}} + C_2\,e^{\frac{x}{2}}, \qquad y_p(x) = -\,2\,x + 3$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1\,e^{-\frac{x}{3}} + C_2\,e^{\frac{x}{2}} - 2\,x + 3$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 1: \qquad y_1(x) = -6\,e^{-\frac{x}{3}} + 2\,e^{\frac{x}{2}} - 2\,x + 3$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{2}: \qquad y_2(x) = -3\,e^{-\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{2}} - 2\,x + 3$

3) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1: \qquad y_2(x) = -\dfrac{12}{5}\,e^{-\frac{x}{3}} + \dfrac{2}{5}\,e^{\frac{x}{2}} - 2\,x + 3$

4) $y(0) = 2, \quad y'(0) = -2: \qquad y_2(x) = -\dfrac{3}{5}\,e^{-\frac{x}{3}} - \dfrac{2}{5}\,e^{\frac{x}{2}} - 2\,x + 3$

Diese Integralkurven werden auf der nächsten Seite dargestellt.

Lösungsansatz 1: Lösung 2

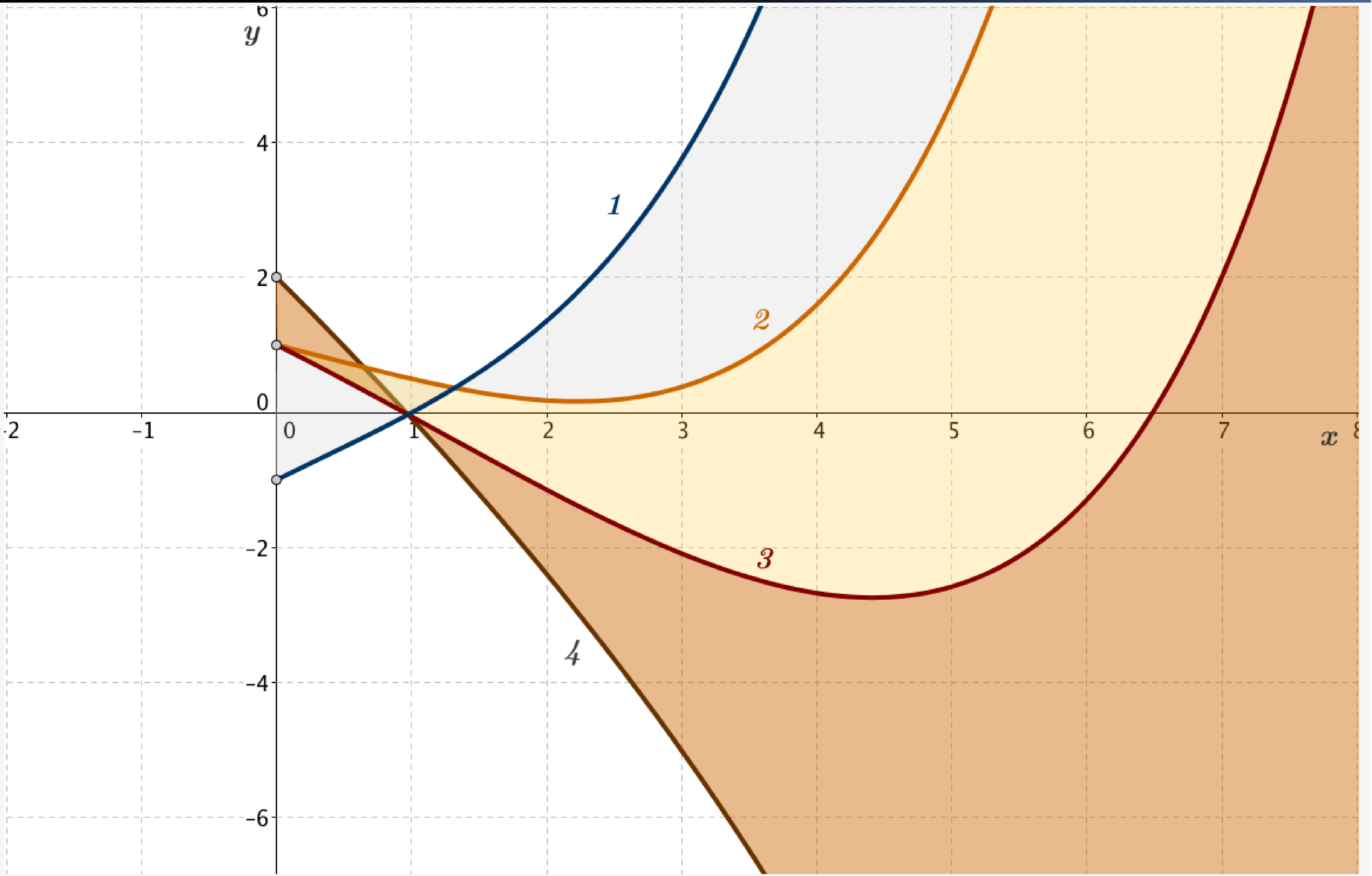


Abb. 2: Die Integralkurven der Differentialgleichung

1) Inhomogene lineare DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - y' = x - 2$$

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(x), \qquad g(x) = P_n(x)$$

$$a = -1, \qquad b = 0 \quad !$$

2) Störfunktion vom Grad $n = 1$

$$g(x) = P_1(x) = x - 2$$

3) Die Lösung der allgemeinen homogenen linearen DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - y' = 0 \quad \rightarrow \quad y_0$$

wird durch Lösen der charakteristischen Gleichung bestimmt

$$y = e^{r\,x}: \qquad r^2 - r = 0, \qquad r\,(r - 1) = 0, \qquad r_1 = 0, \qquad r_2 = 1$$

$$y_0(x) = C_1\,e^{r_1 x} + C_2\,e^{r_2 x} = C_1 + C_2\,e^{x}$$

4) Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL stellen wir in folgender Form dar:

$$a \neq 0, \quad b = 0: \qquad y_p = x\, Q_n(x), \qquad n = 1$$

$$y_p = a_1 x^2 + a_0 x, \qquad y_p' = 2 a_1 x + a_0, \qquad y_p'' = 2 a_1$$

5) Die partikuläre Lösung und ihre Ableitungen werden in die inhomogene DGL eingesetzt, d.h.

$$y_p'' - y_p' = x - 2$$

$$2 a_1 - (2 a_1 x + a_0) = x - 2, \qquad -2 a_1 x + (2 a_1 - a_0) = x - 2$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir ein lineares Gleichungssystem, um die unbekannten Polynomkoeffizienten zu bestimmen

$$\begin{cases} -2 a_1 = 1 \\ 2 a_1 - a_0 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -\dfrac{1}{2} \\ a_0 = 1 \end{cases} \qquad y_p = -\frac{1}{2} x^2 + x$$

$$y_p = -\frac{1}{2}\,x^2 + x$$

$$y_0(x) = C_1 + C_2\,e^x$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1 + C_2\,e^x - \frac{1}{2}\,x^2 + x$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 1: \qquad y_1(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + x - 1$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0: \qquad y_2(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + x + 2 - e^x$

3) $C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{1}{4}: \qquad y_3(x) = 1 + \frac{1}{4}\,e^x - \frac{1}{2}\,x^2 + x$

Diese Integralkurven werden auf der nächten Seite dargestellt.

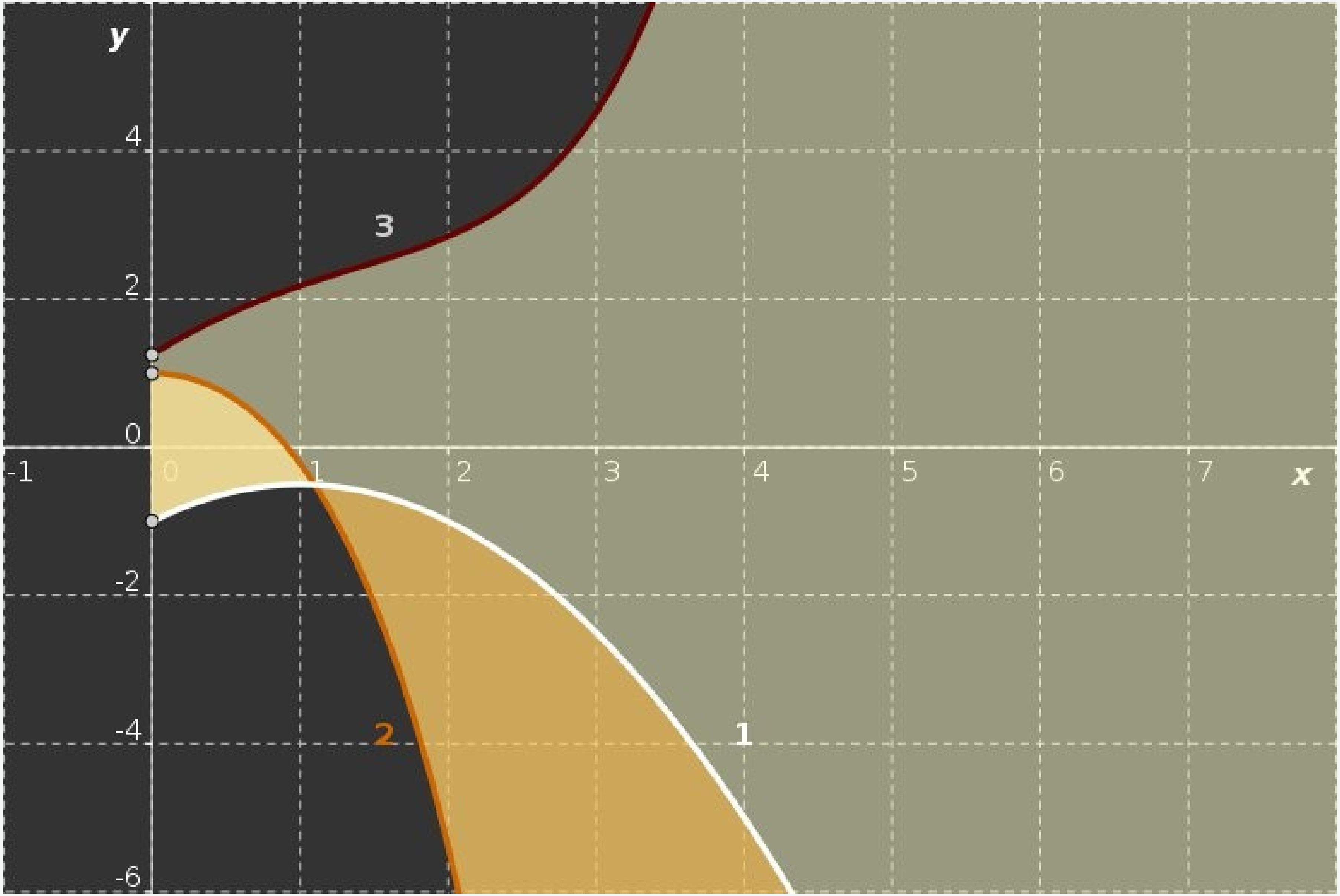


Abb. 3: Die Integralkurven der Differentialgleichung

1) Inhomogene lineare DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' - 2y'' = -3x^2 + 6x - 2$$

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(x), \qquad g(x) = P_n(x)$$

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = 0 \quad !$$

2) Störfunktion vom Grade $n = 2$

$$g(x) = P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$$

3) Die Lösung der allgemeinen homogenen linearen DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' - 2y'' = 0 \quad \rightarrow \quad y_0$$

wird durch Lösen der charakteristischen Gleichung bestimmt

$$y = e^{rx}: \qquad r - 2r^2 = 0, \qquad r\,(1 - 2r) = 0, \qquad r_1 = 0, \qquad r_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_0(x) = C_1\,e^{r_1 x} + C_2\,e^{r_2 x} = C_1 + C_2\,e^{\frac{x}{2}}$$

4) Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL stellen wir in folgender Form dar:

$$a \neq 0, \quad b = 0 \qquad : y_p = x\, Q_n(x), \qquad n = 2$$

$$y_p = a_2 x^3 + a_1 x^2 + a_0 x$$

$$y_p' = 3 a_2 x^2 + 2 a_1 x + a_{0,} \qquad y_p'' = 6 a_2 x + 2 a_1$$

5) Die partikuläre Lösung und ihre Ableitungen werden in die inhomogene DGL eingesetzt, d.h.

$$-2\, y_p'' + y_p' = -3\, x^2 + 6\, x - 2$$

$$-2\, (6\, a_2 x + 2\, a_1) + (3\, a_2 x^2 + 2\, a_1 x + a_0) = -3\, x^2 + 6\, x - 2$$

$$3\, a_2 x^2 + (-12\, a_2 + 2\, a_1)\, x + (-4\, a_1 + a_0) = -3\, x^2 + 6\, x - 2$$

$$a_0 = -14, \qquad a_1 = -3, \qquad a_2 = -1$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1 + C_2\, e^{\frac{x}{2}} - x^3 - 3x^2 - 14x$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1: \qquad y_1(x) = -25 + 26\, e^{\frac{x}{2}} - x^3 - 3x^2 - 14x$

2) $y(0) = -2, \quad y'(0) = 0: \qquad y_2(x) = -30 + 28\, e^{\frac{x}{2}} - x^3 - 3x^2 - 14x$

$$y'' = -x^2 + 2x + 1$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 x + C_2 - \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1: \qquad y_1(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -2: \qquad y_2(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$

Aufgabe 6: $y'' + 4y' + 4y = -2x^2 + 1$

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$ 2) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$

Aufgabe 7:

$y'' - 2y' + y = -x - 3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$

Aufgabe 8:

$y'' + 2y' + y = 2,$

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$ 2) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$

1) Inhomogene lineare DGL *2*. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 4y' + 4y = -2x^2 + 1$$

$$y'' + ay' + by = g(x), \qquad g(x) = P_n(x)$$

$$a = 4, \qquad b = 4 \qquad (!\ \ b \neq 0)$$

2) Störfunktion vom Grad $n = 2$

$$g(x) = P_2(x) = -2x^2 + 1$$

3) Die Lösung der allgemeinen homogenen linearen DGL *2*. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \quad \to \quad y_0$$

wird durch Lösen der charakteristischen Gleichung bestimmt

$$y = e^{rx}: \qquad r^2 + 4r + 4 = 0, \qquad r_1 = r_2 = r = -2$$

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{rx} = (C_1 + C_2 x)\, e^{-2x}$$

4) Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL stellen wir in folgender Form dar:

$$b \neq 0 \quad : y_p = Q_n(x), \quad n = 2$$

$$y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad y_p' = 2 a_2 x + a_1, \qquad y_p'' = 2 a_2$$

5) Die partikuläre Lösung und ihre Ableitungen werden in die inhomogene DGL eingesetzt, d.h.

$$y_p'' + 4 y_p' + 4 y_p = -2 x^2 + 1 \quad :$$

$$2 a_2 + 4 (2 a_2 x + a_1) + 4 (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = -2 x^2 + 1$$

$$4 a_2 x^2 + (8 a_2 + 4 a_1)\, x + (2 a_2 + 4 a_1 + 4 a_0) = -2 x^2 + 1$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir ein lineares Gleichungssystem, um die unbekannten Polynomkoeffizienten zu bestimmen

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a_1 = 1, \qquad a_0 = -\frac{1}{2}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\,(x - 1)^2$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\,(x-1)^2$$

$$y_0(x) = (C_1 + C_2\,x)\,e^{-2x}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2\,x)\,e^{-2x} - \frac{1}{2}\,(x-1)^2$$

Spezielle Lösung:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1: \quad y_1(x) = \left(\frac{3}{2} + 3\,x\right) e^{-2x} - \frac{1}{2}\,(x-1)^2$

2) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 3: \quad y_2(x) = \left(\frac{5}{2} + 7\,x\right) e^{-2x} - \frac{1}{2}\,(x-1)^2$

3) $C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4}: \quad y_3(x) = \frac{1}{4}\,e^{-2x} - \frac{1}{2}\,(x-1)^2$

4) $C_1 = 4, \quad C_2 = 6: \quad y_4(x) = \frac{1}{4}\,e^{-2x} - \frac{1}{2}\,(x-1)^2$

Diese Integralkurven werden auf der nächsten Seite dargestellt.

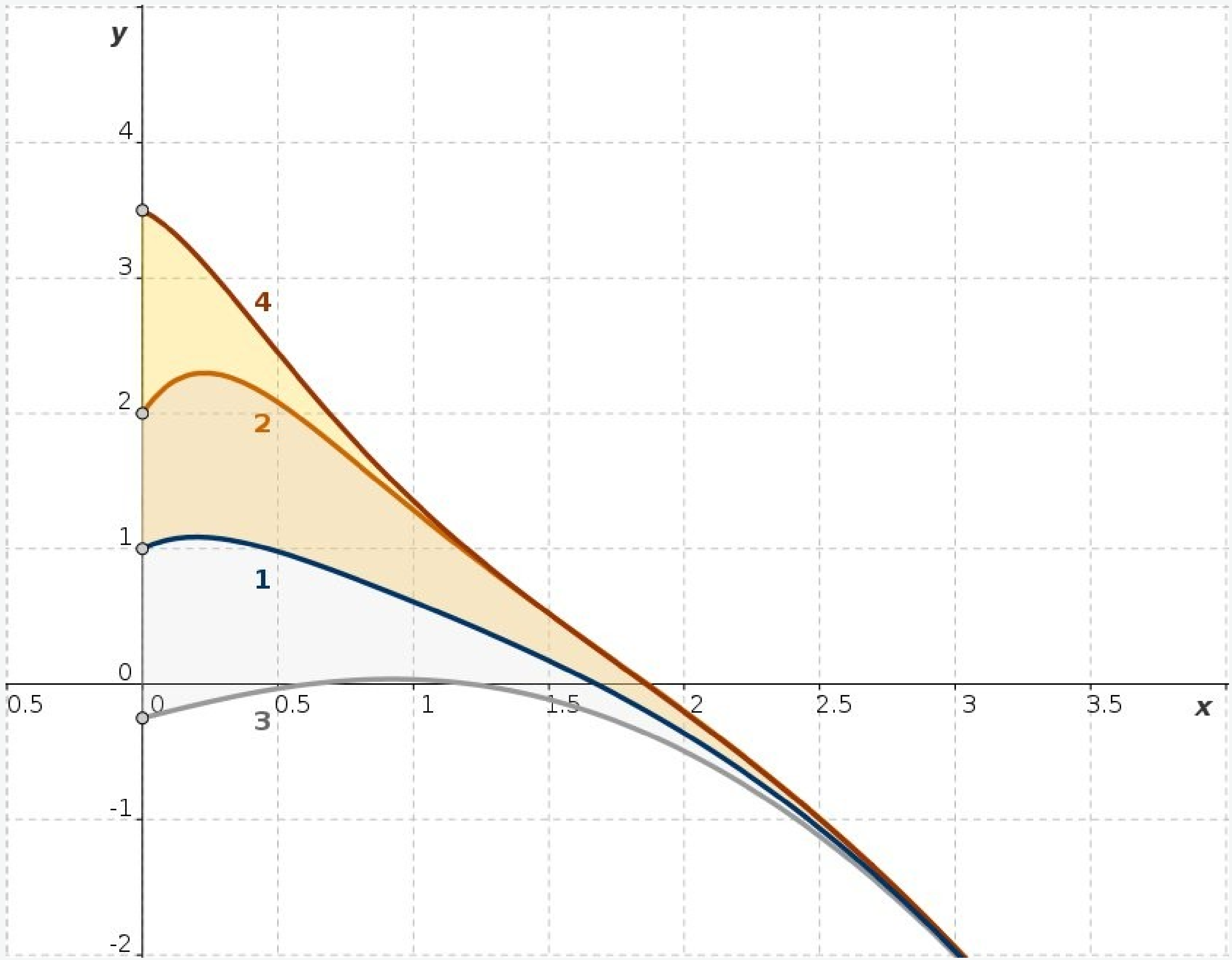


Abb. 6: Die Integralkurven der Differentialgleichung

1) Inhomogene lineare DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - 2y' + y = -x - 3$$

$$y'' + a y' + b y = g(x), \qquad g(x) = P_n(x)$$

$$a = -2, \qquad b = 1 \qquad (!\ \ b \neq 0)$$

2) Störfunktion vom Grad $n = 1$

$$g(x) = P_1(x) = -x - 3$$

3) Die Lösung der allgemeinen homogenen linearen DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \rightarrow \quad y_0$$

wird durch Lösen der charakteristischen Gleichung bestimmt

$$y = e^{rx} \qquad : r^2 - 2r + 1 = 0, \qquad r_1 = r_2 = r = 1$$

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x)\ e^{rx} = (C_1 + C_2 x)\ e^{x}$$

4) Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL stellen wir in folgender Form dar:

$$b \neq 0 \qquad : y_p = Q_n(x), \qquad n = 1$$

$$y_p = a_1 x + a_0, \qquad y_p' = a_1, \qquad y_p'' = 0$$

5) Die partikuläre Lösung und ihre Ableitungen werden in die inhomogene DGL eingesetzt, d.h.

$$y_p'' - 2\,y_p' + y_p = -x - 3 \;:$$

$$a_1 = -1, \qquad a_0 = -5$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2\,x)\,e^x - x - 5$$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 3, \qquad y(x) = (7 - 3\,x)\,e^x - x - 5$$

$$y'' + 2y' + y = 2, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x} + 2$$

Spezielle Lösung:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1: \qquad y(x) = -e^{-x} + 2$

2) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 3: \qquad y_2(x) = 3\,x\,e^{-x} + 2$