Sahara, Sanddünen und Integralkurven

Eine sehr interessante Darstellung gibt Prof. Dr. M. Erné:

8.2. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

http://www.iag.uni-hannover.de/~greite/ingSS07/dateien/maple/MI_8_2.pdf

Er stellt die Umgebung, wie sie ein Pilot im zweiten Weltkrieg nach einer Bruchlandung in der Sahara wahrnahm, durch Sanddünen mit Hilfe einiger Funktionen dar.

Wir folgen dieser schönen Beschäftigung und versuchen auch, die Integralkurven mit Sanddünen zu vergleichen.

http://img517.imageshack.us/img517/8357/stex3aa.jpg

Antoine de Saint-Exupéry "Der kleine Prinz"

Der Erzähler muss mit seinem Flugzeug mitten in der Sahara notlanden, "tausend Meilen von jeder bewohnten Gegend entfernt". Da begegnet er einem seltsamen Jungen, der ihm verrät, er sei ein Prinz von einem kleinen Stern ...

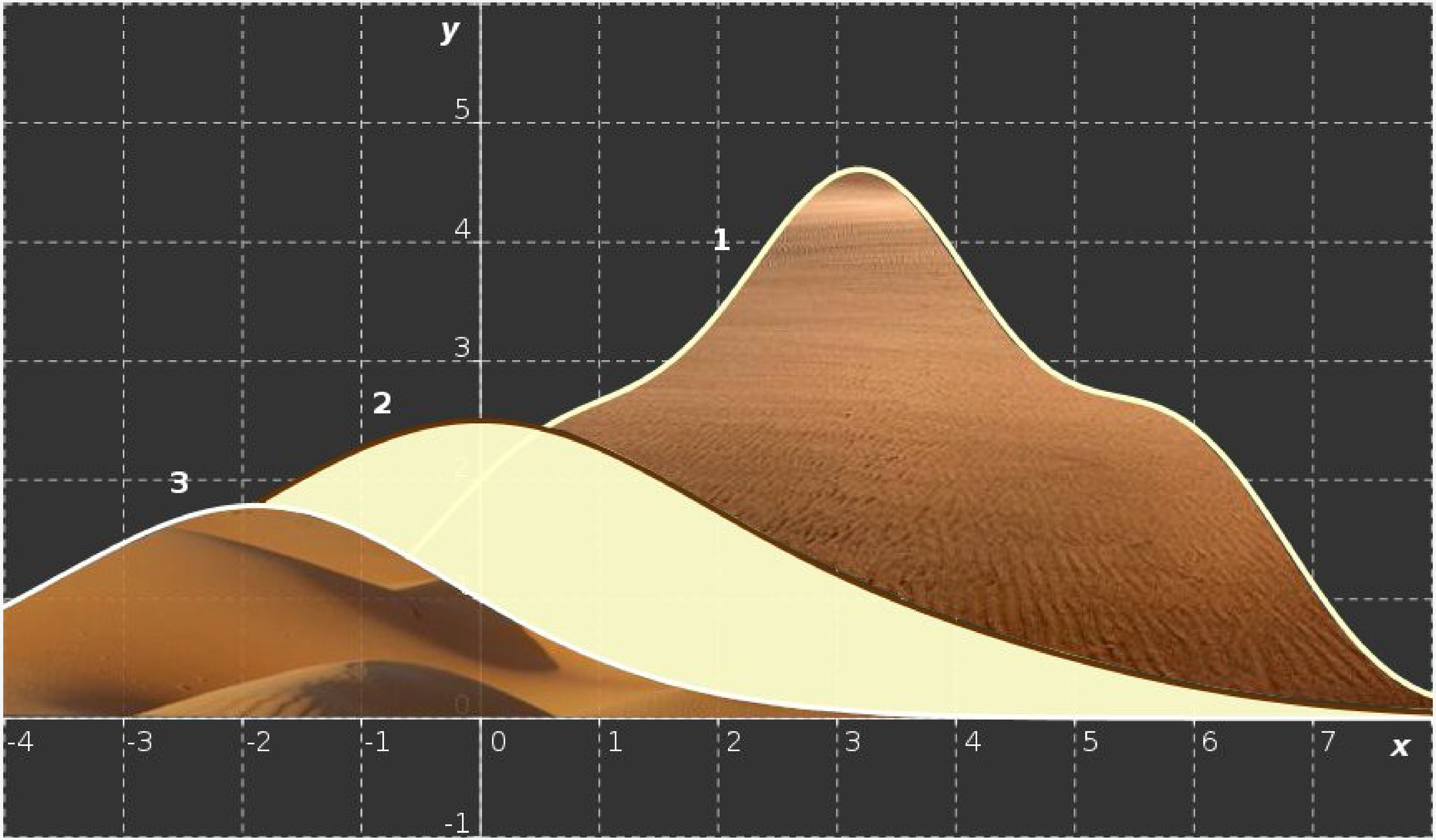


Abb. I-1: Die Integralkurven als Sanddünen der Sahara. Die mathematische Beschreibung der Kurven folgt

Integralkurve 1

DGL : $$y' = -\left(\frac{x-4}{8} + \frac{2\sin(2x) + \frac{x}{4}}{\cos(2x) - \frac{x^2}{8} + 10} \right) y$$

AL : $$y = C\,(16\cos^2 x - x^2 + 72)\, e^{-\frac{1}{16}(x-8)x}$$

1) $y(0) = 2,\qquad y_1 = \dfrac{1}{44}\,(16\cos^2 x - x^2 + 72)\, e^{-\frac{1}{16}(x-8)x}$

Integralkurve 2

DGL : $$y' = -\left(\frac{x}{8} + \frac{\sin x}{\cos x + 12} \right) y$$

AL : $$y_2 = C\,(\cos x + 12)\, e^{-\frac{x^2}{16}}$$

2) $y(0) = \dfrac{5}{2},\qquad y_2 = \dfrac{5}{26}\,(\cos x + 12)\, e^{-\frac{x^2}{16}}$

Integralkurve 3

DGL : $$y' = -\left(\frac{x+2}{4} + \frac{\cos x}{\sin x + 12}\right) y$$

AL : $$y = \frac{2\,C}{\sin x + 12}\, e^{-\frac{1}{8}(4+x)\,x}$$

3) $y(0) = 1,\qquad y_3(x) = \dfrac{12}{\sin x + 12}\, e^{-\frac{1}{8}(4+x)\,x}$

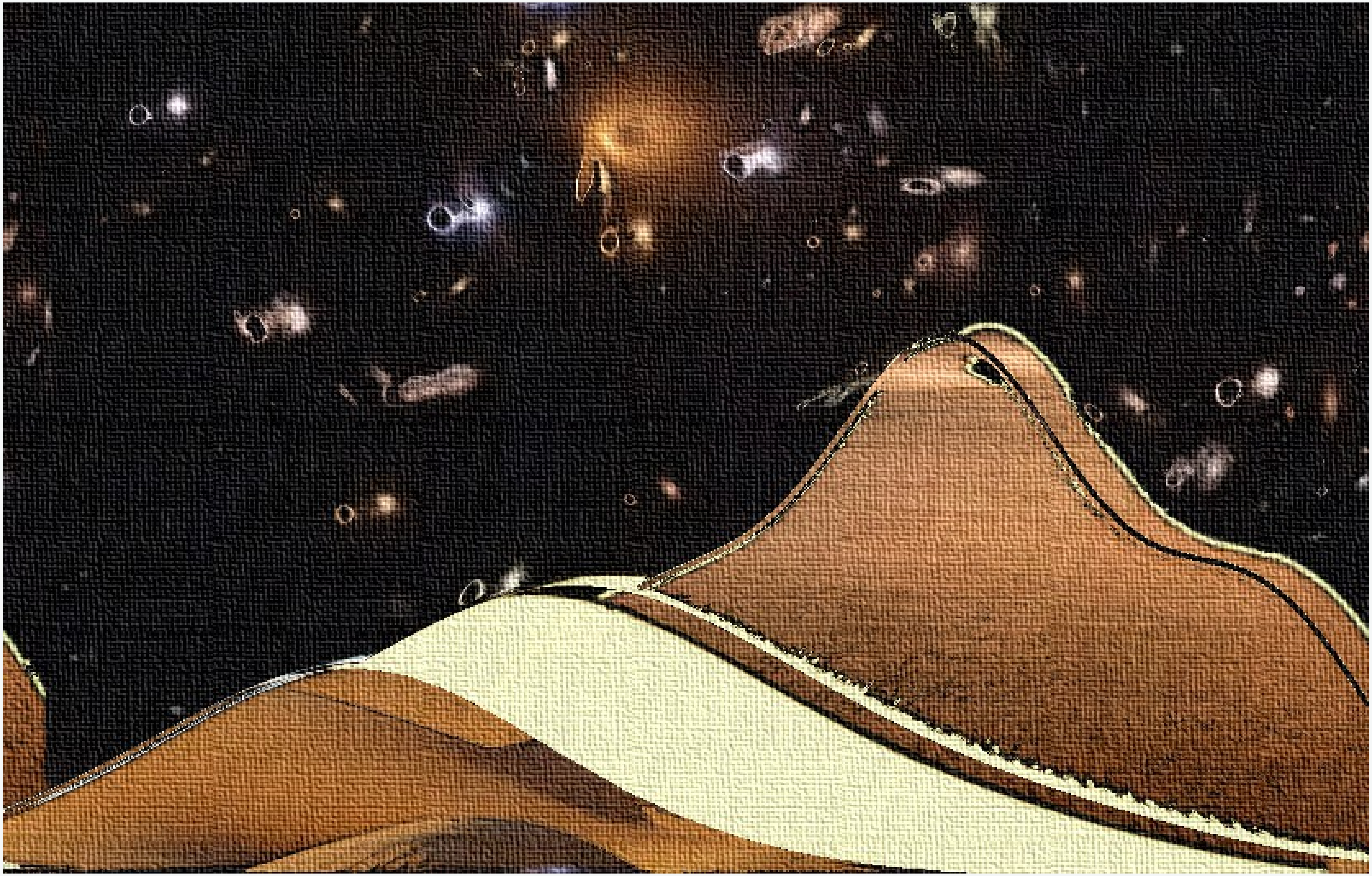
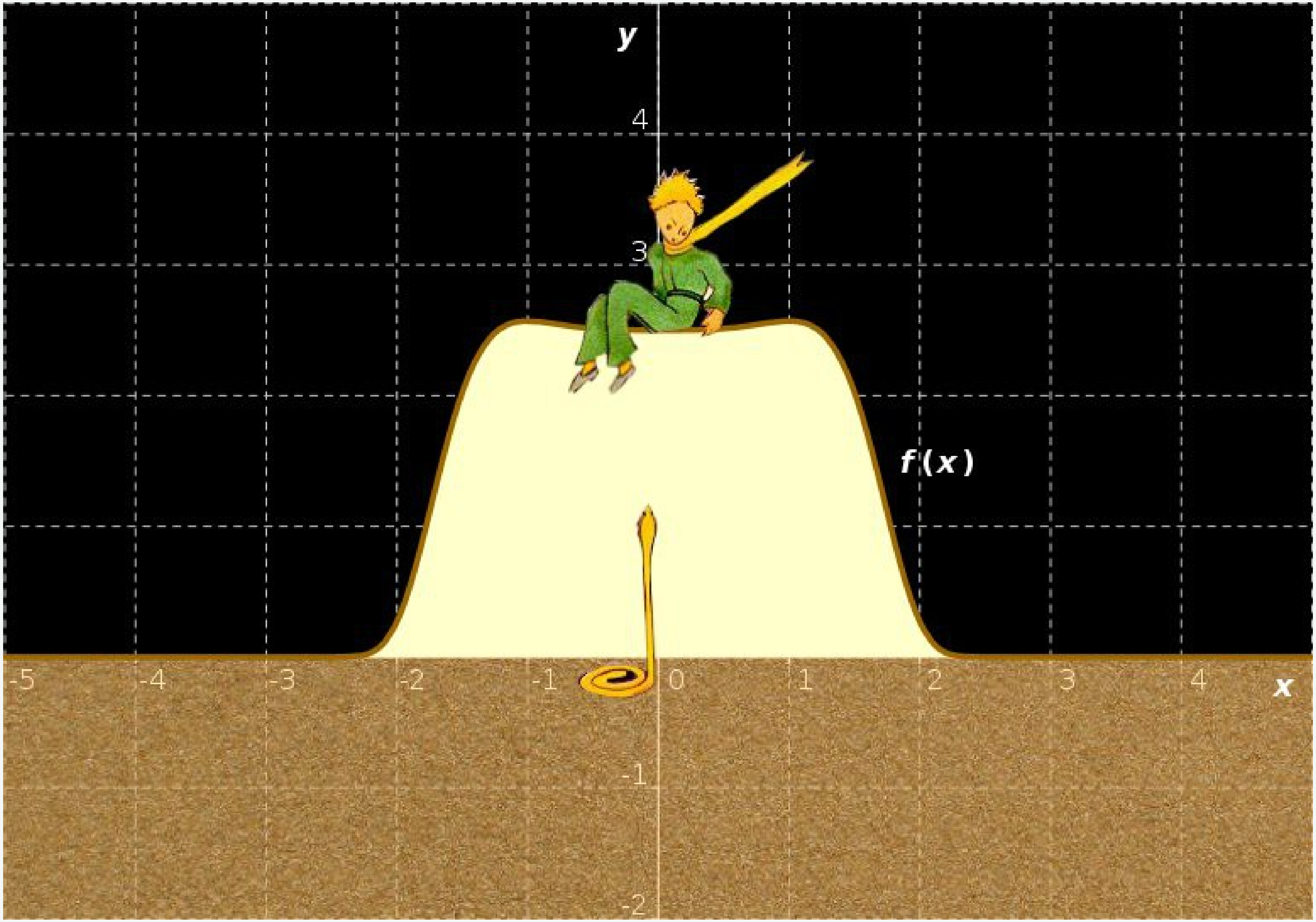


Abb. I-2: Die Integralkurven als Sanddünen der Sahara



http://honors.rit.edu/amitraywiki/images/3/36/Snake.jpg

Abb. 2: Die Nacht in der Sahara. Die Integralkurve $y = f(x)$

Die Integralkurve $y = f(x)$ der Abbildung 2:

$$f(x) = \frac{5}{2}\, e^{\frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{18} x^6}$$

ist die Lösung der DGL der Aufgabe 4

$$y' + (a\, x^3 + b\, x^5)\, y = 0$$

mit folgenden Werten der Parameter:

$$C = \frac{5}{2}, \qquad a = -\frac{1}{3}, \qquad b = \frac{1}{3}$$


1
1
2
2
3
3