Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Zusammenfassung

$a y'' + b y' + c y = 0 \qquad b^2 - 4ac = 0, \quad y = (C_1 x + C_2) e^{\dots}$

3) $y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

$y = e^{rx}$

$r^2 - 6r + 9 = 0$

$(r - 3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = +3$

$y = (C_1 x + C_2) e^{+3x}$ AL

$y' = C_1 e^{3x} + (C_1 x + C_2) e^{3x} \cdot 3 = e^{3x} (C_1 + 3C_1 x + 3C_2)$

$y(0) = \underline{C_2 = 0}$

$y'(0) = C_1 = 2$

$\underline{y = 2x e^{3x}}$ SL

Mit dem Lösungsansatz $y = e^{r x}$ lässt sich eine Fundamentalbasis der homogenen linearen DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

gewinnen. Die Basislösungen hängen dabei von der Art der Lösungen der zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$a r^2 + b r + c = 0$$

ab, wobei die folgenden Fälle zu unterscheiden sind

Fall 1: $\quad r_1 \neq r_2 , \qquad r_1 , r_2 \in \mathbb{R}$

Fundamentalbasis: $\quad y_1 = e^{r_1 x} , \qquad y_2 = e^{r_2 x}$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x}$

Allgemeine Lösung

Fall 2: $r_1 = r_2 = r\,, \qquad r \in \mathbb{R}$

Fundamentalbasis: $y_1 = e^{r x}\,, \qquad y_2 = x\, e^{r x}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = (C_1 x + C_2) \cdot e^{r x}$

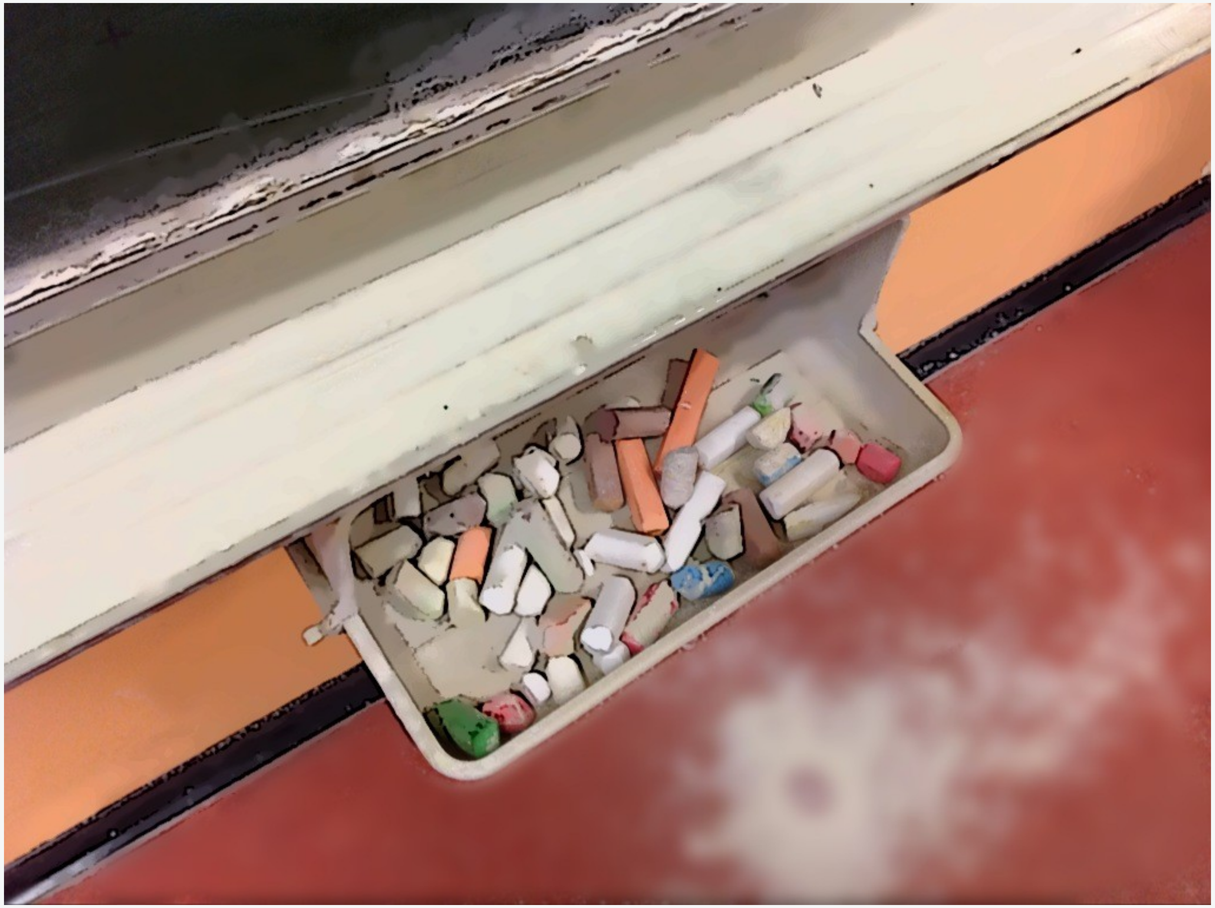
Fall 3: $r_{1,\,2} = \lambda \pm i \mu\,, \qquad \lambda\,,\ \mu \in \mathbb{R}$

Fundamentalbasis:

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \cos \mu x\,, \qquad y_2(x) = e^{\lambda x} \sin \mu x$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{\lambda x} \left(C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x \right)$$



Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

Aufgabe 1: $y'' - 18\,y' + 81\,y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = -1$

Aufgabe 2: $y'' - 2\,y' + 3\,y = 0\,, \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 0$

Aufgabe 3: $y'' - 2\,y' - 3\,y = 0\,, \quad y(0) = 4\,, \quad y'(0) = -2$

DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Lösung 1

$$y'' - 18\,y' + 81\,y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1$$

Charakteristische Gleichung:

$$r^2 - 18\,r + 81 = 0, \qquad r_1 = r_2 = 9$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = (C_1 + C_2\,x) \cdot e^{9x}$$

Spezielle Lösung:

$$y(x) = (1 - 10\,x) \cdot e^{9x}$$

$$y'' - 2y' + 3y = 0\,, \qquad y(0) = 2\,, \qquad y'(0) = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$r^2 - 2r + 3 = 0\,, \qquad r_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{2}\; i$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \left(C_1 \cos(\sqrt{2}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{2}\,x) \right) e^x$$

Spezielle Lösung:

$$y(x) = \left(2\cos(\sqrt{2}\,x) - \sqrt{2}\, \sin(\sqrt{2}\,x) \right) e^x$$

DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Lösung 3

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \qquad y(0) = 4, \qquad y'(0) = -2$$

Charakteristische Gleichung:

$$r^2 - 2r - 3 = 0, \qquad r_1 = -1, \qquad r_2 = 3$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

Spezielle Lösung:

$$y(x) = \frac{7}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} e^{3x}$$