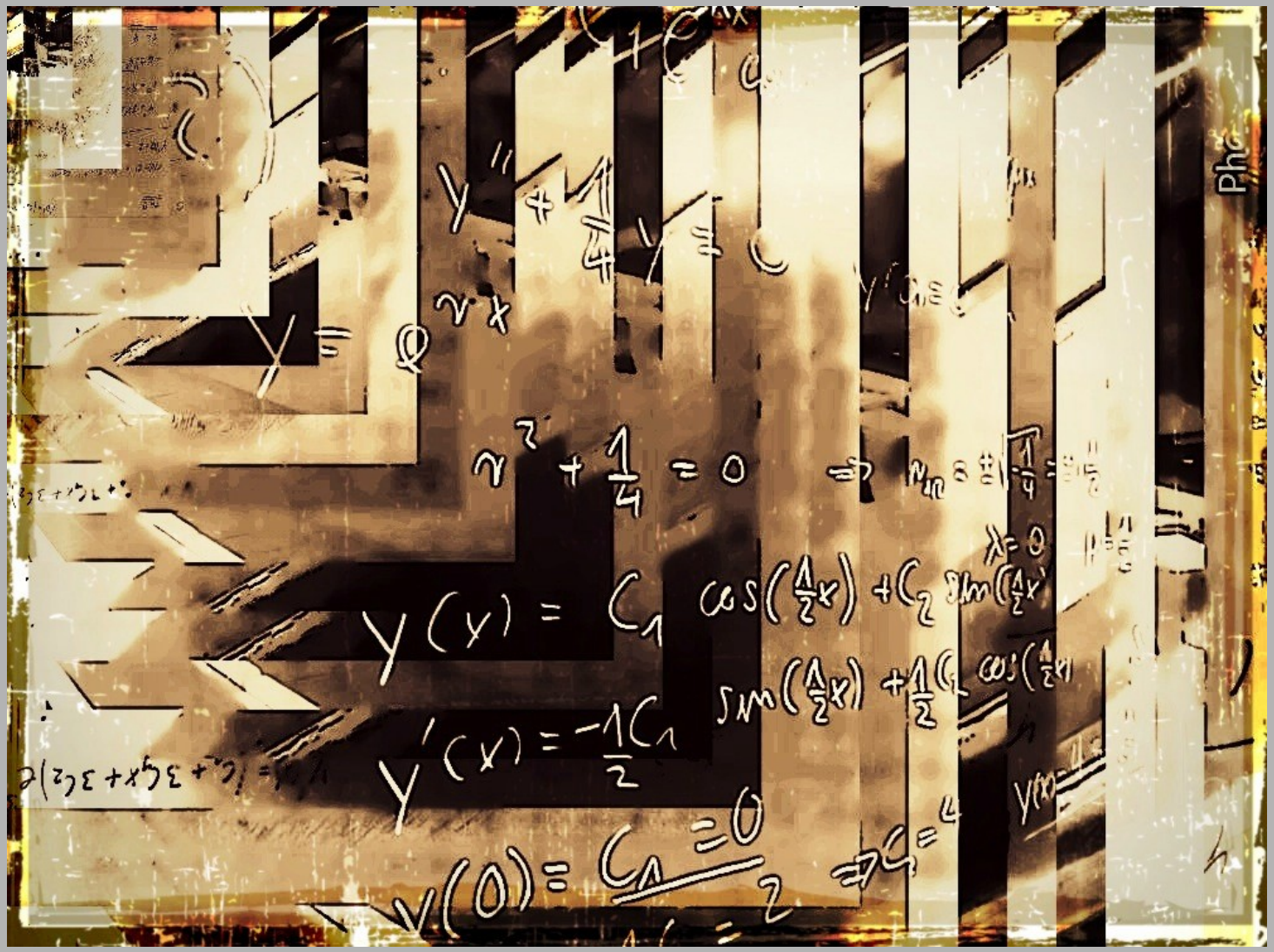
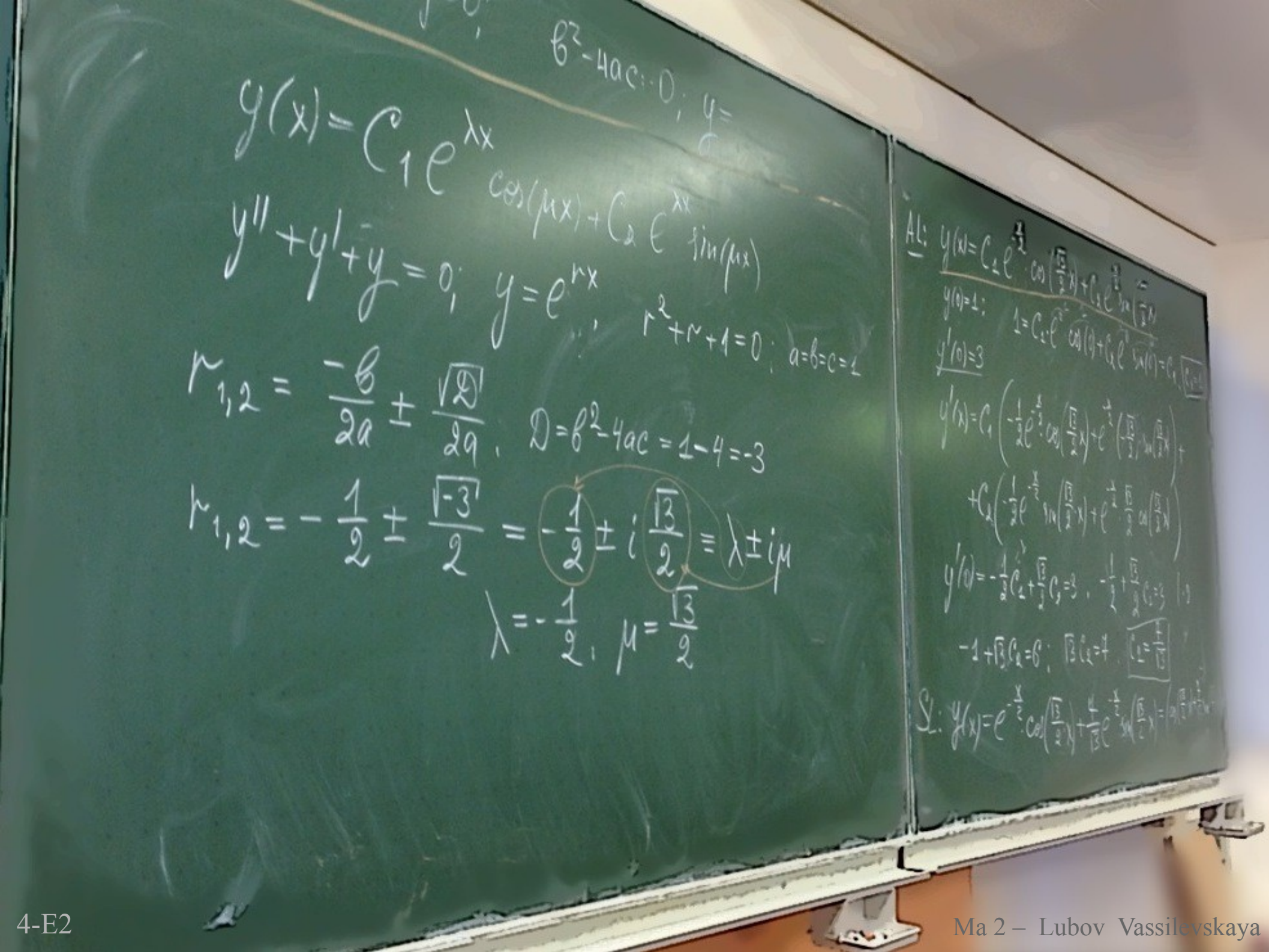
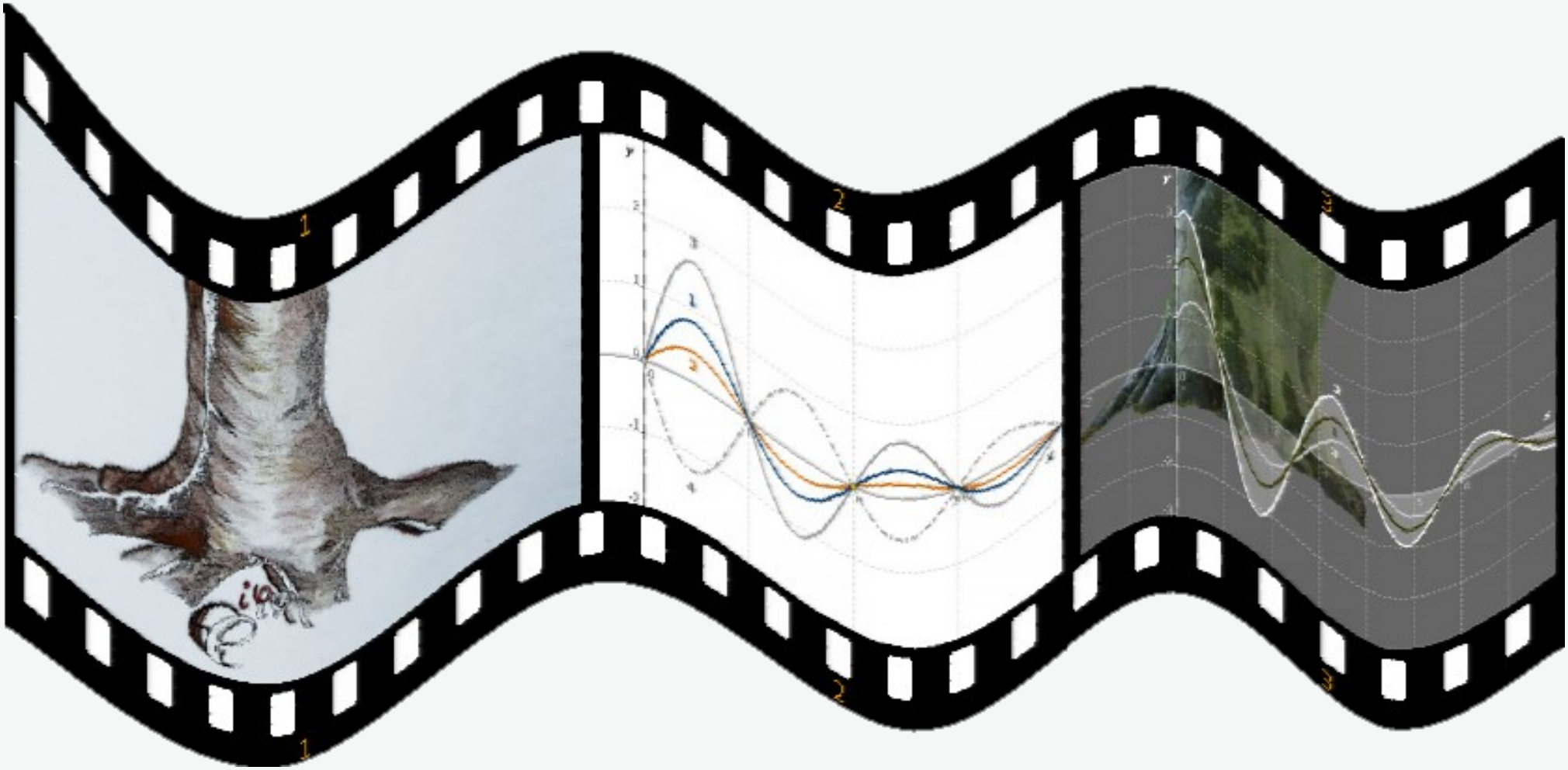


Komplexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung


$b^2-4ac=0$; $y=$
$y(x)=C_1e^{\lambda x}\cos(\mu x)+C_2e^{\lambda x}\sin(\mu x)$
$y''+y'+y=0$; $y=e^{rx}$; $r^2+r+1=0$; $a=b=c=1$
$r_{1,2}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$, $D=b^2-4ac=1-4=-3$
$r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\equiv\lambda\pm i\mu$
$\lambda=-\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{\sqrt{3}}{2}$
AL: $y(x)=C_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$
$y(0)=1$: $1=C_1e^{0}\cos(0)+C_2e^{0}\sin(0)=C_1$
$y'(0)=3$
$y'(x)=C_1\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\right)+$
$+C_2\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$
$y'(0)=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2=3$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2=3$ | $\cdot 2$
$-1+\sqrt{3}C_2=6$; $\sqrt{3}C_2=7$; $C_2=\frac{7}{\sqrt{3}}$
SL: $y(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{7}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$



Die charakteristische Gleichung einer homogenen DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt komplexe Lösungen

$$r_{1,2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

$$b^2 - 4ac = -(4ac - b^2) = i^2(4ac - b^2), \qquad 4ac - b^2 > 0$$

Diese Lösungen stellen wir in folgender Form dar:

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{i^2(4ac - b^2)}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \lambda \pm i\,\mu$$

$$r_1 = \lambda + i\,\mu, \qquad r_2 = \lambda - i\,\mu \qquad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{R})$$

$$\lambda = -\frac{b}{2a}, \qquad \mu = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die Basisfunktionen sind

$$y_1(x) = e^{(\lambda + i\mu)\,x}, \qquad y_2(x) = e^{(\lambda - i\mu)\,x}$$

Die Eulerische Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$

Die Basisfunktionen sind komplexwertige Funktionen

$$y_1(x) = e^{\lambda x}\ e^{i\mu x} = e^{\lambda x}\ (\cos\mu\, x + i \sin\mu\, x)$$

$$y_2(x) = e^{\lambda x}\ e^{-i\mu x} = e^{\lambda x}\ (\cos\mu\, x - i \sin\mu\, x)$$

Man bevorzugt aber reelle Funktionen. Solche Lösungen kann man bestimmen und zwar wie folgt: Wenn zwei Funktionen Lösungen einer DGL 2. Ordnung $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$ sind, dann ist auch jede Linearkombination dieser Lösungen eine Lösung der DGL. Bilden wir die Summe und die Differenz von diesen Lösungen

$$y_1(x) + y_2(x) = 2\, e^{\lambda x} \cos \mu\, x \equiv 2\, u(x)$$

$$y_1(x) - y_2(x) = 2i\, e^{\lambda x} \sin \mu\, x \equiv 2i\, v(x)$$

$$u(x) = e^{\lambda x} \cos \mu\, x = \operatorname{Re} y_1(x)$$

$$v(x) = e^{\lambda x} \sin \mu\, x = \operatorname{Im} y_1(x)$$

Zeigen Sie, dass die reellen Funktionen $u\,(x)$ und $v\,(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden.

Um zu prüfen, ob die reellen Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden, zeigen wir, dass die Wronski-Determinante von Null verschieden ist

$$W(u, v) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda x} \cos \mu x & e^{\lambda x} \sin \mu x \\ e^{\lambda x}(\lambda \cos \mu x - \mu \sin \mu x) & e^{\lambda x}(\lambda \sin \mu x + \mu \cos \mu x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\lambda x} \begin{vmatrix} \cos \mu x & \sin \mu x \\ (\lambda \cos \mu x - \mu \sin \mu x) & (\lambda \sin \mu x + \mu \cos \mu x) \end{vmatrix} =$$

$$= \mu \left(\cos^2 \mu x + \sin^2 \mu x\right) e^{2\lambda x} = \mu e^{2\lambda x}$$

$$W(u, v) = \mu e^{2\lambda x}$$

Wenn $\mu \neq 0$ ist, ist die Wronski-Determinante ungleich Null, und $u(x)$ und $v(x)$ bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen. Für $\mu = 0$ sind die Würzeln reell, und diese Betrachtungen sind nicht anwendbar.

Sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung komplexe Zahlen

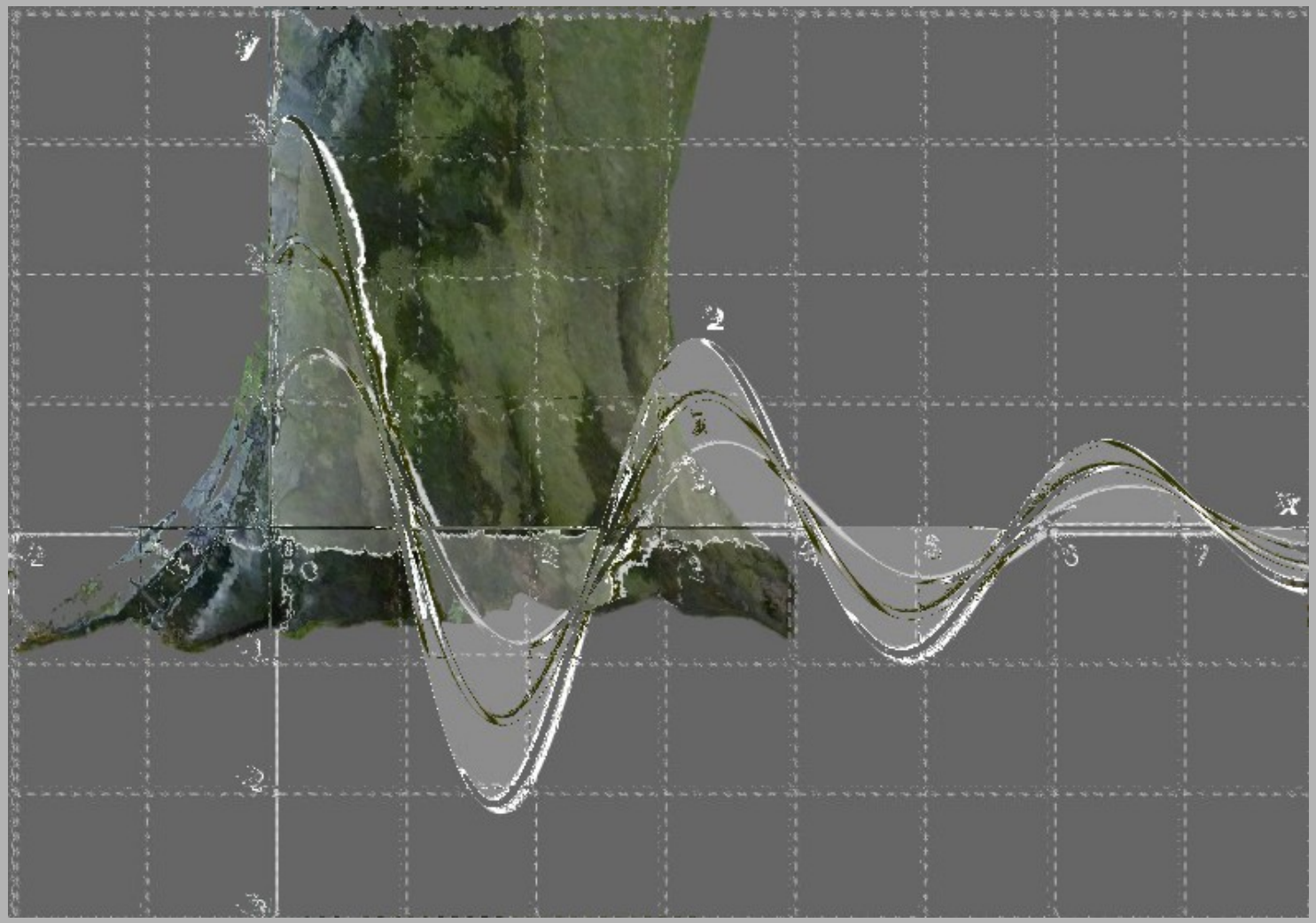
$$r_{1,\,2} = \lambda \pm i\,\mu$$

dann ist die allgemeine Lösung in der Form darstellbar

$$y(x) = C_1\, e^{\lambda x} \cos \mu\, x + C_2\, e^{\lambda x} \sin \mu\, x$$

$C_1,\ C_2$ – beliebige Konstanten.

Jeder der Terme stellt wegen der trigonometrischen Faktoren eine Oszillation dar, die exponentiell wächst oder fällt, je nach Vorzeichen von λ.



Komplexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung

Aufgaben

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme

Aufgabe 1: $y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

Aufgabe 2: $y'' + \frac{1}{4} y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

Aufgabe 3: $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$

Aufgabe 4: $16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1$

Aufgabe 5: $y'' + \frac{1}{2} y' + \frac{65}{16} y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

$$y'' + y' + y = 0$$

Die charakteristische Gleichung lautet $r^2 + r + 1 = 0$
und ihre Würzeln sind

$$r_{1,\,2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \lambda \pm i\,\mu\,, \qquad \lambda = -\frac{1}{2}\,, \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y(x) = C_1\, e^{\lambda x} \cos \mu\, x + C_2\, e^{\lambda x} \sin \mu\, x$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = C_1\, e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + C_2\, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$$

Der Parameter λ ist negativ, und daher sind die Lösungen abnehmende Oszillationen.

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3$$

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \frac{7}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$$

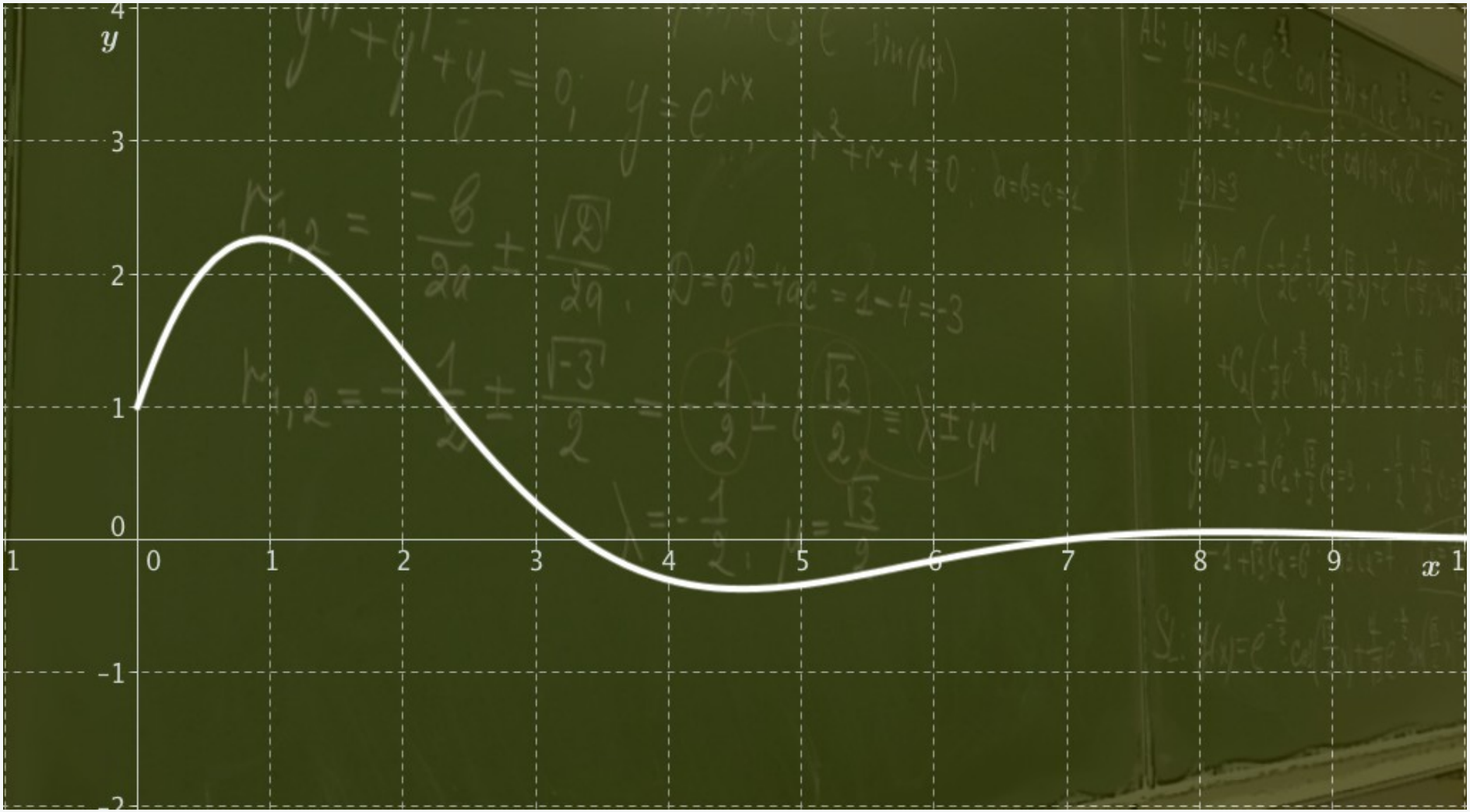


Abb. L1-1: Integralkurve der DGL $y'' + y' + y = 0$ mit $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3: \qquad y = e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2} + \frac{7}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}$$

Allgemeine Lösung der DGL: $y'' + y' + y = 0$

$$y = C_1\, e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + C_2\, e^{-\frac{x}{2}} \left(\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 6: \quad y = 2\,e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \frac{14}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3: \quad y = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \frac{7}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$

3) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -3: \quad y = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) - \frac{5}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$

4) $y(0) = 0, \quad y'(0) = -6: \quad y = -4\sqrt{3}\, e^{-\frac{x}{2}} \left(\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$

Die Abbildung folgt.

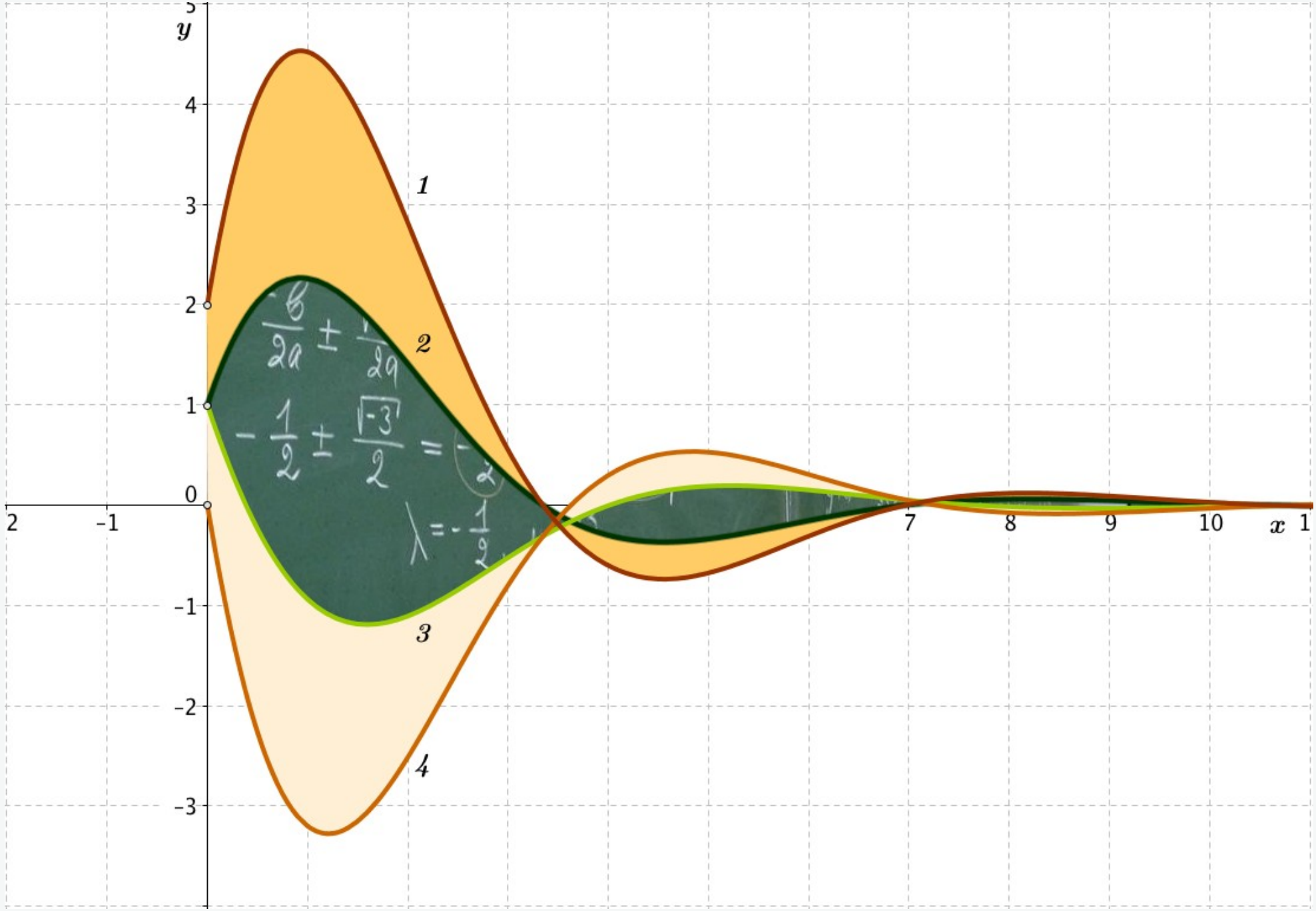


Abb. L1-2: Integralkurven der DGL y'' + y' + y = 0, die folgendem Anfangswertproblem entsprechen 1) y (0) = 2, y' (0) = 6, 2) y (0) = 1, y' (0) = 3, 3) y (0) = 1, y' (0) = -3, 4) y (0) = 0, y' (0) = -6

Allgemeine Lösung der DGL: $y'' + y' + y = 0$

$$y = C_1\, e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + C_2\, e^{-\frac{x}{2}} \left(\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 4: \quad y = 2\,e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \frac{5}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right)$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 4: \quad y = e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + 3\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right)$

3) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 4: \quad y = e^{-\frac{x}{2}} \left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \frac{7}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right)$

4) $y(0) = -2, \quad y'(0) = 4: \quad y = 2\,e^{-\frac{x}{2}} \left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right)$

Die Abbildung folgt.

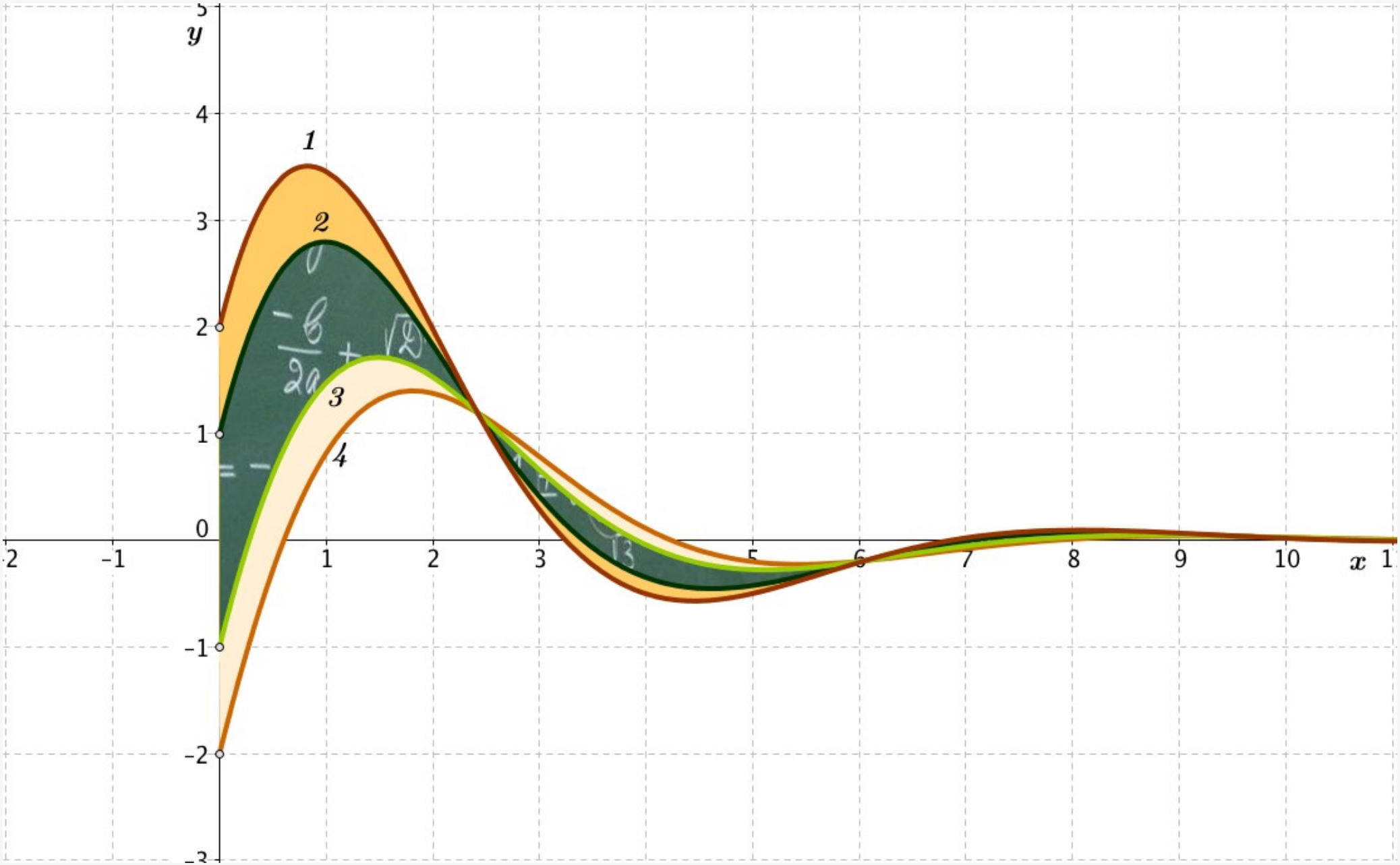


Abb. L1-3: Integralkurven der DGL $y'' + y' + y = 0$, die folgendem Anfangswertproblem entsprechen 1) $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$, 2) $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, 3) $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$, 4) $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$

$$y'' + \frac{1}{4}\, y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 2$$

$$y'' + \frac{1}{4}\, y = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r_{1,\,2} = \pm\, \frac{i}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0\,, \quad \mu = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = C_1\, e^{\lambda x} \cos \mu\, x + C_2\, e^{\lambda x} \sin \mu\, x$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 2: \quad y(x) = 4 \sin \frac{x}{2}$$

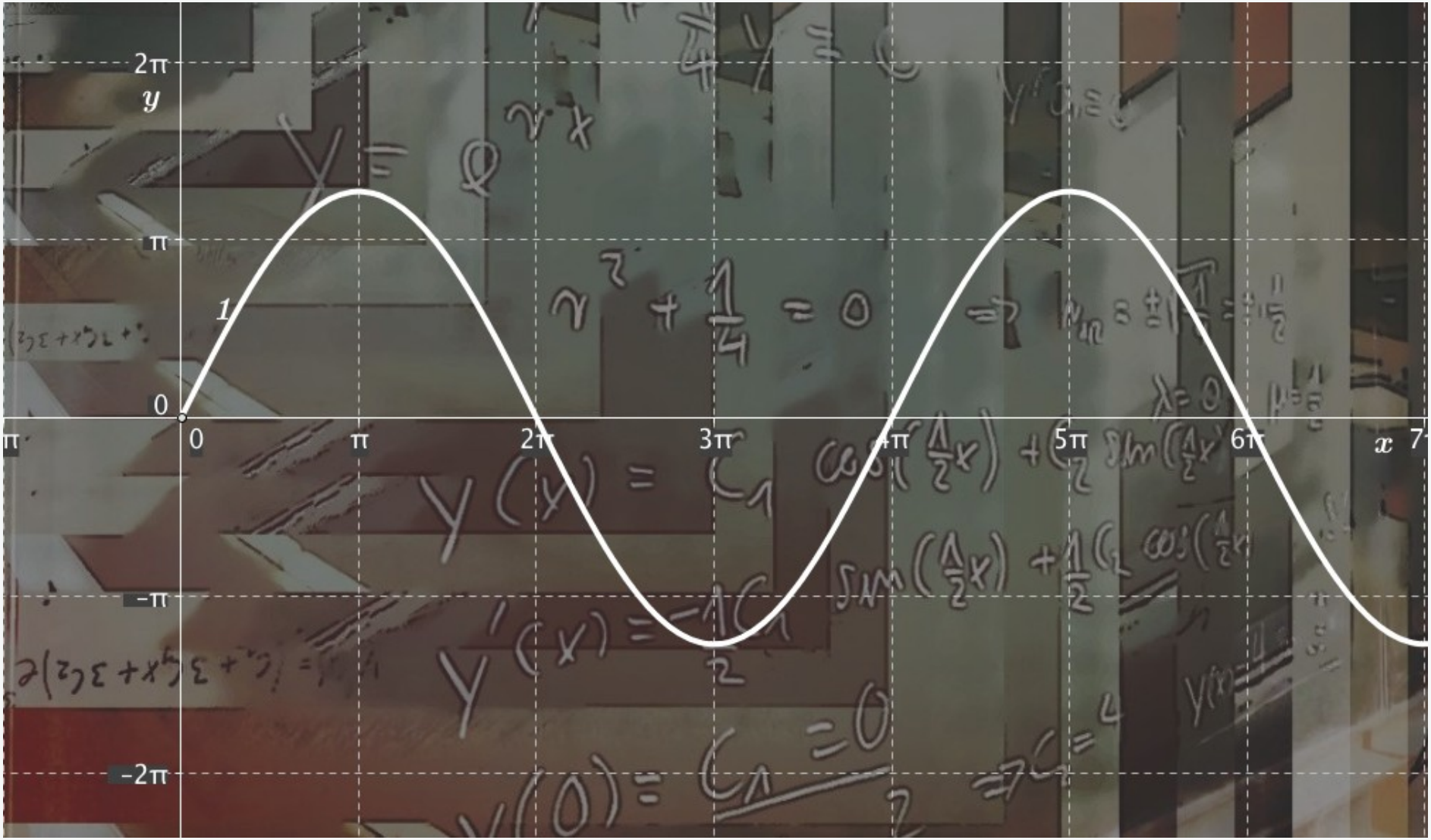


Abb. L2-1: Integralkurven der DGL y'' + 1/4 y = 0, die dem Anfangswertproblem y (0) = 0, y' (0) = 2 entspricht

Allgemeine Lösung der DGL: $y'' + \frac{1}{4}\, y = 0$

$$y(x) = C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}$$

Spezielle Lösung:

1) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 2: \quad y(x) = 4 \sin\frac{x}{2}$

2) $y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{1}{2}: \quad y(x) = -\sin\frac{x}{2}$

3) $y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}: \quad y(x) = -3\sin\frac{x}{2}$

Die Abbildung folgt.

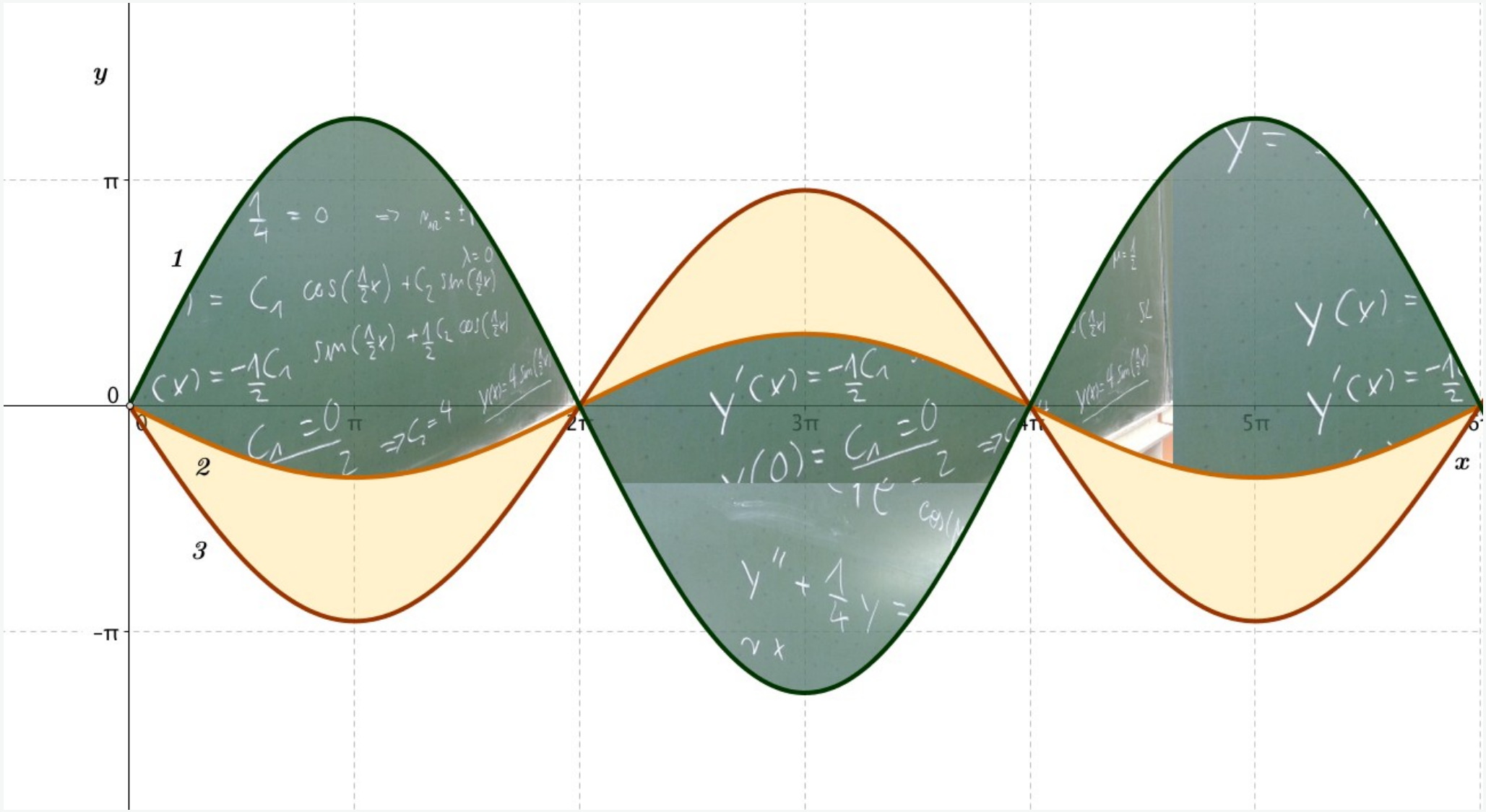


Abb. L2-2: Integralkurven der DGL y'' + 1/4 y = 0, die folgendem Anfangswertproblem entsprechen 1) y (0) = 0, y' (0) = 2, 2) y (0) = 0, y' (0) = -1/2, 3) y (0) = 0, y' (0) = -3/2

$$y'' + 9y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 4$$

$$y'' + 9y = 0, \qquad r^2 + 9 = 0$$

$$r_{1,\,2} = \pm 3i\,, \qquad \lambda = 0\,, \quad \mu = 3$$

$$y(x) = C_1\, e^{\lambda x} \cos \mu x + C_2\, e^{\lambda x} \sin \mu x$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

Spezielle Lösung:

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 4: \qquad y(x) = \frac{4}{3} \sin 3x$$

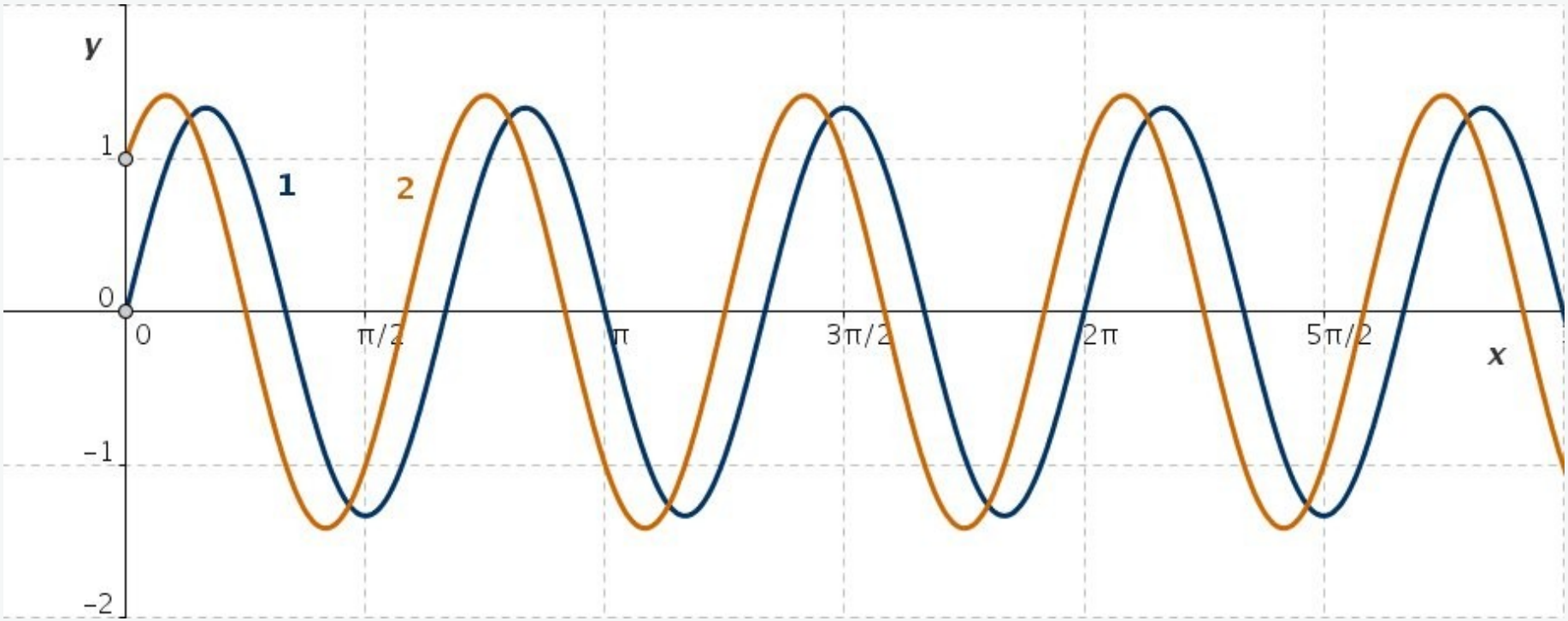


Abb. L3-1: Integralkurven der DGL $y'' + 9y = 0$, die folgendem Anfangswertproblem entsprechen 1) $y(0) = 0,\ y'(0) = 4$, 2) $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

$$1)\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 4:\qquad y(x) = \frac{4}{3}\sin 3x$$

$$2)\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 3:\qquad y(x) = \sin 3x + \cos 3x$$

$$16\,y'' - 8\,y' + 145\,y = 0\,, \qquad y(0) = -2\,, \qquad y'(0) = 1$$

Die charakteristische Gleichung lautet $16\,r^2 - 8\,r + 145 = 0$

$$r_{1,\,2} = \frac{1}{4} \pm 3\,i\,, \qquad \lambda = \frac{1}{4}\,, \quad \mu = 3$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = C_1\, e^{\frac{x}{4}} \cos 3\,x + C_2\, e^{\frac{x}{4}} \sin 3\,x$$

$$y(0) = C_1 = -2$$

$$y' = \left[\left(\frac{C_1}{4} + 3\,C_2\right)\cos 3\,x + \left(\frac{C_2}{4} - 3\,C_1\right)\sin 3\,x\right] e^{\frac{x}{4}}$$

$$y'(0) = \frac{C_1}{4} + 3\,C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y = -2\, e^{\frac{x}{4}} \cos 3\,x + \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{4}} \sin 3\,x$$

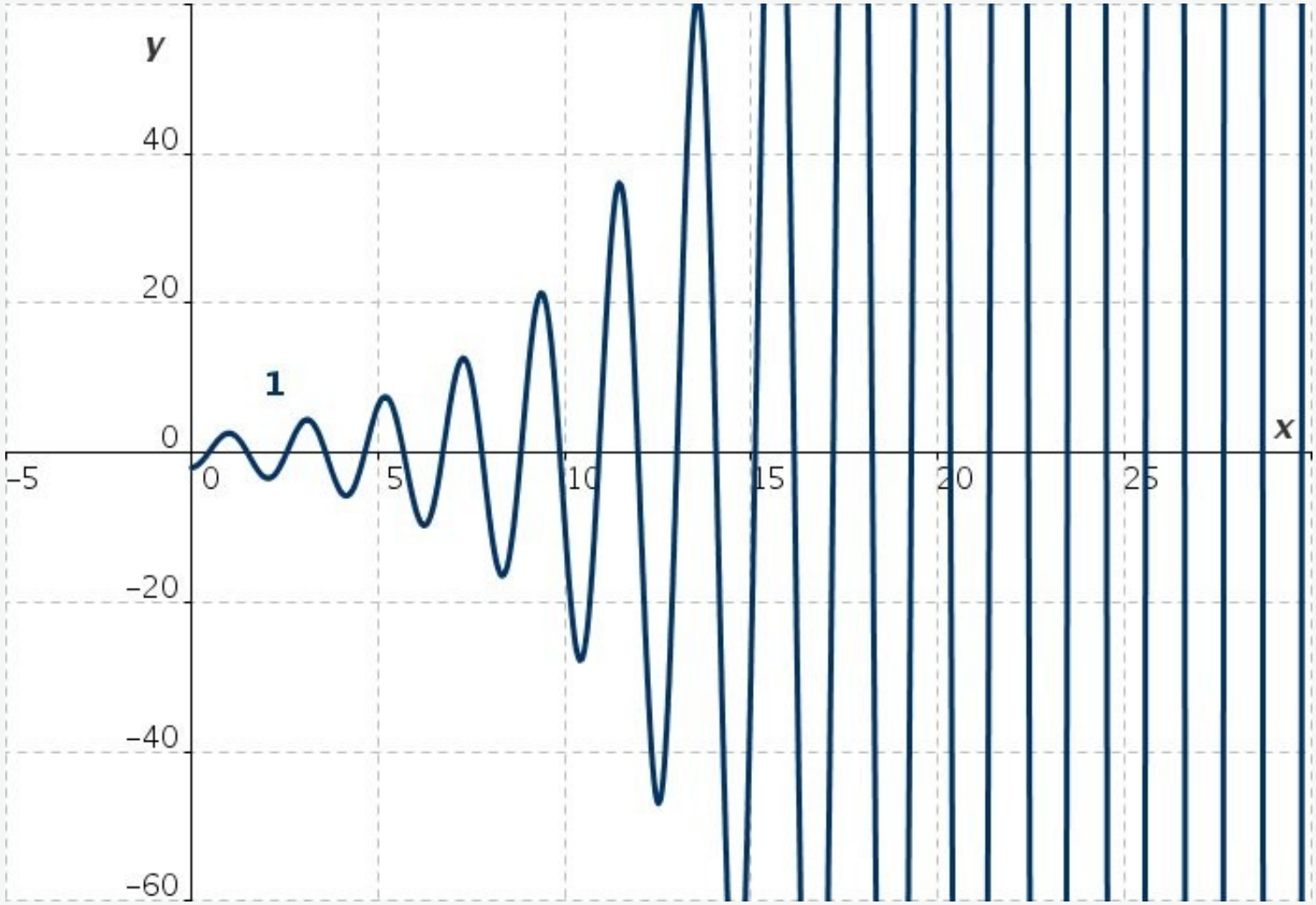


Abb. L4-1: Integralkurve der DGL 16 y'' - 8 y' + 145 y = 0, die dem Anfangswertproblem y (0) = -2, y' (0) = 1 entspricht (ansteigende Oszillationen)

$$y'' + \frac{1}{2}\, y' + \frac{65}{16}\, y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 2$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1\, e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x) + C_2\, e^{-\frac{x}{4}} \cos(2x)$$

Spezielle Lösung:

$$y(x) = \frac{5}{4}\, e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x) + 2\, e^{-\frac{x}{4}} \cos(2x)$$

Die Abbildung folgt.

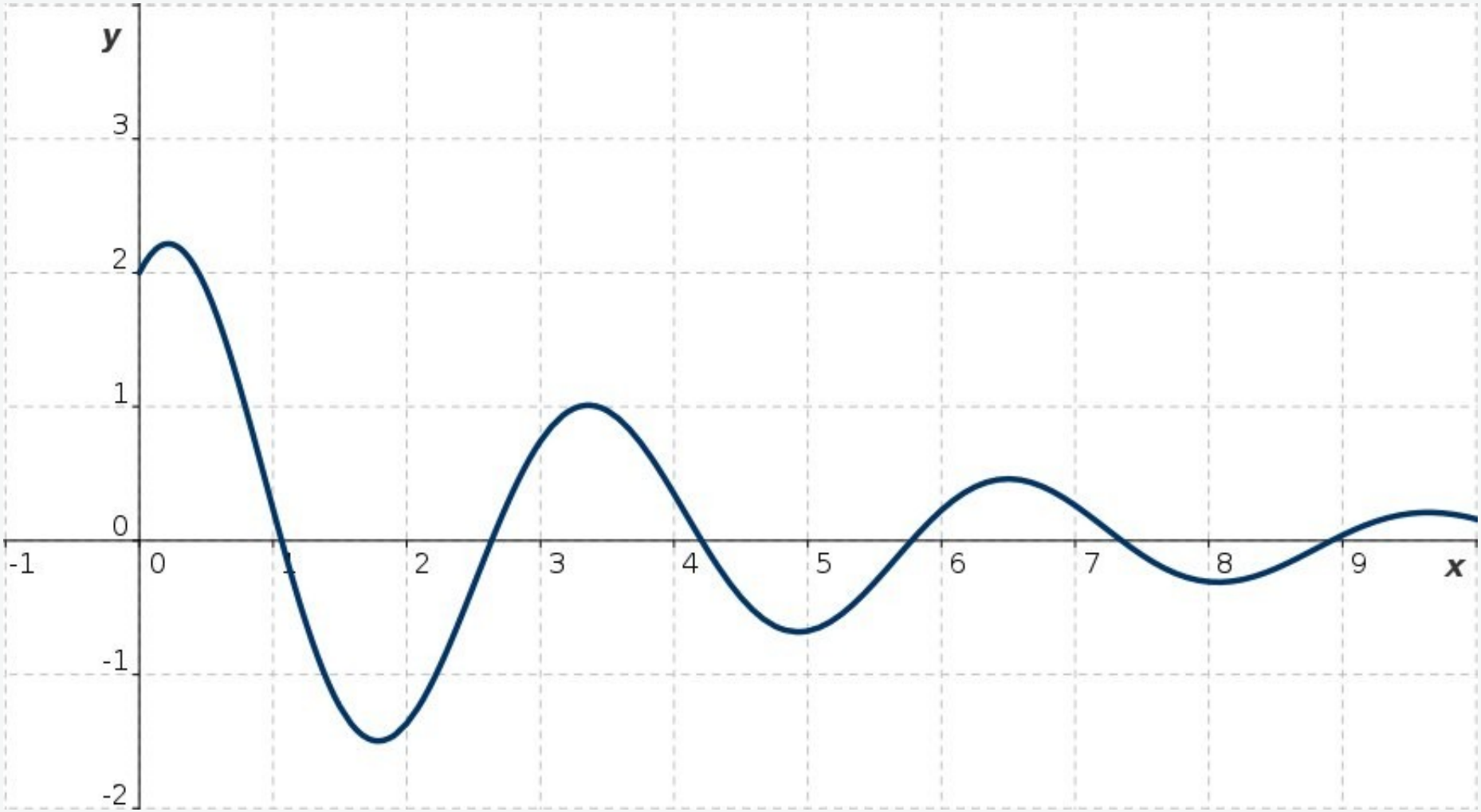


Abb. L5-1: Integralkurve der DGL, die dem Anfangswertproblem y (0) = 2, y' (0) = 2 entspricht (abfallende Oszillationen)

$$DGL \qquad : y'' + \frac{1}{2}\, y' + \frac{65}{16}\, y = 0$$

$$DGL \quad : y'' + \frac{1}{2}\, y' + \frac{65}{16}\, y = 0$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1\, e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x) + C_2\, e^{-\frac{x}{4}} \cos(2x)$$

Spezielle Lösungen:

$$1)\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2 \quad : y(x) = \frac{5}{4}\, e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x) + 2\, e^{-\frac{x}{4}} \cos(2x)$$

$$2)\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2 \quad : y(x) = \frac{11}{8}\, e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x) + 3\, e^{-\frac{x}{4}} \cos(2x)$$

$$3)\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad : y(x) = \frac{9}{8}\, e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x) + e^{-\frac{x}{4}} \cos(2x)$$

Die Abbildung folgt.

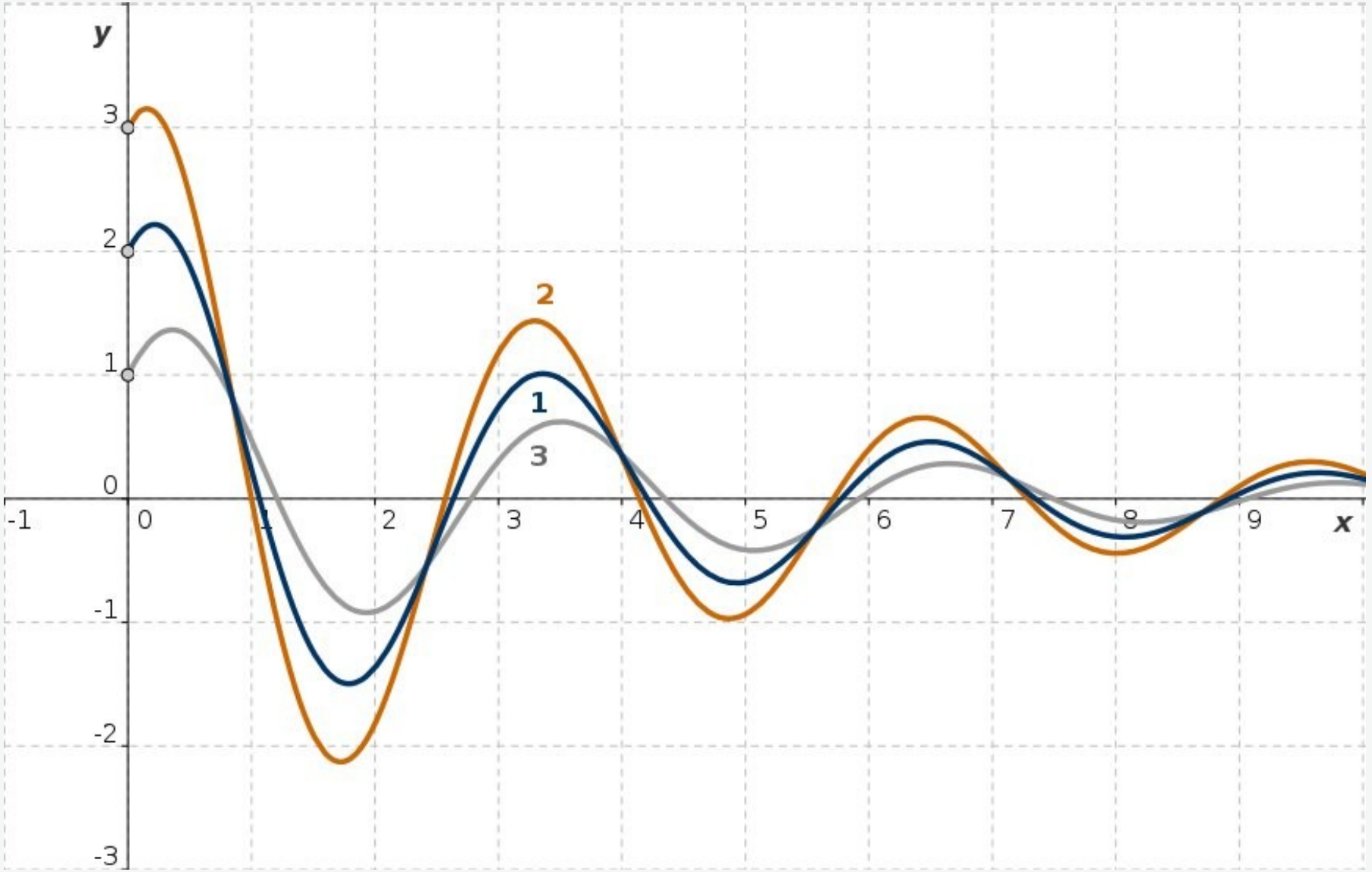


Abb. L5-2: Integralkurven der DGL, die folgendem Anfangswertproblem entsprechen
1) y (0) = 2, y' (0) = 2, 2) y (0) = 3, y' (0) = 2, 3) y (0) = 1, y' (0) = 2

$$DGL \quad : y'' + \frac{1}{2}\, y' + \frac{65}{16}\, y = 0$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1\, e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x) + C_2\, e^{-\frac{x}{4}} \cos(2x)$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(\pi) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad : y(x) = e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x)$

2) $y(\pi) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad : y(x) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x)$

3) $y(\pi) = 0, \quad y'(0) = 4 \quad : y(x) = 2\, e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x)$

4) $y(\pi) = 0, \quad y'(0) = -3 \quad : y(x) = -\frac{3}{2}\, e^{-\frac{x}{4}} \sin(2x)$

Die Abbildung folgt.

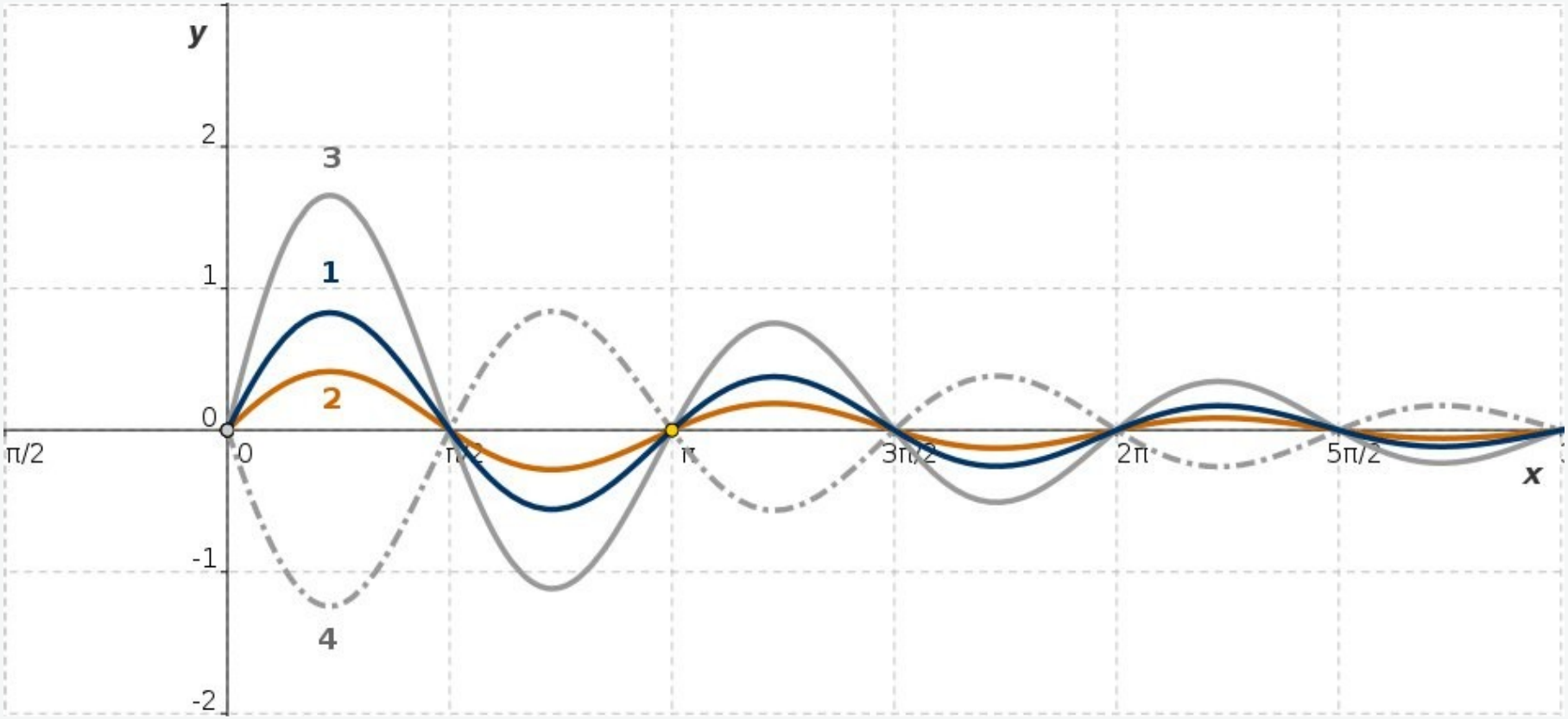


Abb. L5-3: Integralkurven der DGL, die folgendem Anfangswertproblem entsprechen 1) $y(\pi) = 0,\ y'(0) = 2$, 2) $y(\pi) = 0,\ y'(0) = 1$, 3) $y(\pi) = 0,\ y'(0) = 4$, 4) $y(\pi) = 0,\ y'(0) = -3$