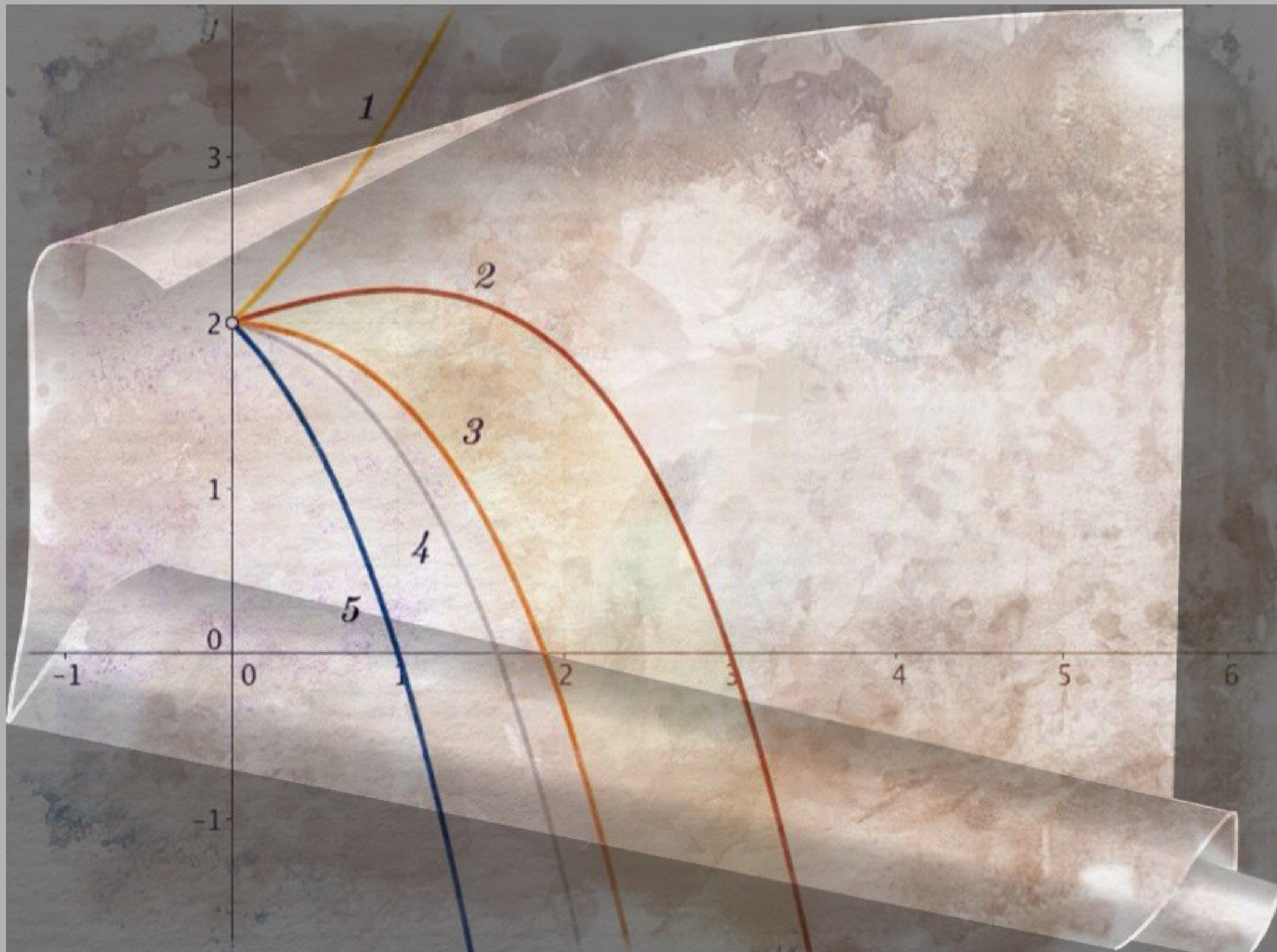
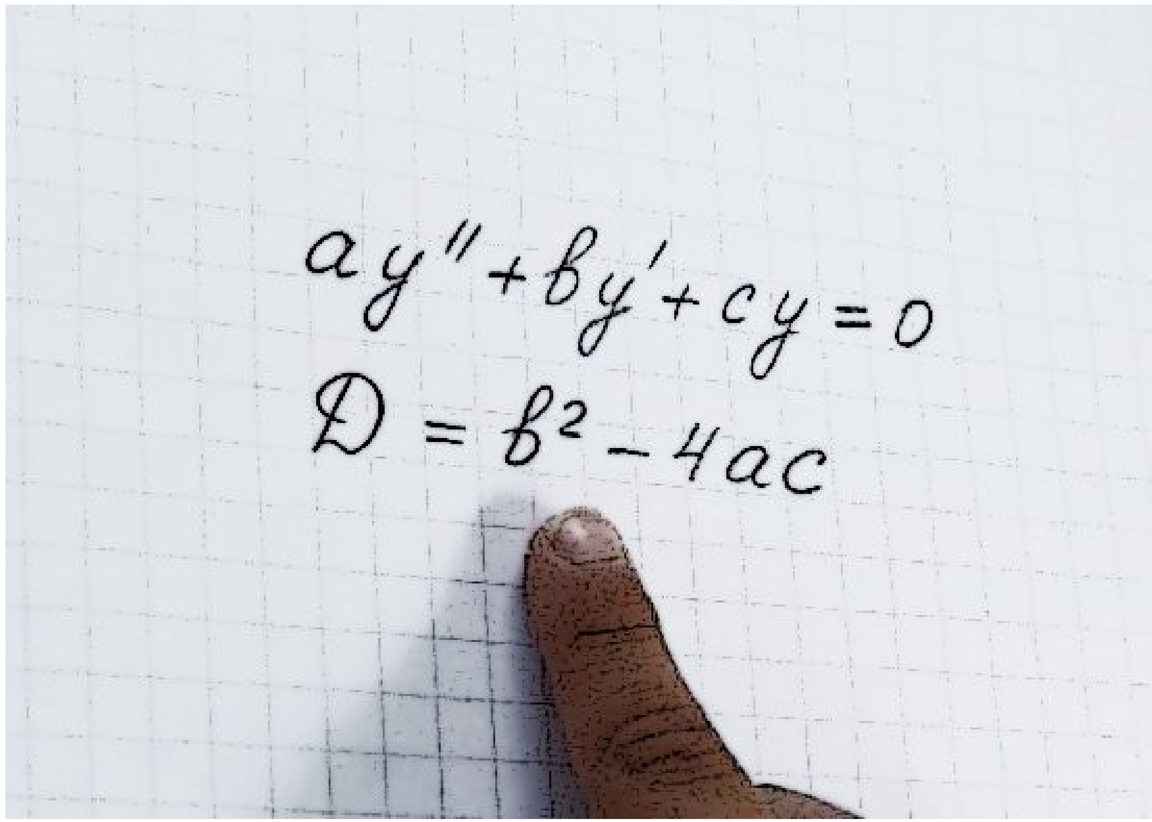


Integration der homogenen linearen DGL 2. Ordnung


$ay'' + by' + cy = 0$
$D = b^2 - 4ac$

Eine Fundamentalbasis der homogenen DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = 0$$

lässt sich durch einen Lösungsansatz in Form einer Exponentialfunktion vom Typ

$$y = e^{r x} \qquad (r \;-\; \text{Parameter})$$

gewinnen

$$y = e^{r x}, \qquad y' = r \cdot e^{r x}, \qquad y'' = r^2 \cdot e^{r x}$$

$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(a\, r^2 + b\, r + c\right) e^{r x} = 0$$

$$a\, r^2 + b\, r + c \;=\; 0$$

Diese charakteristische Gleichung besitzt folgende Lösungen

$$r_{1,2} = \frac{1}{2\,a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\right) = \frac{1}{2\,a}\left(-b \pm \sqrt{D}\right), \qquad D = b^2 - 4\,a\,c$$

Die Diskriminante D entscheidet dabei über die Art der Lösungen, wobei drei Fälle zu unterscheiden sind

Fall 1: $$D = b^2 - 4\,a\,c > 0$$

Die charakteristische Gleichung besitzt zwei verschiedene reelle Lösungen

Fall 2: $$D = b^2 - 4\,a\,c = 0$$

Die charakteristische Gleichung besitzt zwei gleiche reelle Lösungen

Fall 3: $$D = b^2 - 4\,a\,c < 0$$

Die charakteristische Gleichung besitzt zwei konjugiert komplexe Lösungen

$$D = b^2 - 4\,a\,c \;>\; 0$$

Die charakteristische Gleichung besitzt zwei verschiedene reelle Lösungen

$$r_1, \qquad r_2$$

die den Lösungsfunktionen entsprechen

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x}$$

$$W(y_1,\ y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1\, e^{r_1 x} & r_2\, e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\, e^{(r_1 + r_2)\, x} \neq 0$$

Die Lösungsfunktionen bilden eine Fundamentalbasis der homogenen DGL.

Die allgemeine Lösung dieser DGL ist

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} \qquad (C_1,\ C_2 \in \mathbb{R})$$

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

$$D = b^2 - 4\,a\,c = 0$$

Die charakteristische Gleichung besitzt zwei gleiche reelle Lösungen

$$D = 0: \qquad r_{1,2} = \frac{1}{2\,a}\left(-b \pm \sqrt{D}\right) = -\frac{b}{2\,a}$$

Wir erhalten nur eine Lösungsfunktion:

$$y_1 = y_2 = e^{-\frac{b}{2\,a}\,x}$$

Durch Variation der Konstanten bestimmt man die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL. Der Lösungsansatz ist:

$$y = C(x)\,e^{-\frac{b}{2\,a}\,x}$$

Fall 2: *Doppelwurzeln*

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0, \qquad y = C(x)\,e^{-\frac{b}{2a}x} = C(x)\,e^{-mx}, \qquad m = \frac{b}{2a}$$

$$y' = \left[C'(x) - m\,C(x)\right]\cdot e^{-mx}$$

$$y'' = \left[C''(x) - 2m\,C'(x) + m^2\,C(x)\right]\cdot e^{-mx}$$

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

$$C''(x) - \left(m^2 - \frac{c}{a}\right)C(x) = 0, \qquad m^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0, \qquad C''(x) = 0,$$

$$C(x) = C_1\,x + C_2 \qquad (C_1,\ C_2 \in \mathbb{R})$$

$$y = C(x)\cdot e^{-\frac{b}{2a}x} = \left(C_1\,x + C_2\right)\cdot e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}, \qquad y_2 = x\cdot e^{-\frac{b}{2a}x}$$

Fall 2: Doppelwurzeln

Wir zeigen jetzt, dass diese Lösungen Basislösungen sind

$$y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}, \qquad y_2 = x \cdot e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{b}{2a}x} & x\, e^{-\frac{b}{2a}x} \\ -\frac{b}{2a}\, e^{-\frac{b}{2a}x} & \left(1 - \frac{b\,x}{2a}\right) e^{-\frac{b}{2a}x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-\frac{b}{2a}x} \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ -\frac{b}{2a} & \left(1 - \frac{b\,x}{2a}\right) \end{vmatrix} = e^{-\frac{b\,x}{a}} \begin{vmatrix} 1 & x \\ -\frac{b}{2a} & \left(1 - \frac{b\,x}{2a}\right) \end{vmatrix} = e^{-\frac{b\,x}{a}}$$

Die DGL $ay'' + by' + cy = 0$ hat bei $D = b^2 - 4\,a\,c = 0$ eine Lösungsbasis

$$y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}, \qquad y_2 = x \cdot e^{-\frac{b}{2a}x}$$

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

Aufgabe 1:

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Aufgabe 2:

$$y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 3:

$$y'' - 6\,y' + 9\,y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

Aufgabe 4:

$$y'' + 8\,y' + 16\,y = 0$$

$$y(1) = 4, \quad y'(1) = -2$$

Doppelwurzeln: Lösung 1

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = 0\,, \qquad y(0) = 1\,, \qquad y'(0) = 2$$

Der Lösungsansatz in Form einer Exponentialfunktion vom Typ

$$y = e^{r\,x}, \qquad y' = r \cdot e^{r\,x}, \qquad y'' = r^2 \cdot e^{r\,x}$$

führt zu einer charakteristischen Gleichung

$$r^2 + 4\,r + 4 = (r + 2)^2 = 0, \qquad r_1 = r_2 = -2$$

Folglich ist

$$y(x) = \left(C_1\,x + C_2\right) \cdot e^{-2\,x} = C_1\,x\,e^{-2\,x} + C_2\,e^{-2\,x}$$

die allgemeine Lösung der DGL. Die erste Anfangsbedingung verlangt, dass

$$y(0) = C_2 = 1$$

gilt. Um die zweite Anfangsbedingung zu erfüllen, bestimmen wir zuerst die erste Ableitung der Funktion $y = y\,(x)$

$$y'(x) = C_1\,(1 - 2\,x)\,e^{-2\,x} - 2\,C_2\,e^{-2\,x} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = C_1 - 2\,C_2 = 2$$

$$C_1 = 4, \qquad C_2 = 1, \qquad y(x) = e^{-2\,x}\,(4\,x + 1)$$

Das ist die Lösung des Anfangswertproblems.

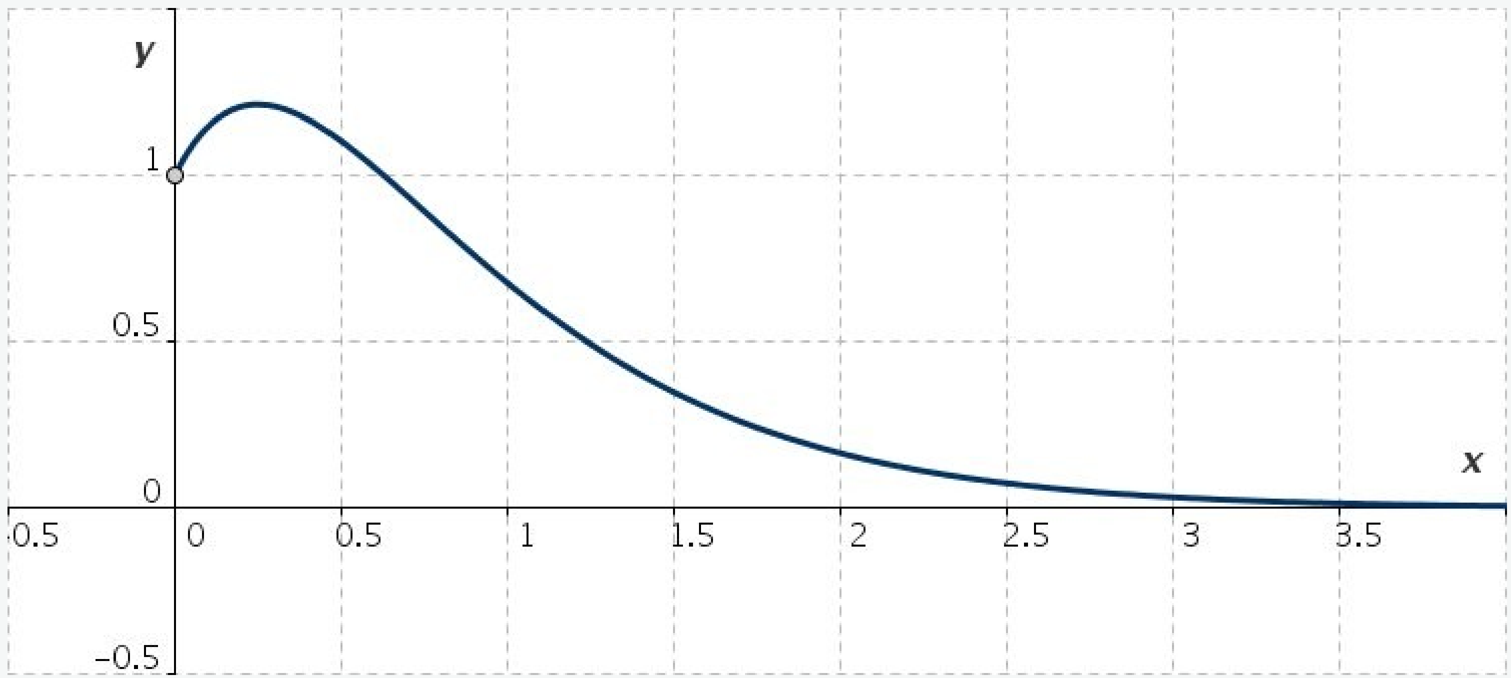


Abb. L1-1: Integralkurve der DGL $y'' + 4\,y' + 4\,y = 0$, die dem Anfangswertproblem $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 2$ entspricht

$$y\left(x\right) = e^{-2\,x}\left(4\,x + 1\right)$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{-2x}\,(C_1\, x + C_2)$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 4, \quad y(x) = (6x + 1)\, e^{-2x}$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y(x) = (4x + 1)\, e^{-2x}$

3) $y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}, \quad y(x) = \left(\frac{5}{2}\, x + 1\right) e^{-2x}$

4) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \quad y(x) = e^{-2x}$

5) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -6, \quad y(x) = (1 - 4x)\, e^{-2x}$

6) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -10, \quad y(x) = (1 - 8x)\, e^{-2x}$

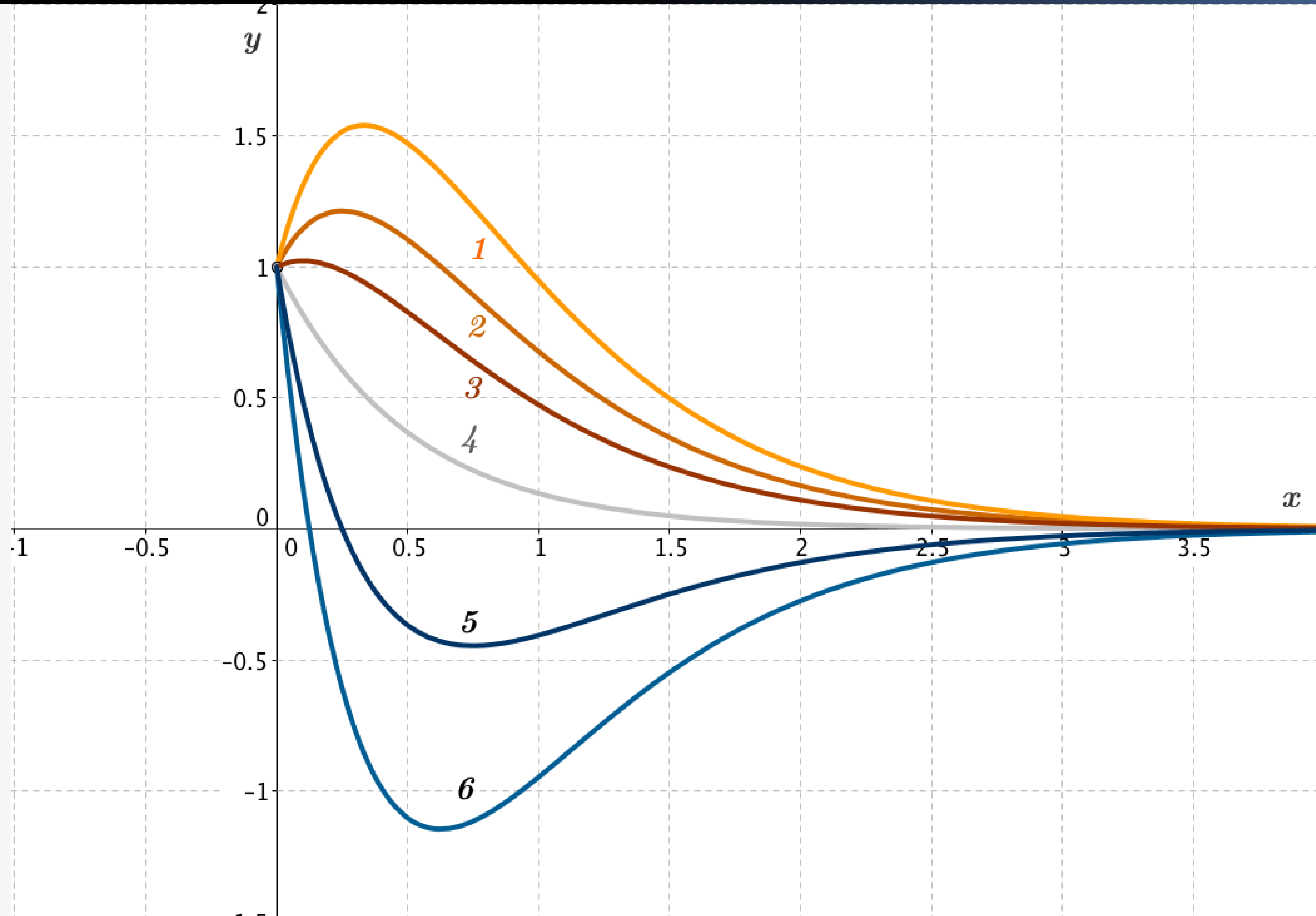


Abb. L1-2: Integralkurven der DGL $y'' + 4\,y' + 4\,y = 0$, die den Anfangswertbedingungen auf der vorigen Seite entsprechen

$$y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0\,, \qquad y(0) = 2\,, \qquad y'(0) = \frac{1}{3}$$

$$r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = \left(C_1\, x + C_2 \right) \cdot e^{\frac{x}{2}} = C_1\, x\, e^{\frac{x}{2}} + C_2\, e^{\frac{x}{2}}$$

$$y(0) = C_2 = 2$$

$$y'(x) = C_1 \left(1 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{x}{2}} + \frac{C_2}{2}\, e^{\frac{x}{2}}$$

$$y'(0) = C_1 + \frac{C_2}{2} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{2}{3}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(2 - \frac{2}{3}\, x \right)$$

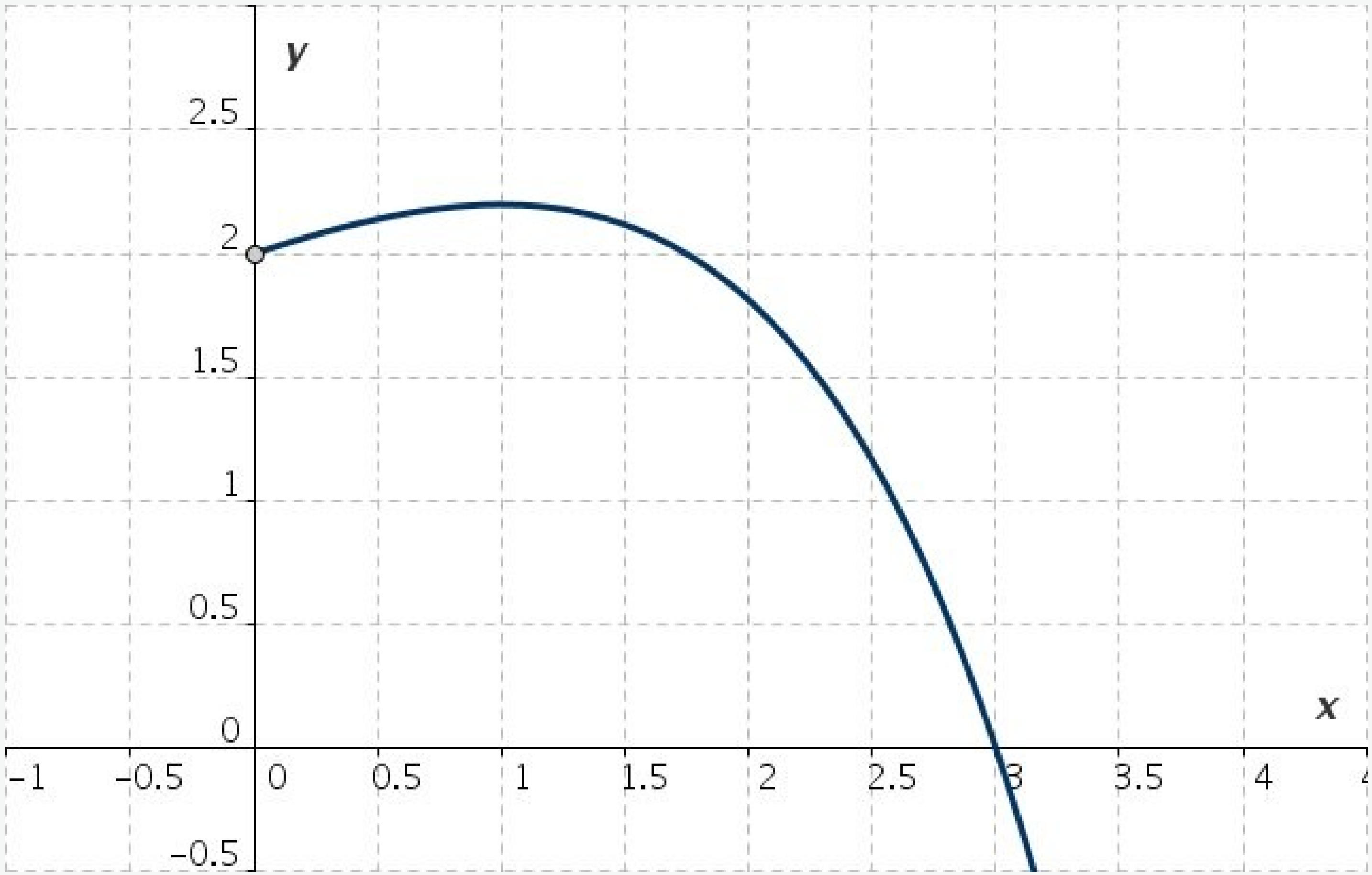


Abb. L2-1: Integralkurve der DGL $y'' - y' + 1/4\, y = 0$, die dem Anfangswertproblem $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/3$ entspricht

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \left(C_1 \, x + C_2 \right) \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y(x) = 2\, e^{\frac{x}{2}}$

2) $y(0) = 2, \quad y'(0) = \dfrac{1}{3}, \quad y(x) = \left(2 - \dfrac{2}{3}\, x\right) e^{\frac{x}{2}}$

3) $y(0) = 2, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{16}, \quad y(x) = \left(2 - \dfrac{17}{16}\, x\right) e^{\frac{x}{2}}$

4) $y(0) = 2, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{4}, \quad y(x) = \left(2 - \dfrac{5}{4}\, x\right) e^{\frac{x}{2}}$

5) $y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y(x) = (2 - 2\, x)\, e^{\frac{x}{2}}$

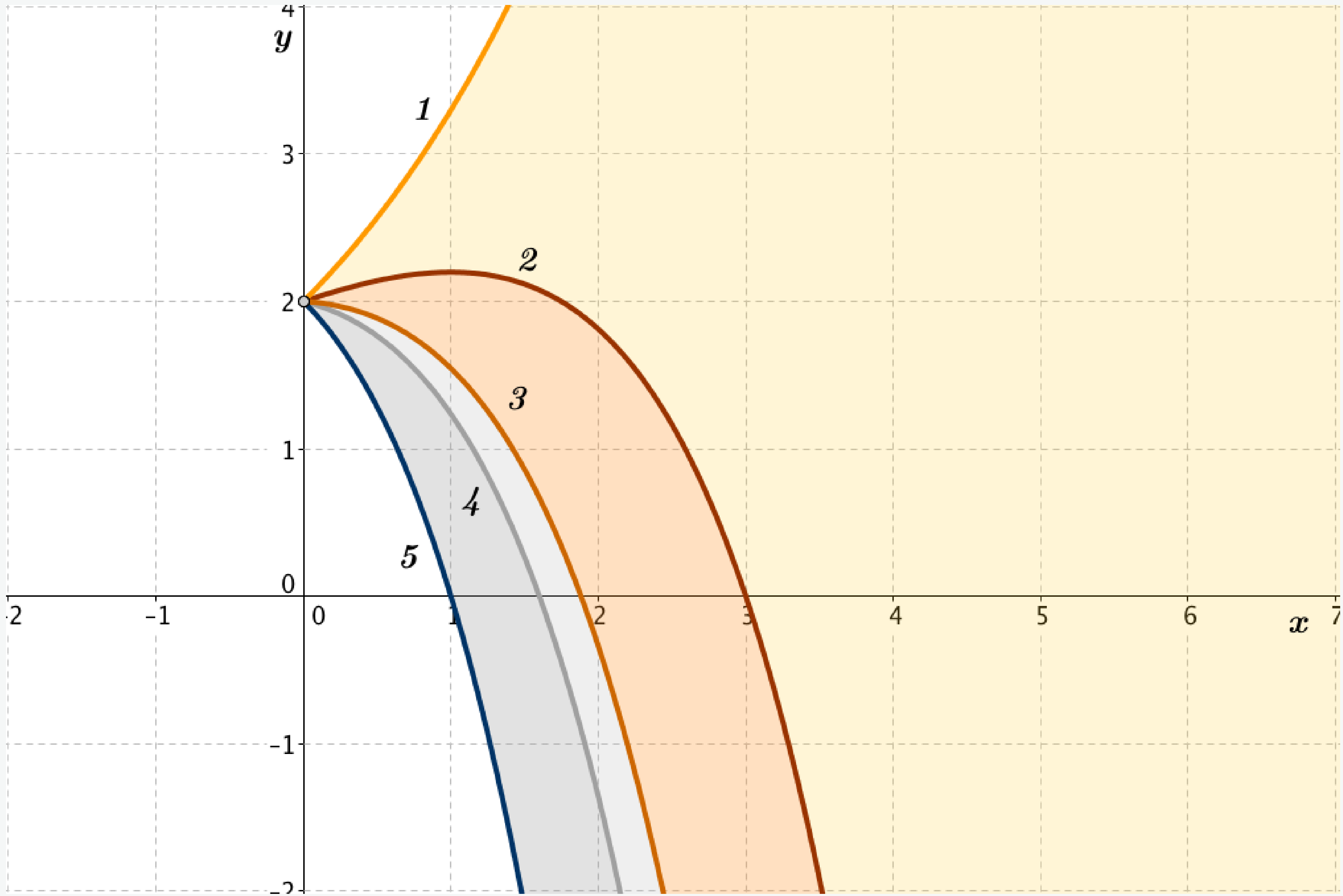


Abb. L2-2: Integralkurven der DGL y'' - y' + 1/4 y = 0, die den Anfangswertbedingungen auf der vorigen Seite entsprechen

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \left(C_1 \, x + C_2 \right) \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}, \quad y(x) = e^{\frac{x}{2}}$

2) $y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = \frac{3}{4}, \quad y(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \, x \right) e^{\frac{x}{2}}$

3) $y(0) = \frac{3}{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{4}, \quad y(x) = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \, x \right) e^{\frac{x}{2}}$

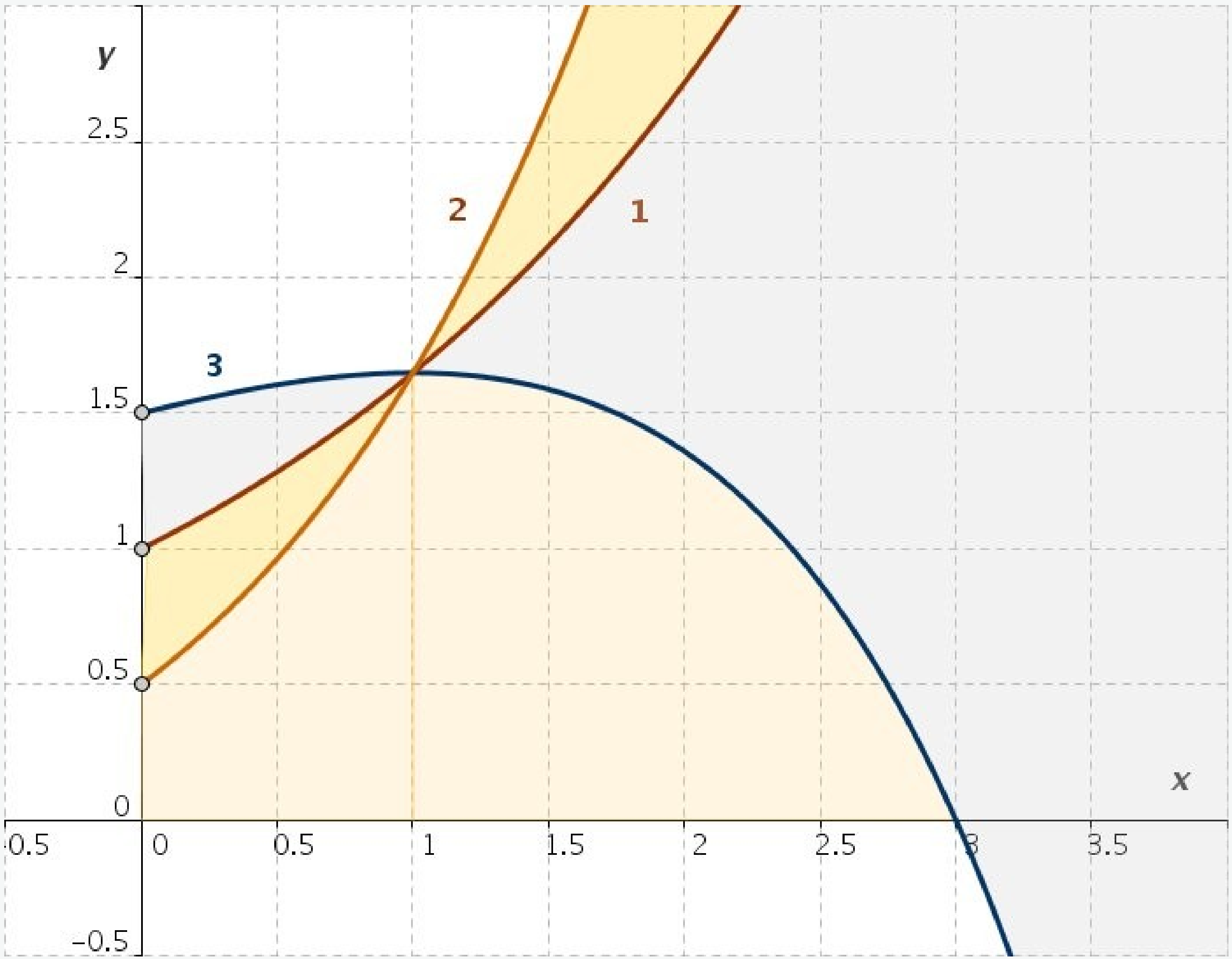


Abb. L2-3: Integralkurven der DGL $y'' - y' + 1/4\, y = 0$, die den Anfangswertbedingungen auf der vorigen Seite entsprechen

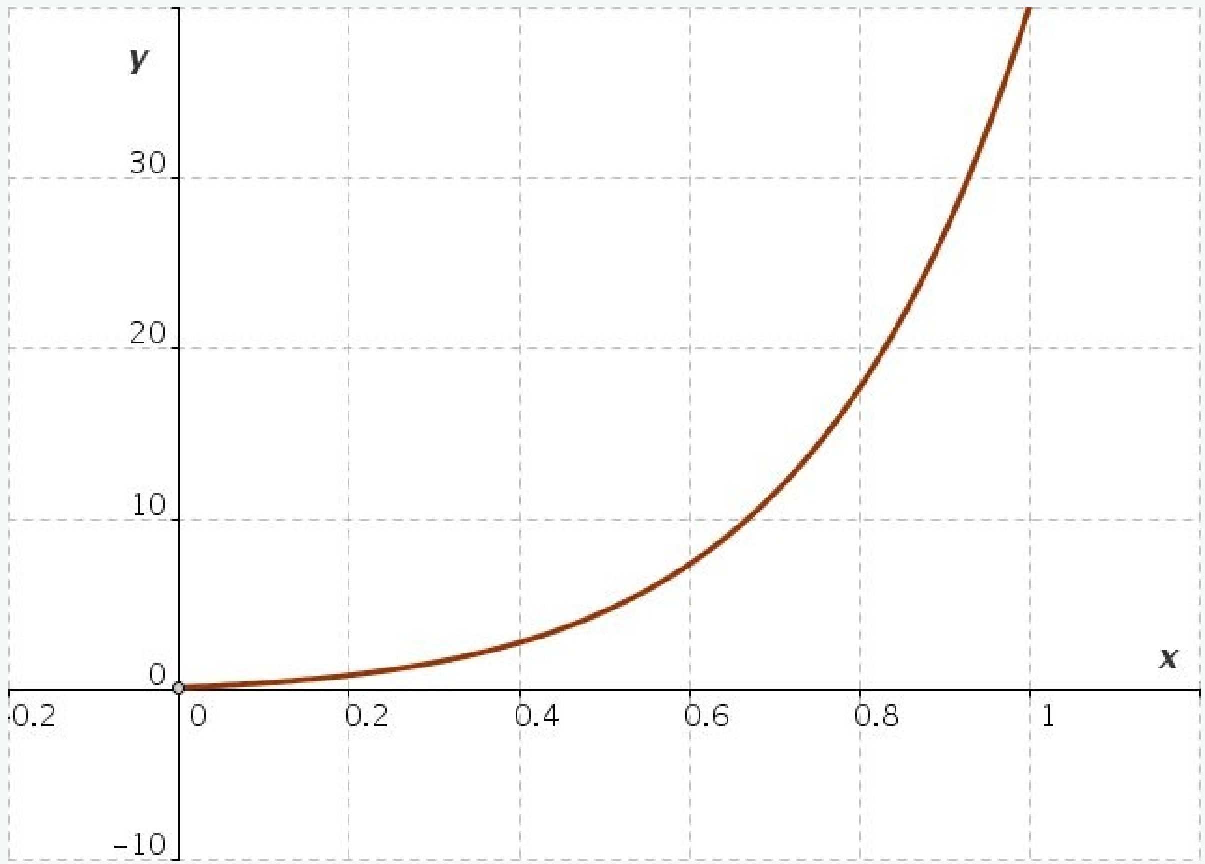


Abb. L3-1: Integralkurve der DGL $y'' - 6y' + 9y = 0$, die dem Anfangswertproblem $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ entspricht

$$y'' - 6\, y' + 9\, y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 2$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = (C_1\, x + C_2)\, e^{3x}$

Spezielle Lösung: $\quad y(x) = 2\, x\, e^{3x}$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \left(C_1\, x + C_2 \right) \cdot e^{3x}$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \qquad y(x) = 2\, x\, e^{3x}$

2) $y(0) = -5, \quad y'(0) = 3, \qquad y(x) = (18\, x - 5)\, e^{3x}$

3) $y(0) = 5, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{50}, \qquad y(x) = \left(5 - \dfrac{751}{50}\, x\right) e^{3x}$

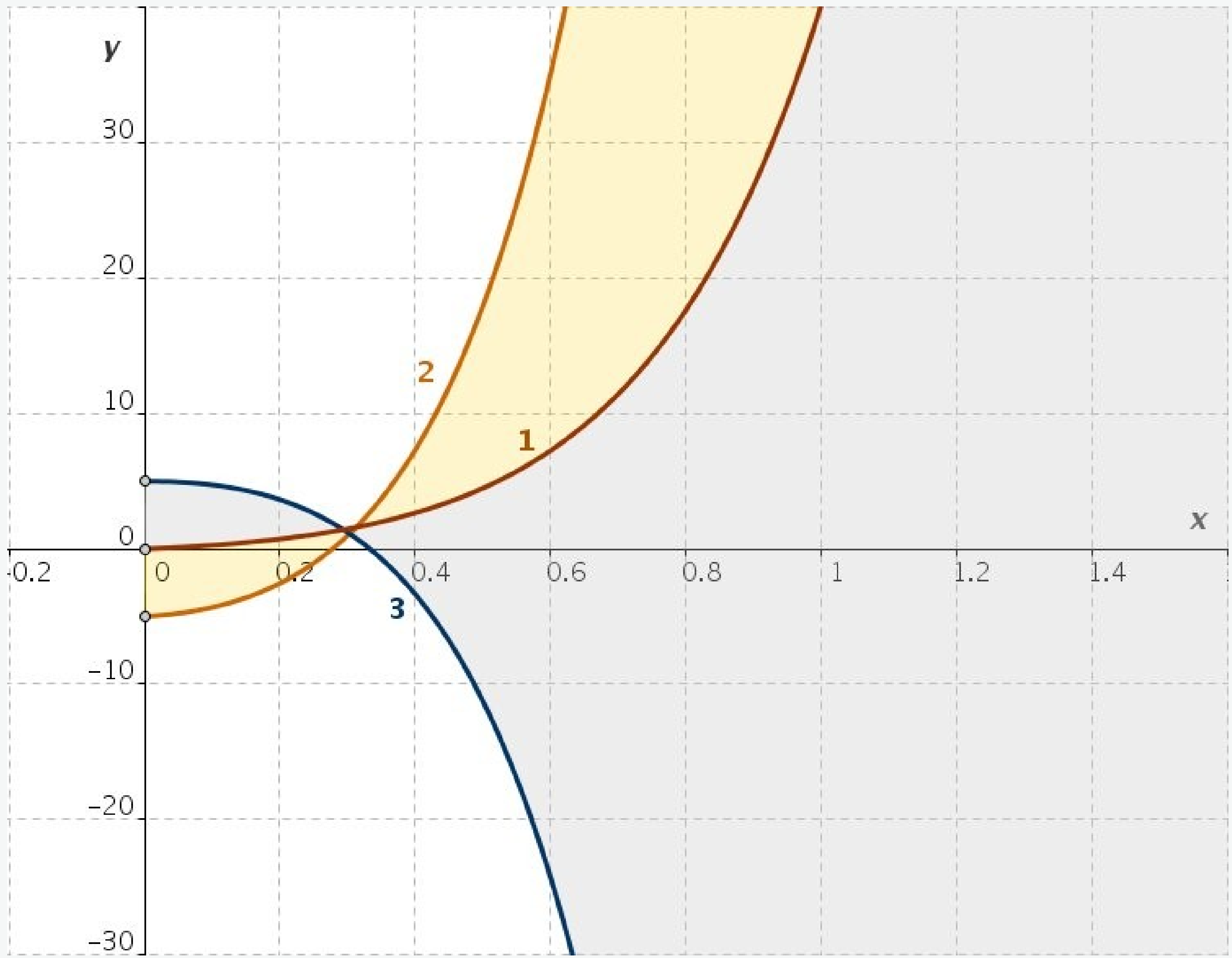


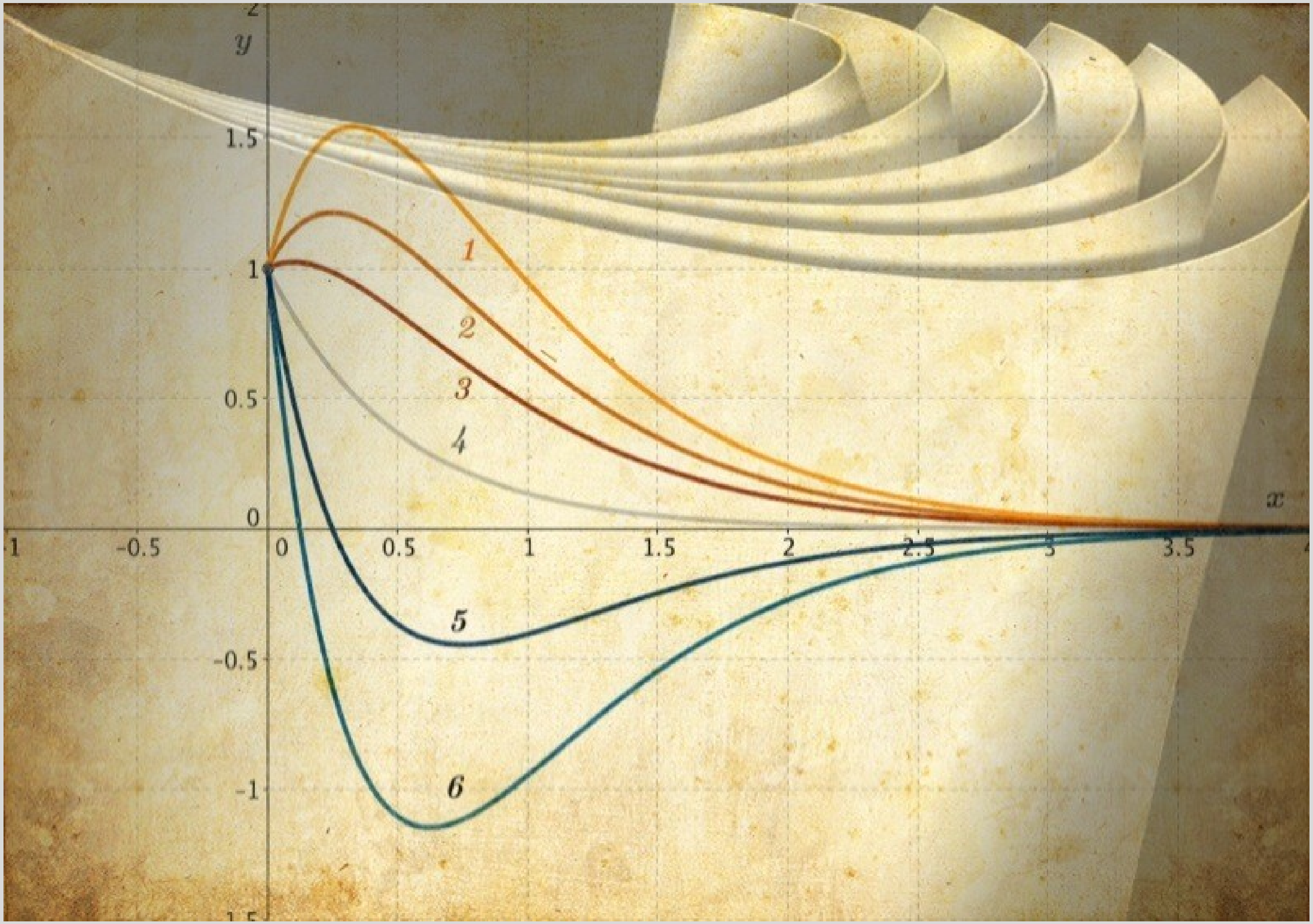
Abb. L3-2: Integralkurven der DGL $y'' - y' + 1/4\, y = 0$, die den Anfangswertbedingungen auf der vorigen Seite entsprechen

Doppelwurzeln: Lösung 4

$$y'' + 8\,y' + 16\,y = 0, \qquad y(1) = 4, \qquad y'(1) = -2$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = e^{-4x}\,(C_1 x + C_2)$

Spezielle Lösung: $\quad y(x) = 2\,e^{4-4x}\,(7x - 5)$


y
x
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
1
2
3
4
5
6