Fundamentale Lösungen von

linearen homogenen Differentialgleichungen

Eine homogene lineare Differenzialgleichung *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = 0$$

besitzt folgende Eigenschaften:

1. Ist $u(x)$ eine Lösung der DGL, so ist auch

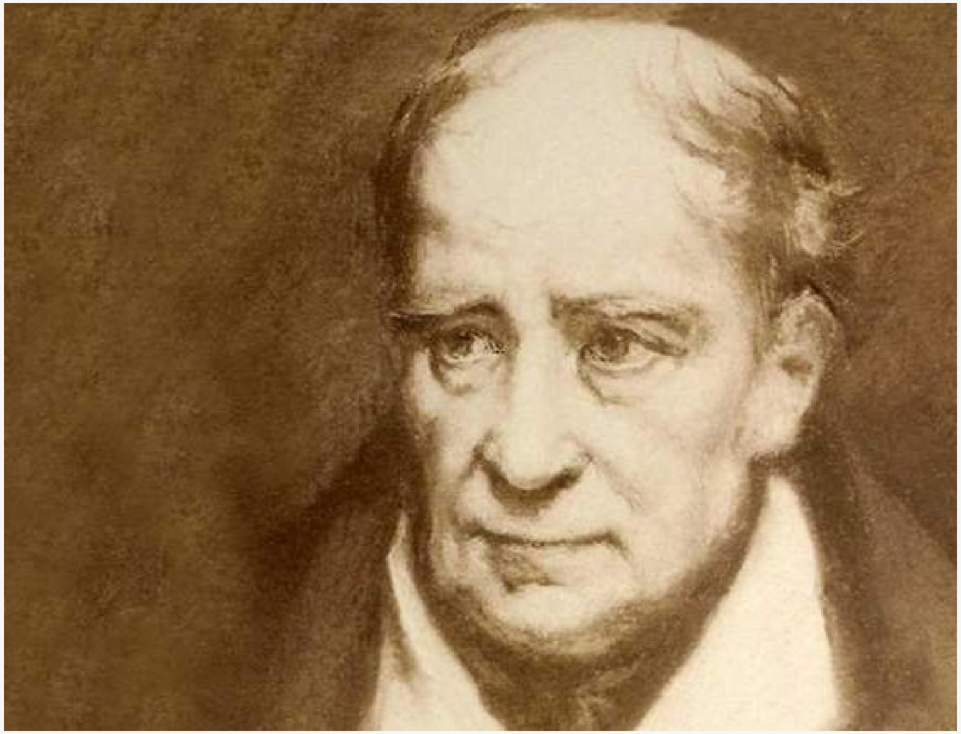
   $$y_1(x) = C \cdot u(x) \qquad (C = const\,, \quad C \in \mathbb{R})$$

   eine Lösung der DGL.

2. Sind $u(x)$ und $v(x)$ zwei Lösungen der DGL, so ist auch eine aus ihnen gebildete Linearkombination eine Lösung der DGL

   $$y(x) = C_1 \cdot u(x) + C_2 \cdot v(x) \qquad (C_1\,, \; C_2 \in \mathbb{R})$$

3. Ist $y(x) = u(x) + i\, v(x)$ eine komplexe Lösung der DGL, so sind auch Realteil $u(x)$ und Imaginärteil $v(x)$ Lösungen der DGL.



J. M. Wronski (1776-1853), polnischer Philosoph und Mathematiker

Zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ einer homogenen linearen DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

werden als Basisfunktionen oder Basislösungen der DGL bezeichnet, wenn die mit ihnen gebildete sog. Wronski-Determinante von Null verschieden ist.

Wronski-Determinante:

$$W(y_1, \ y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$$

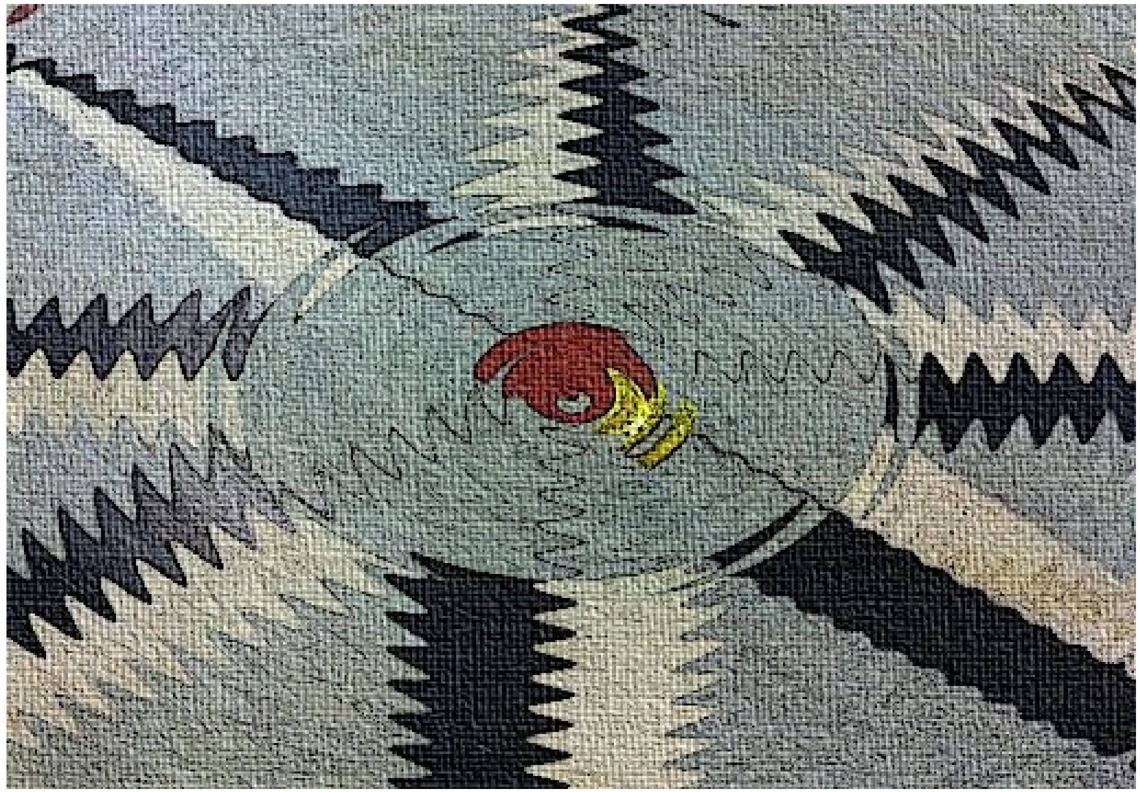
Die Wronski-Determinante ist eine *2*-reihige Determinante. Sie enthält in der 1. Zeile die Lösungsfunktionen und in der *2.* Zeile deren Ableitungen. Der Wert der Wronski-Determinante hängt von der Variablen x ab.

1. Es genügt zu zeigen, dass die Wronski-Determinante an einer Stelle x von Null verschieden ist, um festzustellen, dass zwei Lösungen Basislösungen sind.

2. Zwei Basislösungen der homogenen DGL werden auch als linear unabhängige Lösungen bezeichnet. Dieser Begriff kommt aus der Linearen Algebra und besagt, dass die lineare Gleichung

$$C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = 0$$

nur trivial, d.h. für $C_1 = C_2 = 0$ lösbar ist.



Die Schwingungsgleichung $y'' + \omega^2 y = 0$ hat u.a. die Lösungen

$$y_1(x) = \sin(\omega x), \qquad y_2(x) = \cos(\omega x)$$

Zeigen Sie, dass sie eine Fundamentalbasis der DGL bilden, d.h. dass sie linear unabhängig sind.

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

$$y_1(x) = \sin(\omega x), \qquad y_2(x) = \cos(\omega x)$$

$$W(y_1, \; y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \\ \omega \cdot \cos(\omega x) & -\omega \cdot \sin(\omega x) \end{vmatrix} =$$

$$= -\omega \; (\sin^2(\omega x) + \cos^2(\omega x)) = -\omega$$

$$W(y_1, \; y_2) = -\omega \neq 0 \quad \Rightarrow$$

Die Wronski-Determinante ist ungleich Null auf dem ganzen Definitionsbereich dieser Funktionen.

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung kann man in der Form darstellen

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$$

$$(C_1, \; C_2 \in \mathbb{R})$$

Wir zeigen, dass folgende Funktionen linear unabhängig sind

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = \cos x$$

wir bilden die ersten Ableitungen der Funktionen und bestimmen den Wert der Wronski-Determinante

$$y'_1(x) = e^x, \qquad y'_2(x) = -\sin x$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & \cos x \\ e^x & -\sin x \end{vmatrix} = -e^x(\sin x + \cos x)$$

Die Wronski-Determinante ist ein Produkt von zwei Funktionen

$$W(y_1, y_2) = f(x) \cdot g(x), \qquad f(x) = e^x, \quad g(x) = \sin x + \cos x$$

Die Funktion $y = f(x)$ ist immer ungleich Null, und die Funktion $y = g(x)$ ist außerhalb einiger sich periodisch wiederholenden Stellen auch ungleich Null.

$$\sin x + \cos x = 0, \qquad \sin x = -\cos x$$

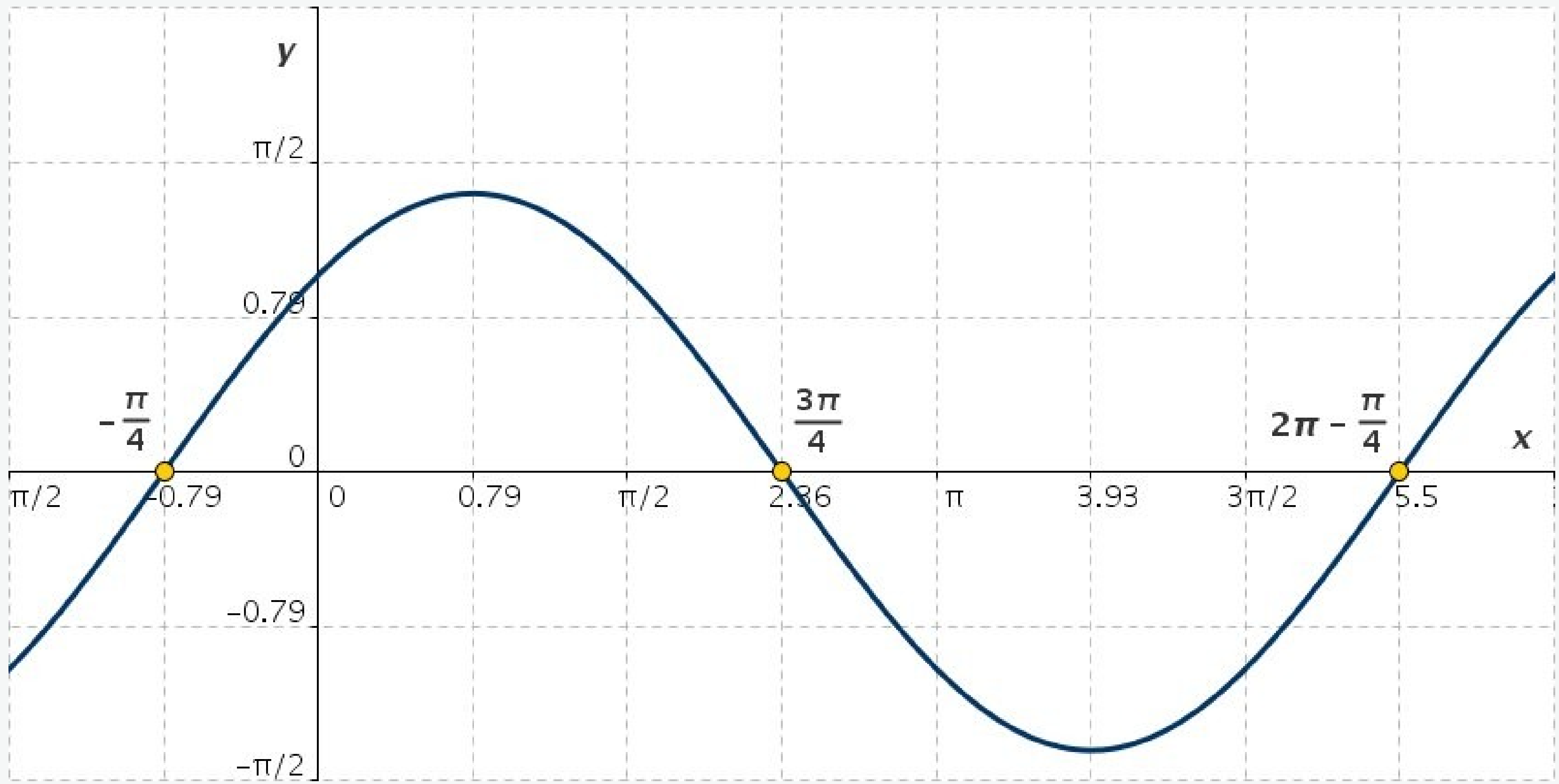


Abb. B2-1: Drei Nullstellen der Funktion g (x) = sin x + cos x

An diesen Stellen $x_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{4}, \ \ldots$

ist Wronski-Determinante gleich Null.

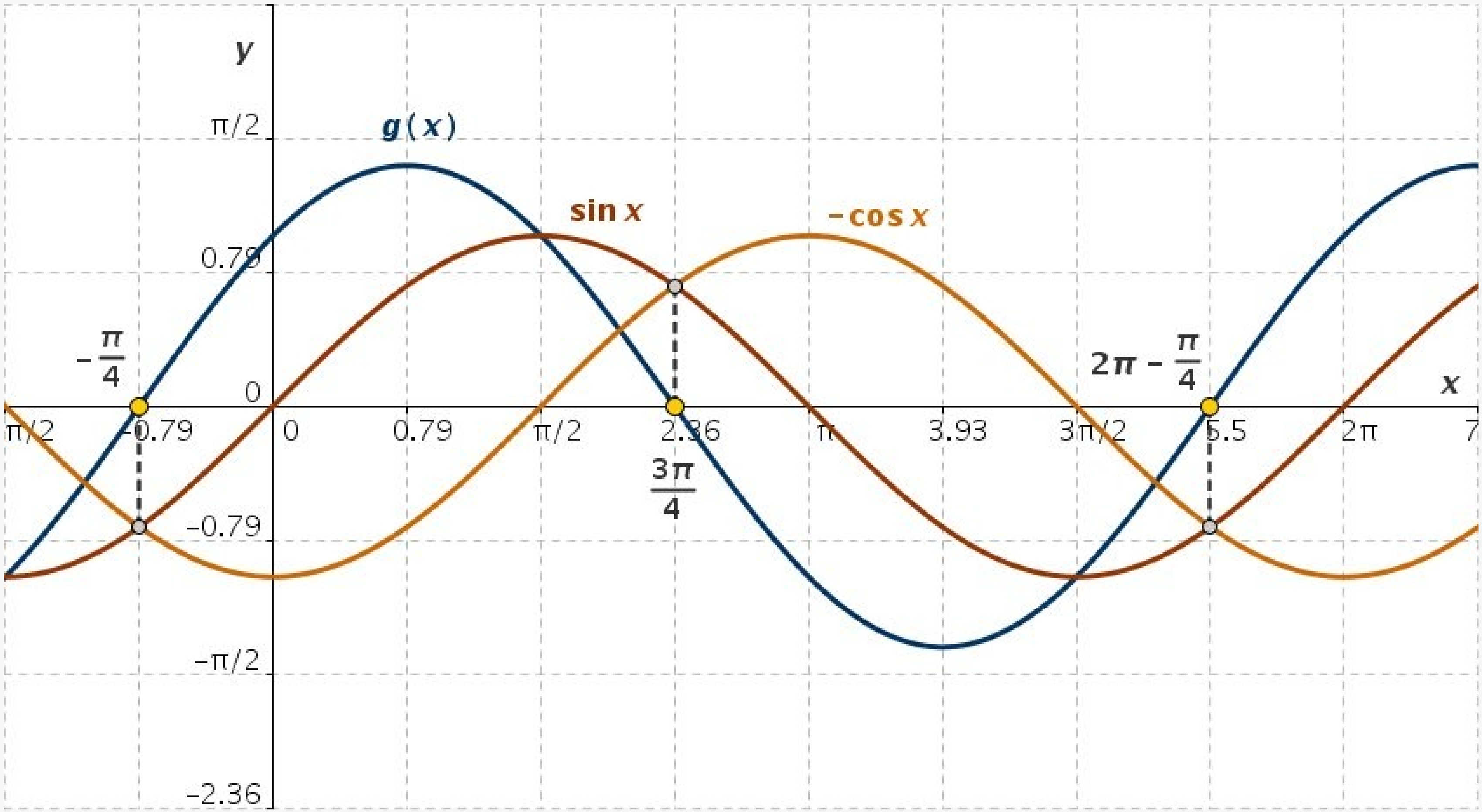


Abb. B2-2: Drei Nullstellen der Funktion g (x) = sin x + cos x. Die sind die Schnittpunkte von Funktionen sin x und cos x

Obwohl die Funktionen $f(x) = exp\, x$ und $g(x) = sin\, x + cos\, x$ linear unabhängig sind, gibt es unendlich viele Stellen, an denen die Wronski-Determinante gleich Null ist

$$x_n = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Hinreichend für die lineare Unabhängigkeit von Funktionen ist die Existenz von nur einem Punkt

$$x_0 \in I\,, \qquad W\,(x_0) \neq 0$$

Diese Bedingung ist im vorigen Beispiel erfüllt.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Wronski-Determinante der gegebenen Funktionenpaare

$a\,)\;\; e^{-2x}, \quad x\, e^{-2x}, \qquad\qquad b\,)\;\; x\,, \quad x\, e^{x}$

$c\,)\;\; e^{x} \sin x\,, \quad e^{x} \cos x\,, \qquad\qquad d\,)\;\; \cos^2 x\,, \quad 1 + \cos(2x)$

Aufgabe 2:

$$W\,(f\,,\; g\,) = 3\; e^{4x}, \qquad f\,(x) = e^{2x}$$

Bestimmen Sie $g\,(x)$.

$a)\ e^{-4x}, \qquad b)\ x^2 e^x, \qquad c)\ -e^{2x}, \qquad d)\ 0$

<u>Erinnerung:</u> Ein gemeinsamer Faktor einer Zeile (oder Spalte) darf vor die Determinante gezogen werden

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Fundamentalbasis einer DGL 2. Ordnung: Lösung 2

$$W\,(f\,(x),\ g\,(x)) = \begin{vmatrix} f\,(x) & g\,(x) \\ f\,'(x) & g\,'(x) \end{vmatrix} = 3\ e^{4\,x}$$

$$f\,(x) = e^{2\,x}, \qquad f\,'(x) = 2\,e^{2\,x}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{2\,x} & g\,(x) \\ 2\,e^{2\,x} & g\,'(x) \end{vmatrix} = e^{2\,x} \begin{vmatrix} 1 & g\,(x) \\ 2 & g\,'(x) \end{vmatrix} = 3\ e^{4\,x}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & g\,(x) \\ 2 & g\,'(x) \end{vmatrix} = 3\ e^{2\,x} \quad \Rightarrow \quad g\,'(x) - 2\,g\,(x) = 3\ e^{2\,x}$$

Die Gleichung $g\,'(x) - 2\,g\,(x) = 3\ e^{2\,x}$
ist inhomogene lineare DGL 1. Ordnung. Wir bestimmen die Lösung dieser Gleichung durch Variation der Konstanten

$$g' - 2g = 3\; e^{2x}, \qquad g = g(x)$$

Homogene lineare DGL 1. Ordnung

$$g' - 2g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dg}{dx} = 2g \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dg}{g} = 2\,dx$$

$$\ln|g| = 2x - \ln|C_0|, \qquad \ln\left|\frac{g}{C_0}\right| = 2x \quad \Rightarrow$$

$$g = C_0\, e^{2x}, \qquad C_0 \;\rightarrow\; C(x), \qquad g = C(x)\; e^{2x}$$

$$g' = C'(x)\; e^{2x} + 2\,C(x)\; e^{2x}$$

$$g' - 2g = 3\; e^{2x} \qquad : C'(x)\, e^{2x} + 2\,C(x)\, e^{2x} - 2\,C(x)\, e^{2x} = 3\; e^{2x}$$

$$C'(x) = 3, \qquad C(x) = 3\int dx = 3x + C_1$$

$$g(x) = C(x)\, e^{2x} = (C_1 + 3x)\; e^{2x}$$