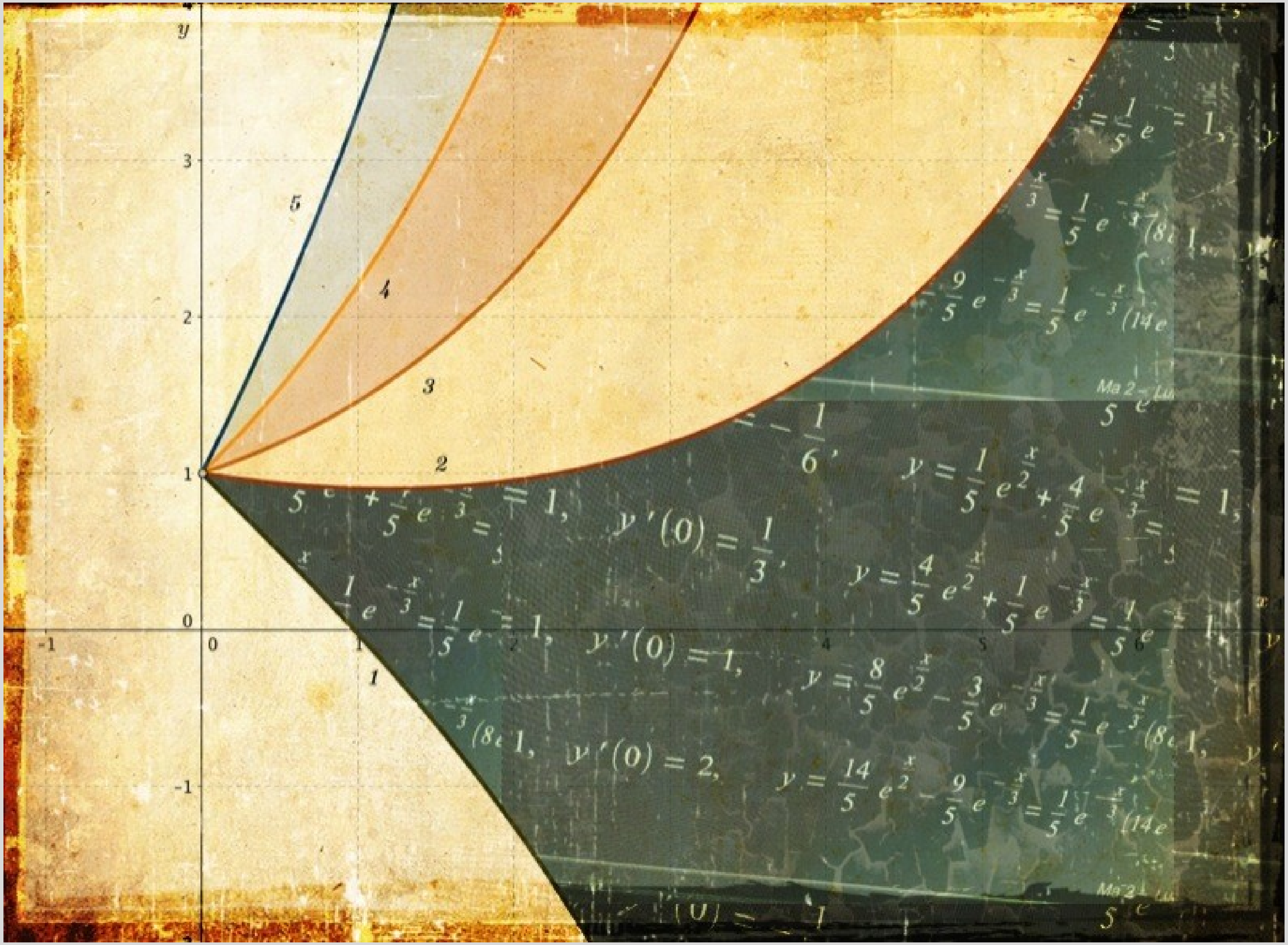


Lineare DGL 2. Ordnung: Aufgaben

Teil 3

A6) $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y(x$

$$r^2 e^{rx} + 2r e^{rx} - 3e^{rx} = 0$$

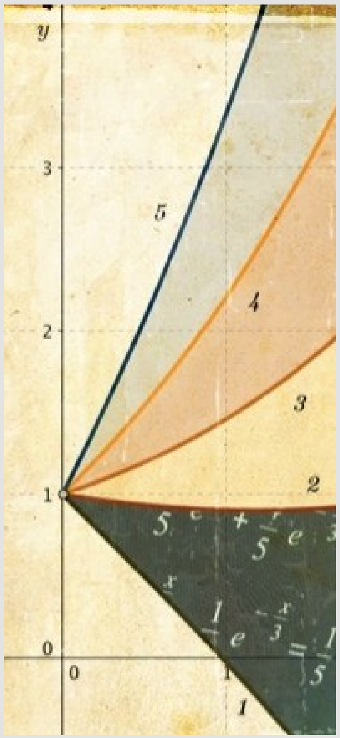
$$r^2 + 2r - 3 = 0 \longrightarrow r =$$

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} \longrightarrow \text{All}$$

$(0) = 1$; $1 = C_1 + C_2$

$(0) = \frac{1}{2}$; $y'(x) = C_1 e^{x} - 3C_2$

Lineare DGL 2. Ordnung: Aufgaben 6-11



Bestimmen Sie in den folgenden Aufgaben die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems. Skizzieren Sie den Kurvenverlauf der Lösung und beschreiben Sie sein Verhalten für ansteigendes x.

Aufgabe 6: $y'' + 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 7: $6y'' - y' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{3}$

Aufgabe 8: $y'' + 5y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

Aufgabe 9: $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

Aufgabe 10: $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

Aufgabe 11: $y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

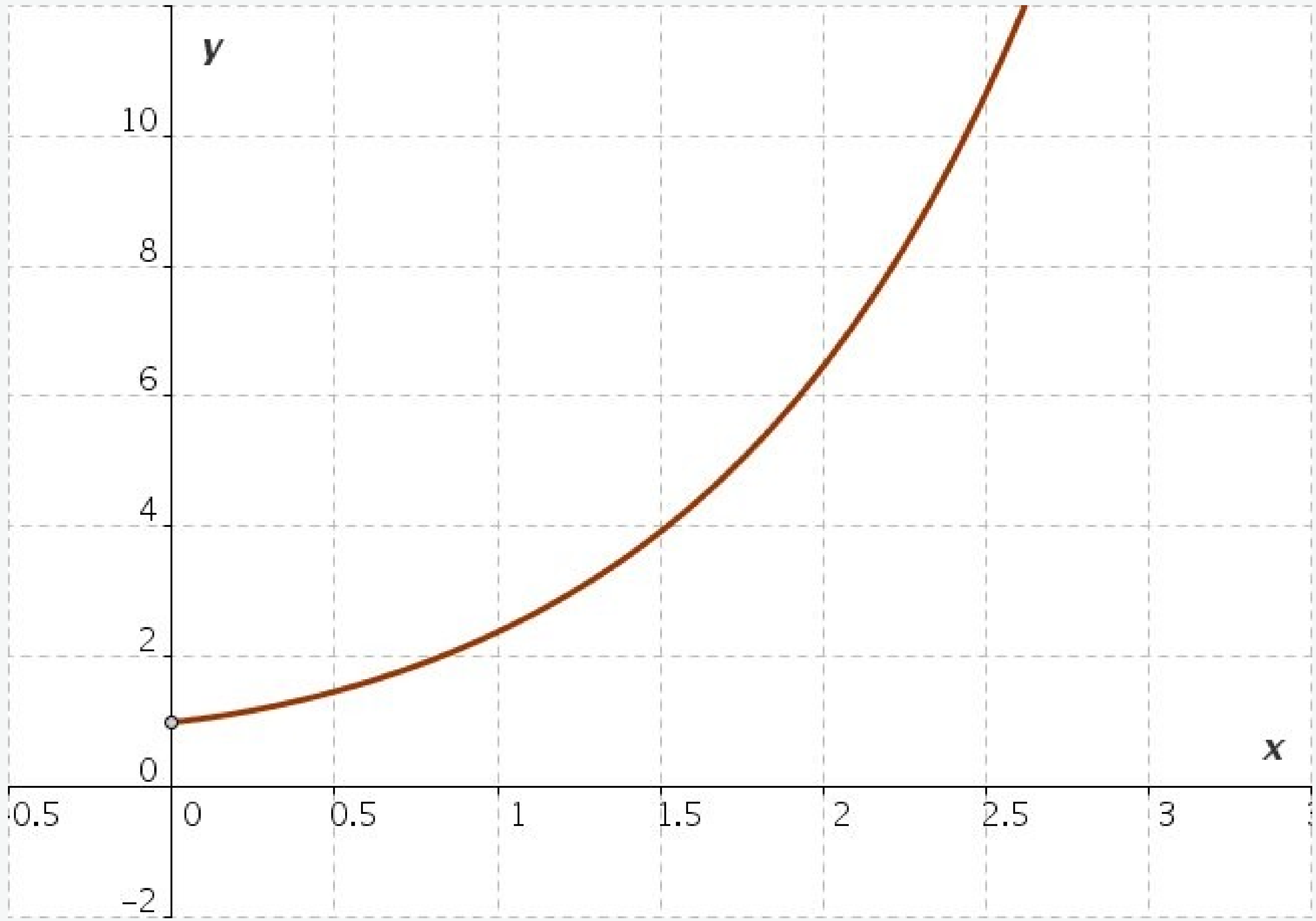


Abb. L6-1: Integralkurve der DGL $y'' + 2y' - 3y = 0$ mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/2$

$$y'' + 2y' - 3y = 0, \qquad y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{1}{8} e^{-3x} + \frac{7}{8} e^{x}$$

Wir bestimmen Lösungen verschiedener Anfangswertprobleme von Typ $y(0) = 1, \quad y'(0) = a, \quad a$ ist eine reelle Zahl

Allgemeine Lösung:

$$y'' + 2y' - 3y = 0, \qquad y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$$

Spezielle Lösungen:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = \dfrac{1}{2}, \qquad y = \dfrac{1}{8} e^{-3x} + \dfrac{7}{8} e^{x}$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \qquad y = e^{x}$

3) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \qquad y = -\dfrac{1}{4} e^{-3x} + \dfrac{5}{4} e^{x}$

4) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 4, \qquad y = -\dfrac{3}{4} e^{-3x} + \dfrac{7}{4} e^{x}$

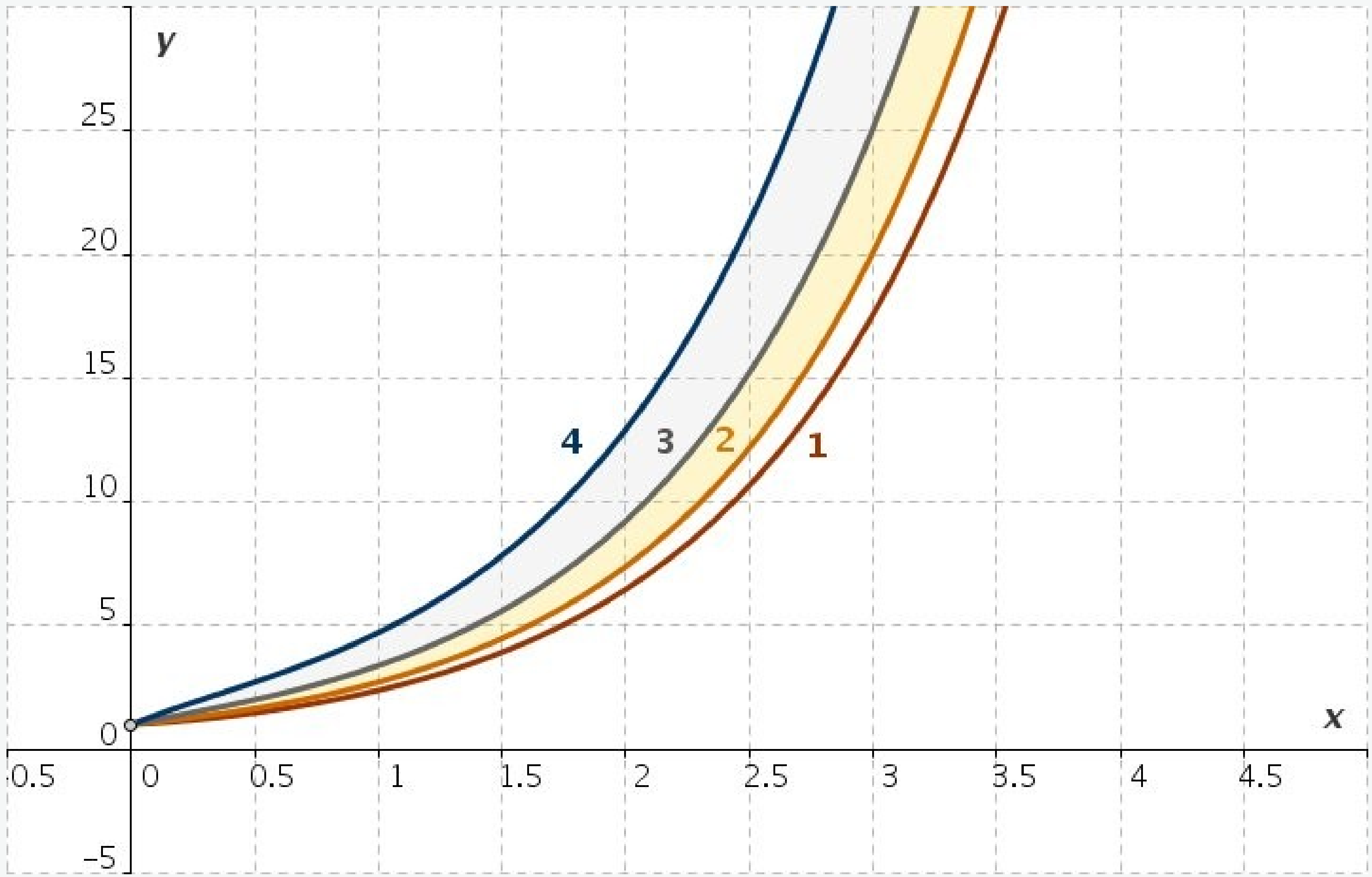


Abb. L6-2: Integralkurven der DGL $y'' + 2y' - 3y = 0$, die folgendem Anfangswertproblem entsprechen $y(0) = 1$, $y'(0) = a$: 1) $a = 1/2$, 2) $a = 1$, 3) $a = 2$, 4) $a = 4$

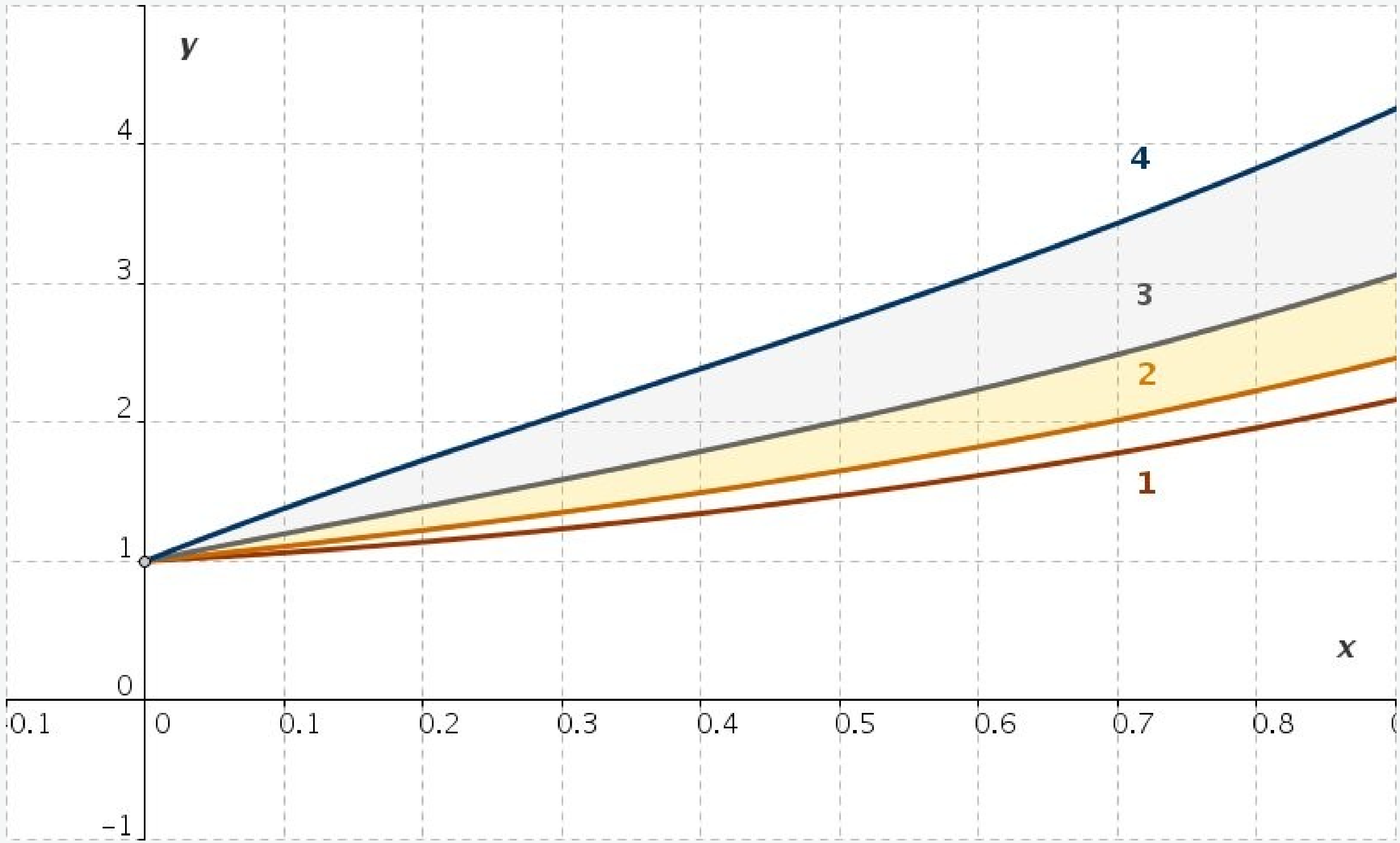


Abb. L6-3: Integralkurven der DGL $y'' + 2\,y' - 3\,y = 0$, die folgendem Anfangswertproblem entsprechen $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = a$: 1) $a = 1/2$, 2) $a = 1$, 3) $a = 2$, 4) $a = 4$. In dieser Darstellung sieht man besser den Unterschied der Kurvensteigungen im Punkt $P\,(0,\,1)$

Allgemeine Lösung:

$$y'' + 2y' - 3y = 0, \qquad y = C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^{x}$$

Lösungen verschiedener Anfangswertprobleme:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = \dfrac{1}{2}, \qquad y = \dfrac{1}{8}\, e^{-3x} + \dfrac{7}{8}\, e^{x}$

2) $y(0) = 2, \quad y'(0) = \dfrac{1}{2}, \qquad y = \dfrac{3}{8}\, e^{-3x} + \dfrac{13}{8}\, e^{x}$

3) $y(0) = 8, \quad y'(0) = -10, \qquad y = \dfrac{9}{2}\, e^{-3x} + \dfrac{7}{2}\, e^{x}$

4) $y(0) = 4, \quad y'(0) = 8, \qquad y = -\, e^{-3x} + 5\, e^{x}$

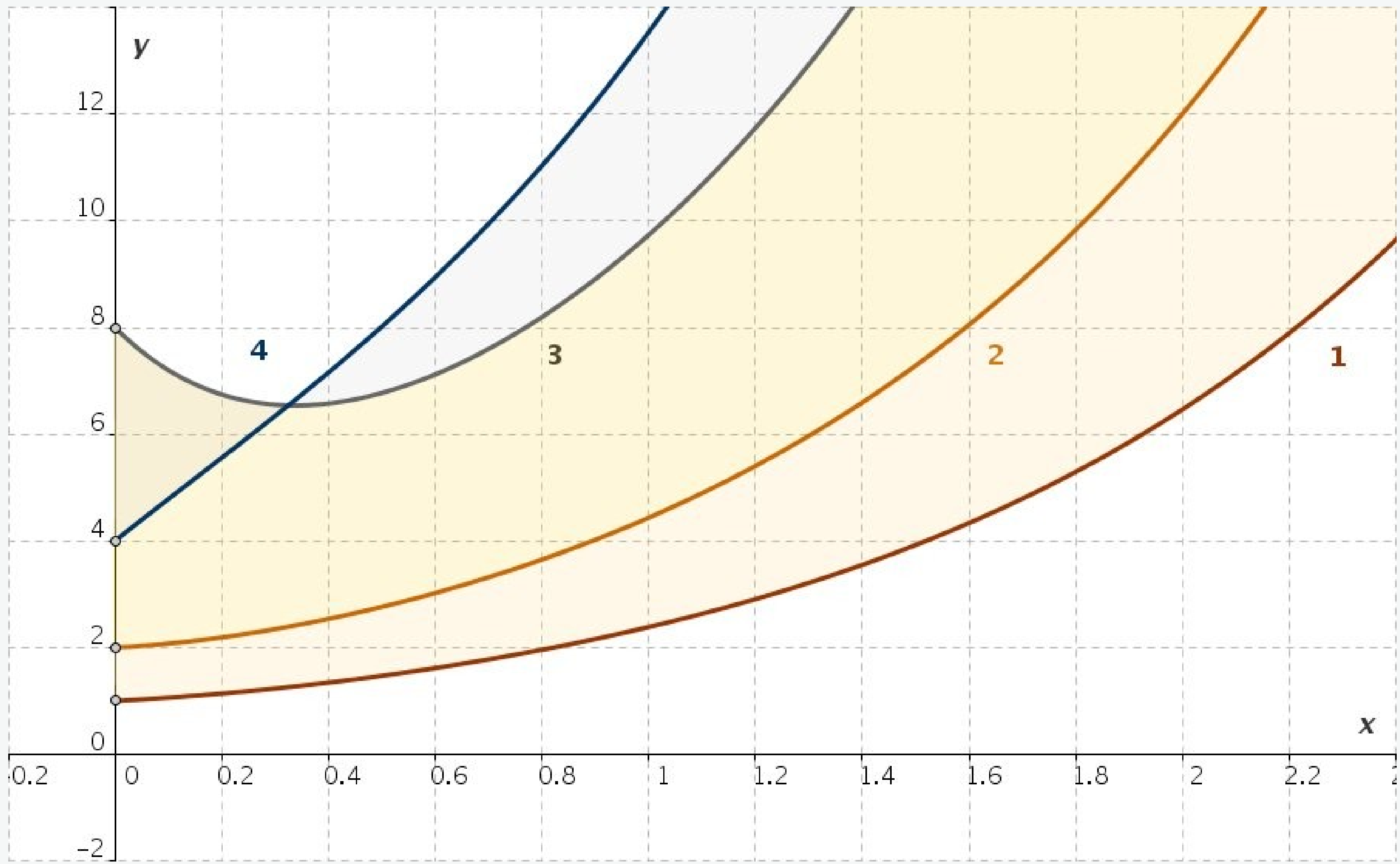


Abb. L6-3: Integralkurven der DGL $y'' + 2\,y' - 3\,y = 0$, die folgenden Anfangswertproblemen entsprechen 1) $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 1/2$, 2) $y\,(0) = 2$, $y'\,(0) = 1/2$, 3) $y\,(0) = 8$, $y'\,(0) = -10$, 4) $y\,(0) = 4$, $y'\,(0) = 8$

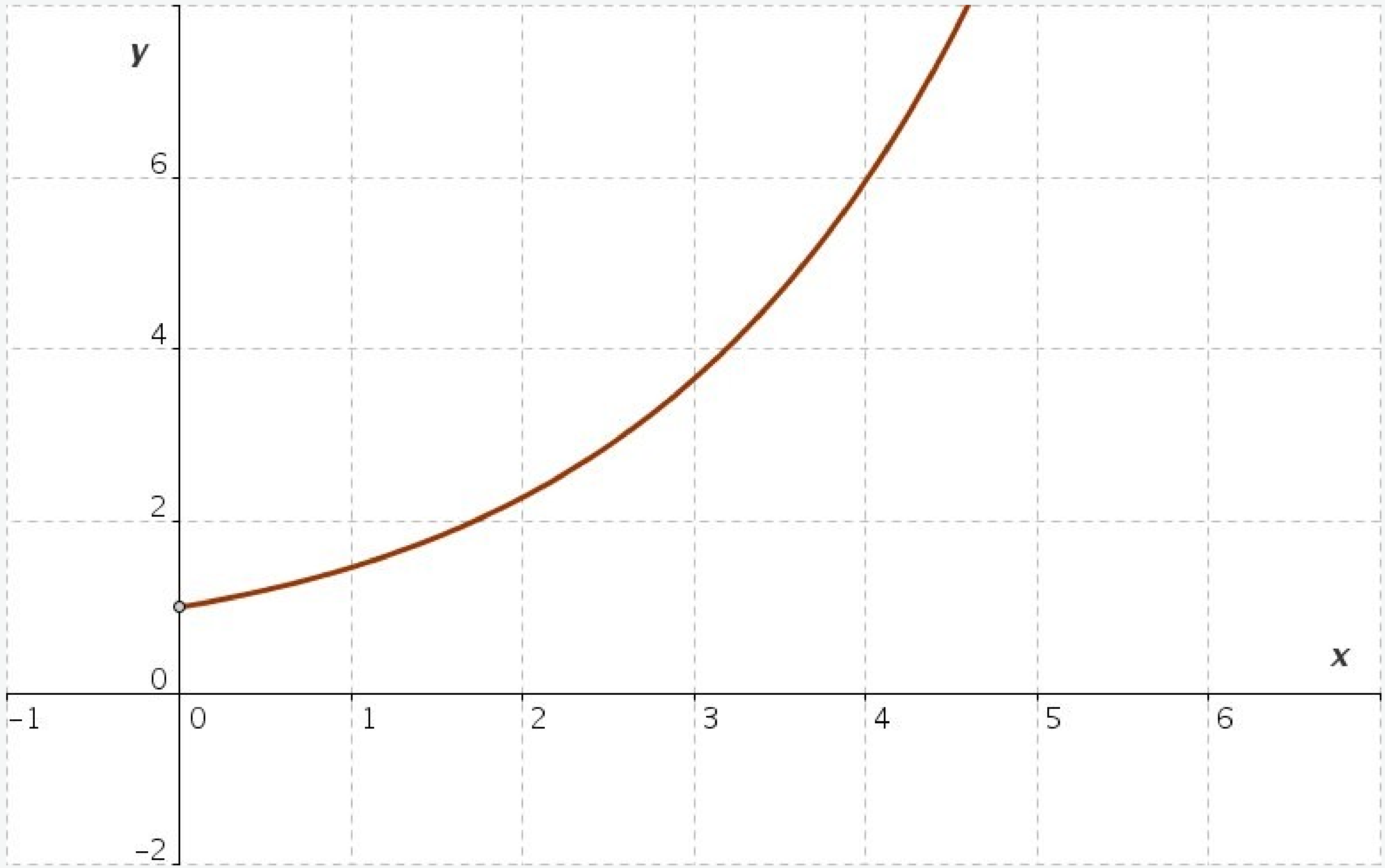


Abb. L7-1: Integralkurve der DGL 6 y'' - y' - y = 0 mit y (0) = 1, y' (0) = 1/3

$$6\,y'' - y' - y = 0\,, \qquad y = C_1\, e^{\frac{x}{2}} + C_2\, e^{-\frac{x}{3}}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{3}\,, \qquad y = \frac{4}{5}\, e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{5}\, e^{-\frac{x}{3}}$$

Allgemeine Lösung:

$$6\,y'' - y' - y = 0\,, \qquad y = C_1\, e^{\frac{x}{2}} + C_2\, e^{-\frac{x}{3}}$$

Lösungen verschiedener Anfangswertprobleme von Typ
y (0) = 1, y' (0) = a, a ist eine reelle Zahl:

1) $y(0) = 1,\quad y'(0) = -1,\qquad y = -\dfrac{4}{5}\, e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{9}{5}\, e^{-\frac{x}{3}} = \dfrac{1}{5}\, e^{-\frac{x}{3}}\left(9 - 4\,e^{\frac{5x}{6}}\right)$

2) $y(0) = 1,\quad y'(0) = -\dfrac{1}{6},\qquad y = \dfrac{1}{5}\, e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{4}{5}\, e^{-\frac{x}{3}} = \dfrac{1}{5}\, e^{-\frac{x}{3}}\left(e^{\frac{5x}{6}} + 4\right)$

3) $y(0) = 1,\quad y'(0) = \dfrac{1}{3},\qquad y = \dfrac{4}{5}\, e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{5}\, e^{-\frac{x}{3}} = \dfrac{1}{5}\, e^{-\frac{x}{3}}\left(4\,e^{\frac{5x}{6}} + 1\right)$

4) $y(0) = 1,\quad y'(0) = 1,\qquad y = \dfrac{8}{5}\, e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{3}{5}\, e^{-\frac{x}{3}} = \dfrac{1}{5}\, e^{-\frac{x}{3}}\left(8\,e^{\frac{5x}{6}} - 3\right)$

5) $y(0) = 1,\quad y'(0) = 2,\qquad y = \dfrac{14}{5}\, e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{9}{5}\, e^{-\frac{x}{3}} = \dfrac{1}{5}\, e^{-\frac{x}{3}}\left(14\,e^{\frac{5x}{6}} - 9\right)$

Abb. L7-2: Integralkurven der DGL $6\,y'' - y' - y = 0$, die folgendem Anfangswertproblem entsprechen $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = a$: 1) $a = -1$, 2) $a = -1/6$, 3) $a = 1$, 4) $a = 2$

Abb. L8-1: Integralkurve der DGL $y'' + 5\,y' = 0$ mit $y\,(0) = 1,\;\; y'\,(0) = 2$

$$y'' + 5\,y' = 0\,, \qquad y = C_1 + C_2\, e^{-5\,x}$$

$$y\,(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \qquad y = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}\, e^{-5\,x}$$

<u>Allgemeine Lösung:</u>

$$y'' + 5\,y' = 0\,, \qquad y = C_1 + C_2\, e^{-5x}$$

Lösungen verschiedener Anfangswertprobleme von Typ
y (0) = 1, y' (0) = a, a ist eine reelle Zahl:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \qquad y = \dfrac{7}{5} - \dfrac{2}{5}\, e^{-5x}$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 6, \qquad y = \dfrac{11}{5} - \dfrac{6}{5}\, e^{-5x}$

3) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -3, \qquad y = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5}\, e^{-5x}$

4) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -10, \qquad y = -1 + 2\, e^{-5x}$

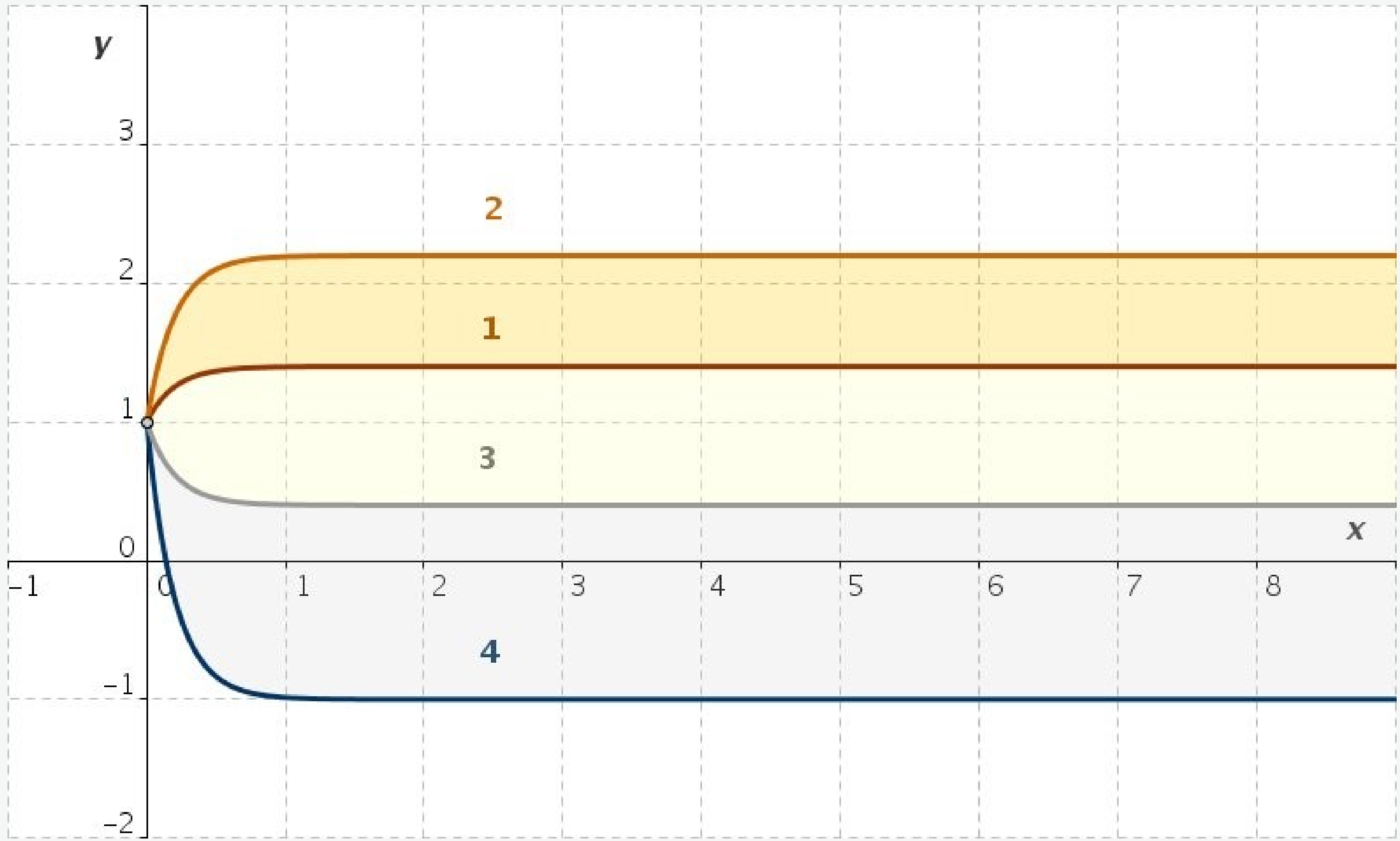


Abb. L8-2: Integralkurven der DGL $y'' + 5\,y' = 0$, die folgendem Anfangswertproblem entsprechen $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = a$: 1) $a = 2$, 2) $a = 6$, 3) $a = -3$, 4) $a = -10$

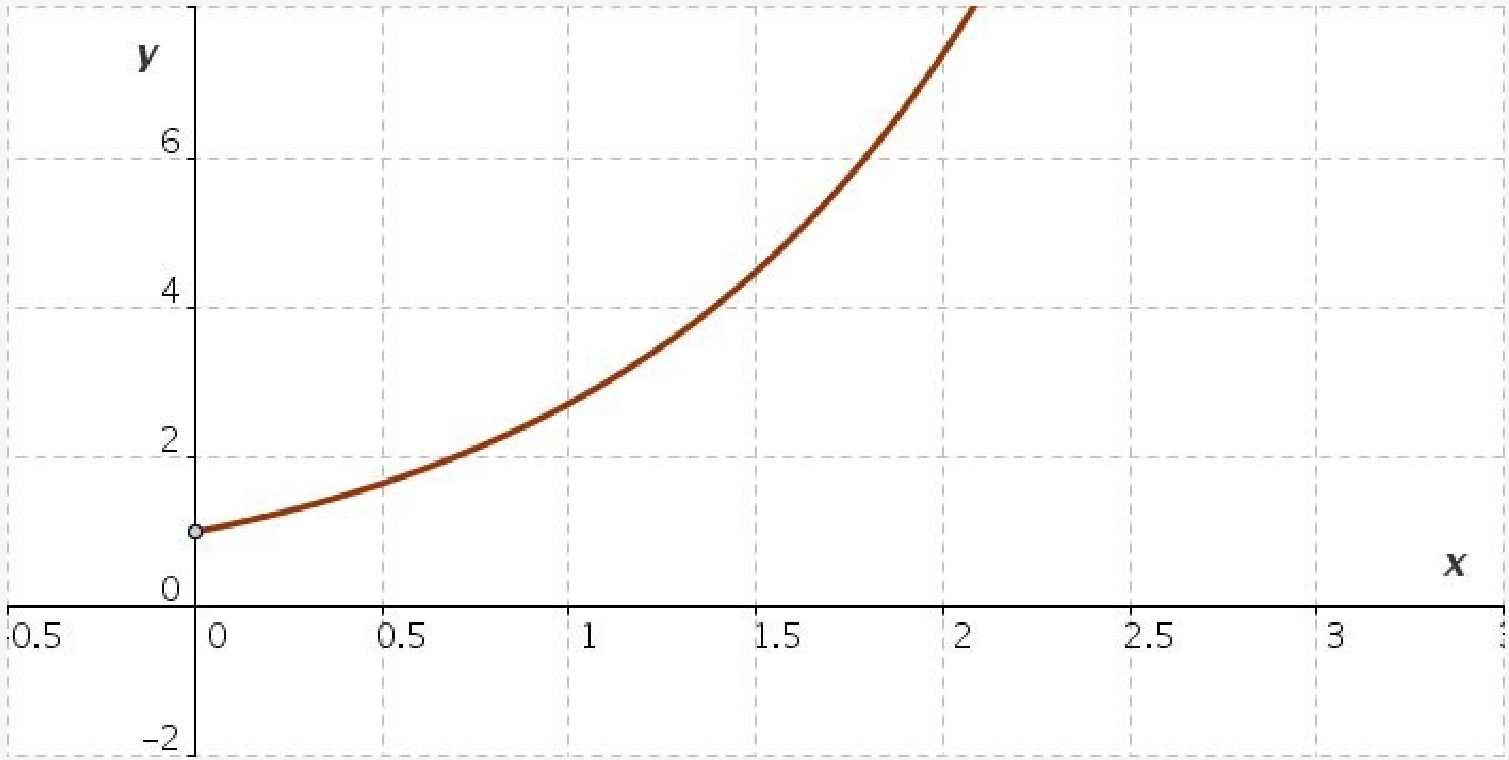


Abb. L9-1: Integralkurve der DGL $y'' + y' - 2y = 0$ mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

$$y'' + y' - 2y = 0, \qquad y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \qquad y(x) = e^{x}$$

Allgemeine Lösung:

$$y'' + y' - 2y = 0, \qquad y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$$

Lösungen verschiedener Anfangswertprobleme von Typ
$y(0) = 1, \quad y'(0) = a, \quad a$ ist eine reelle Zahl:

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \qquad y = e^{x}$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \qquad y = \dfrac{1}{3} e^{x} + \dfrac{2}{3} e^{-2x}$

3) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -4, \qquad y = -\dfrac{2}{3} e^{x} + \dfrac{5}{3} e^{-2x}$

4) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 4, \qquad y = 2e^{x} - e^{-2x}$

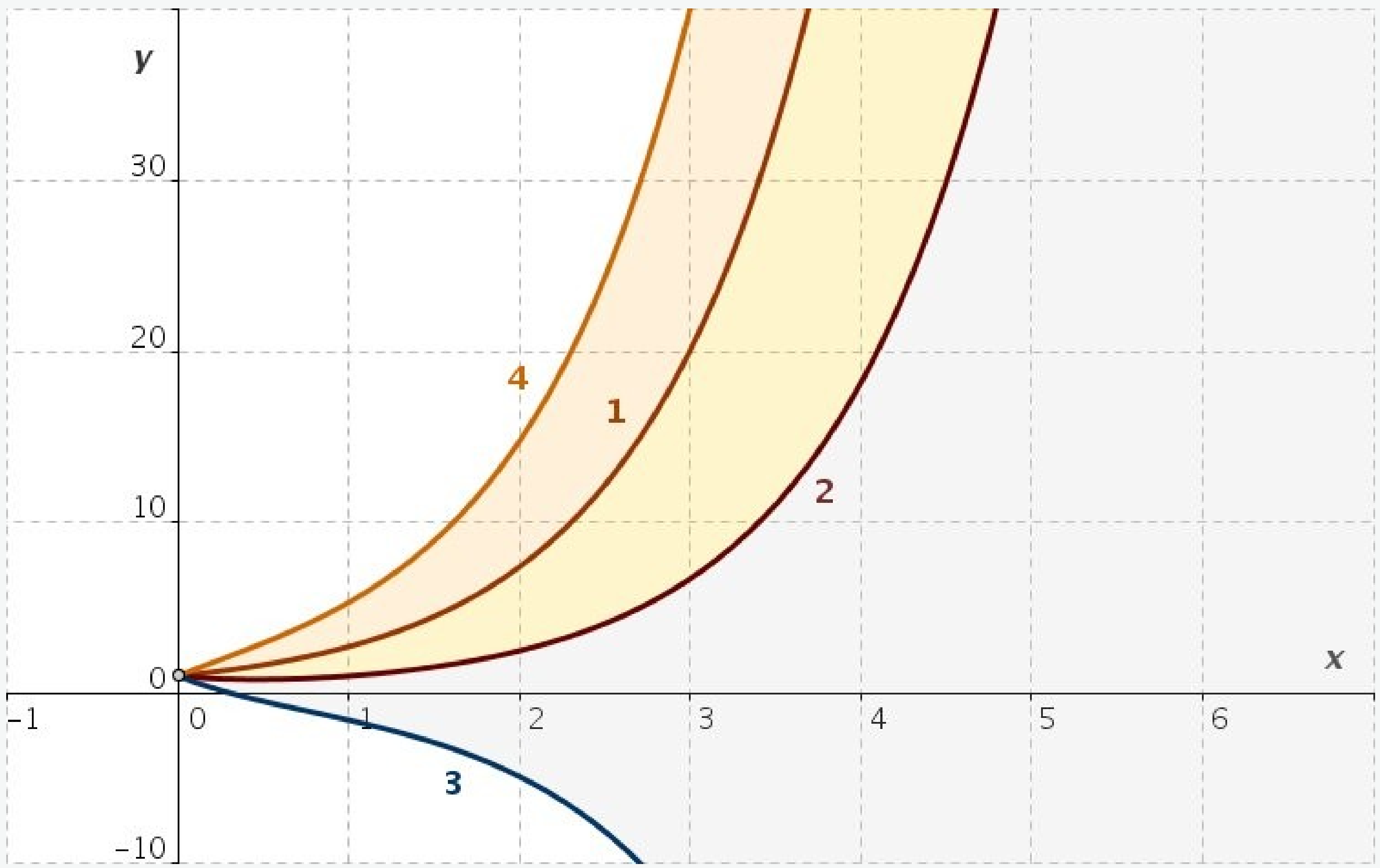


Abb. L9-2: Integralkurven der DGL $y'' + y' - 2y = 0$, *die folgendem Anfangswertproblem entsprechen* $y(0) = 1$, $y'(0) = a$: 1) $a = 1$, 2) $a = -1$, 3) $a = -4$, 4) $a = 4$

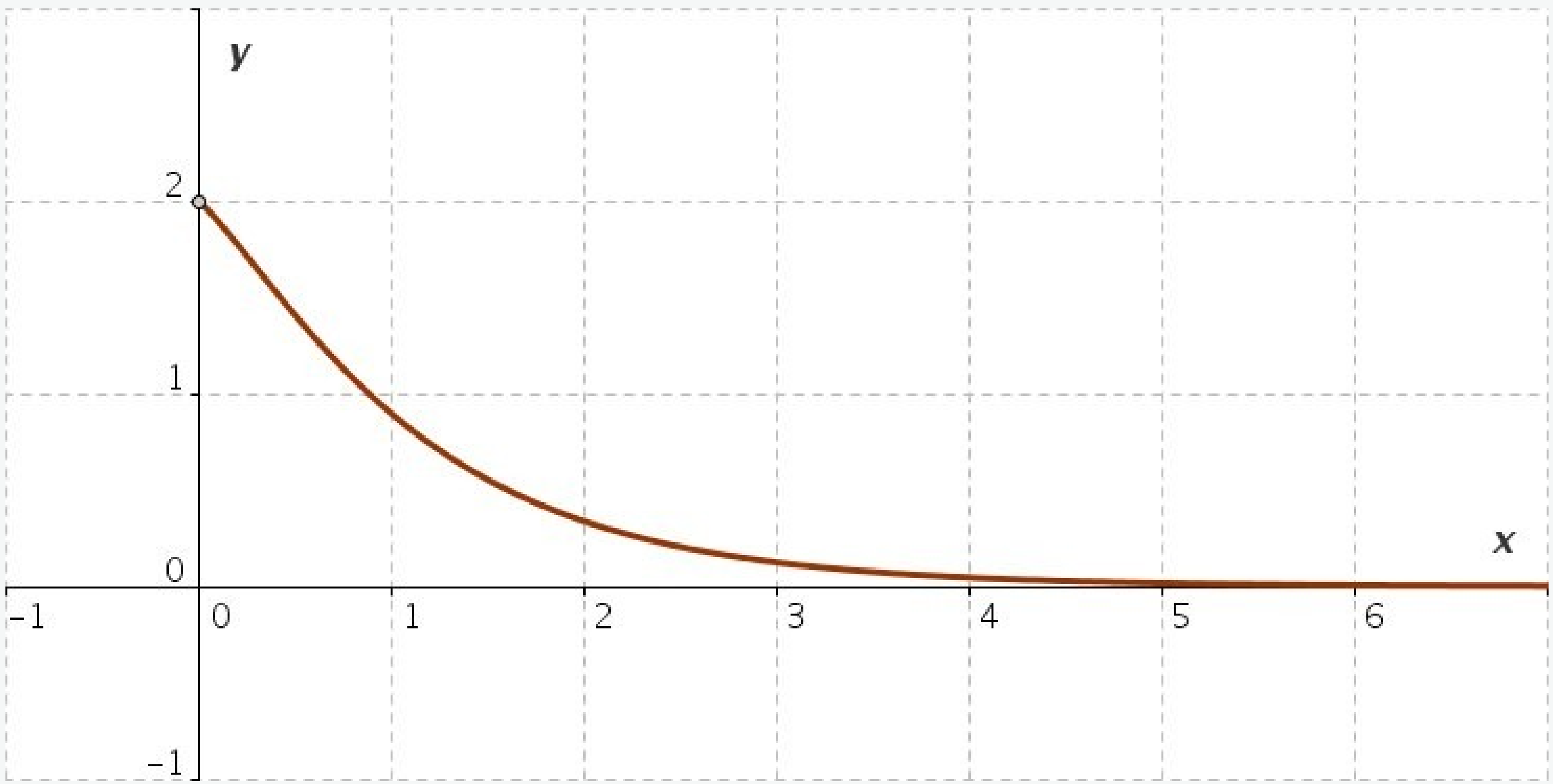


Abb. L10: Integralkurve der DGL $y'' + 4y' + 3y = 0$ mit $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \qquad y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \qquad y(x) = -\frac{1}{2} e^{-3x} + \frac{5}{2} e^{-x}$$

Lineare DGL 2. Ordnung: Lösung 11

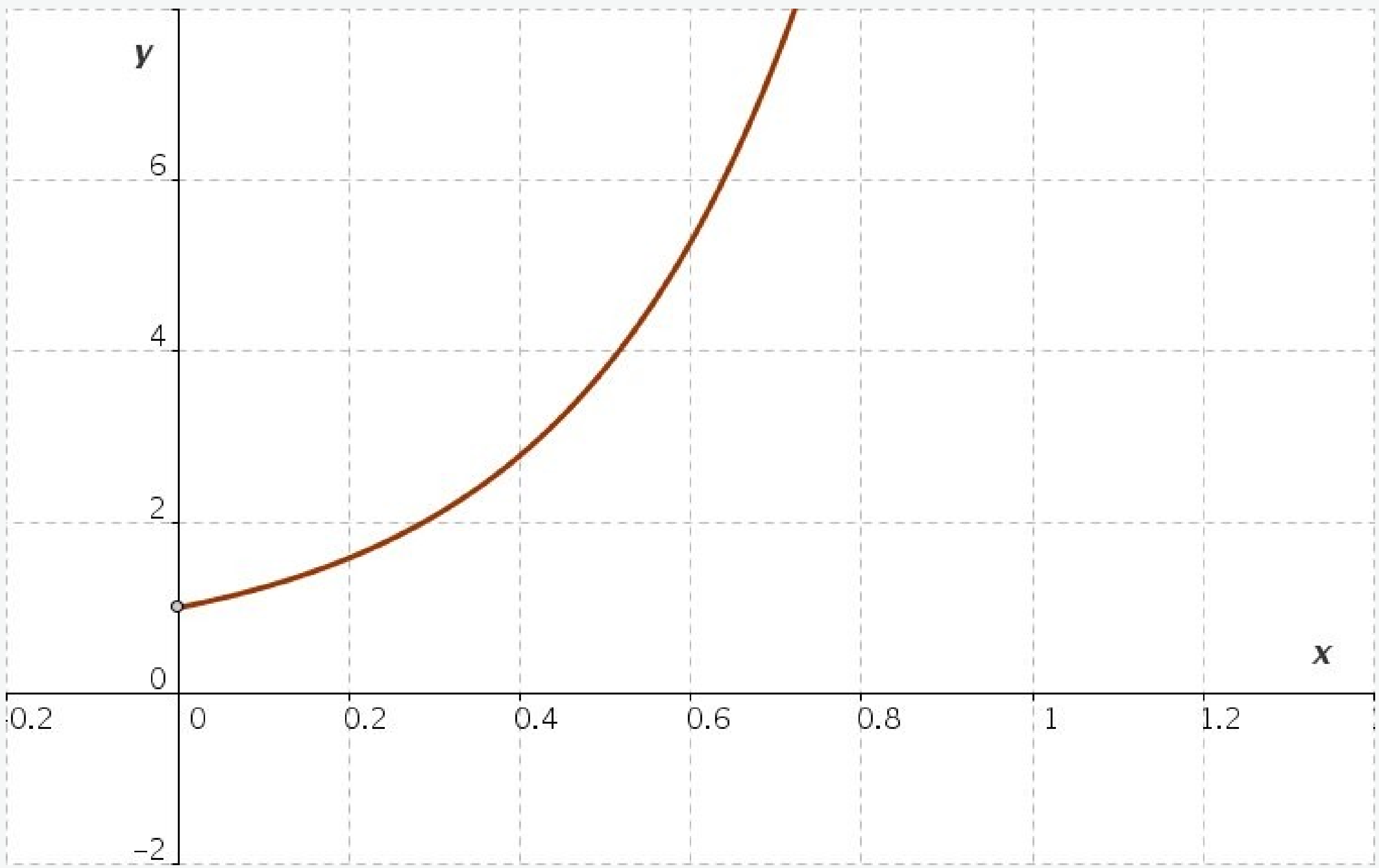
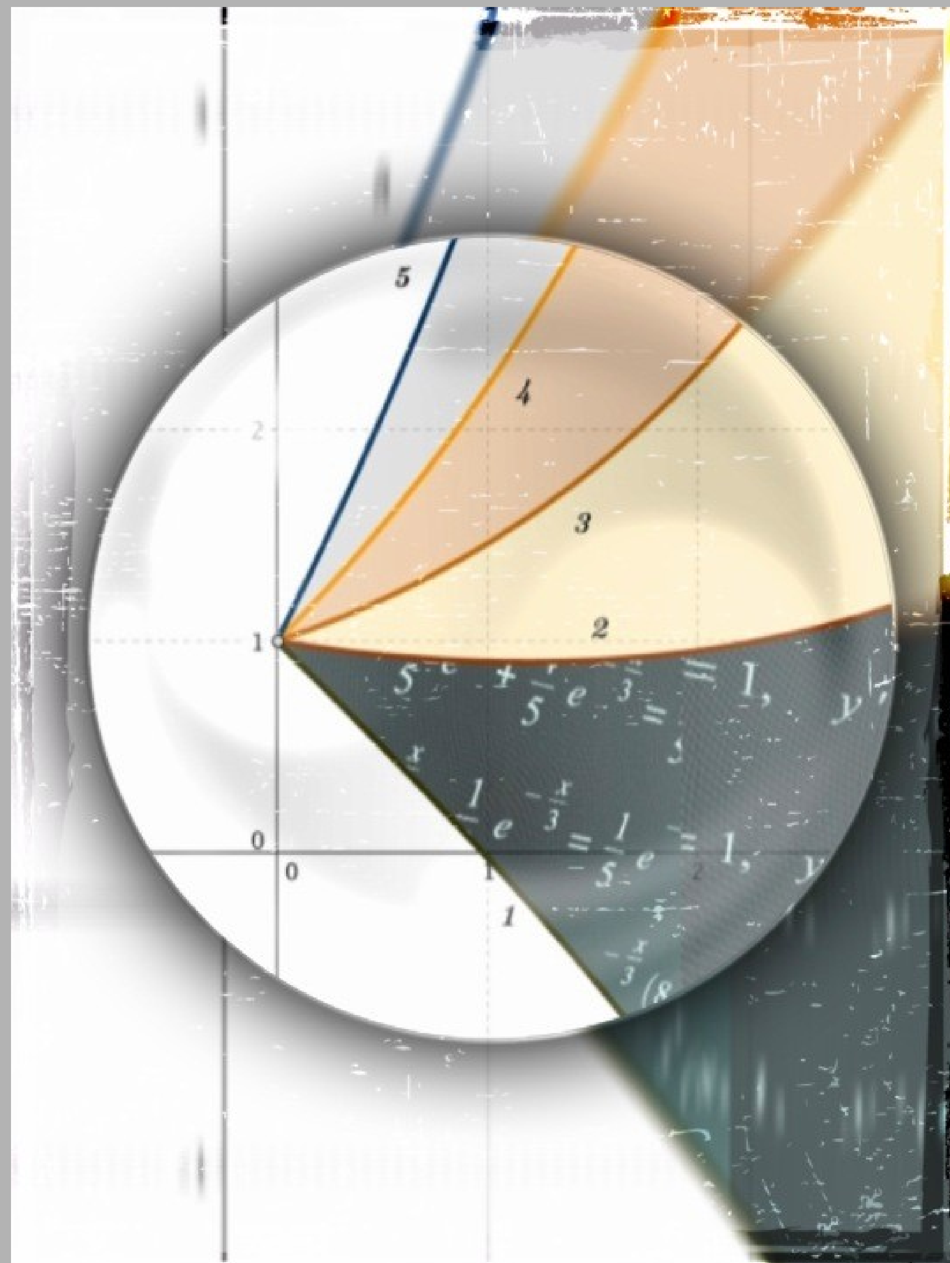


Abb. L11: Integralkurve der DGL $y'' - 4y' + y = 0$ mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

$$y'' - 4y' + y = 0, \qquad y(x) = C_1 \, e^{(2+\sqrt{3})x} + C_2 \, e^{-(-2+\sqrt{3})x}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \qquad y(x) = \frac{1}{2}\left(e^{(2+\sqrt{3})x} + e^{-(-2+\sqrt{3})x}\right)$$


5
4
3
2
1
2
1
0
0
1
2