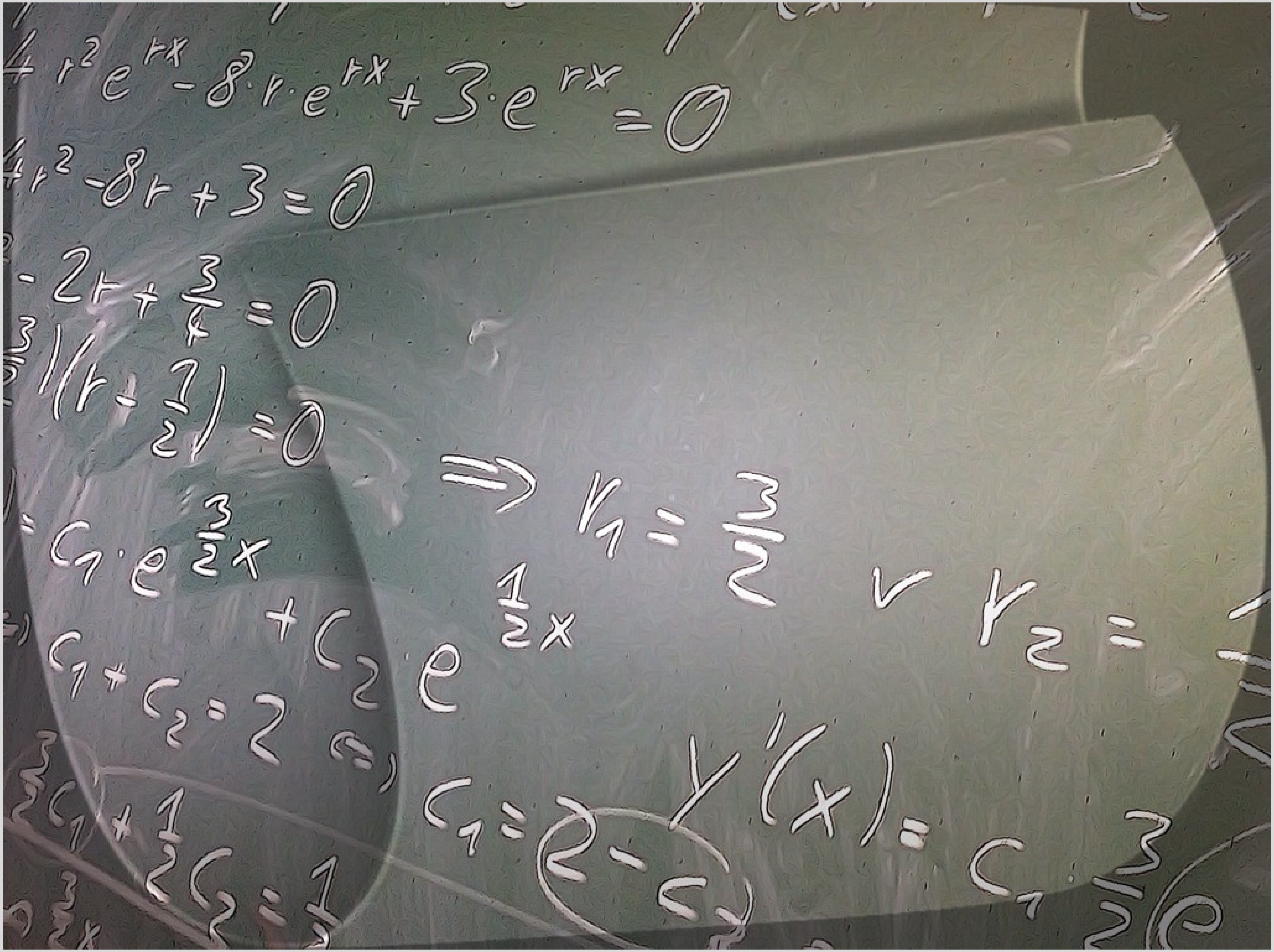
Lineare DGL 2. Ordnung

Aufgaben, Teil 2


4r²e^rx - 8·r·e^rx + 3·e^rx = 0
4r² - 8r + 3 = 0
- 2r + 3/4 = 0
)(r - 1/2) = 0 ⇒ r1 = 3/2 ∨ r2 =
c1·e^(3/2 x) + c2·e^(1/2 x)
c1 + c2 = 2 ⇔ c1 = 2 - c2
y'(x) = c1 3/2 e
3/2 c1 + 1/2 c2 = 1

Wir bestimmen die Lösung einer DGL *2.* Ordnung

$$y'' - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' = y$$

Die *2.* Ableitung der Funktion $y = y(x)$ ist wieder dieselbe Funktion. Eine bekannte Funktion der Analysis mit dieser Eigenschaft ist die Exponentialfunktion $y = exp(x)$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}(e^x) = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Es wird sich dann sicher noch eine zweite Funktion ermitteln lassen, nämlich $y = exp(-x)$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}(e^{-x}) = \frac{d}{dx}(-e^{-x}) = e^{-x}$$

Wie schon diskutiert, ist jede Linearkombination der beiden Lösungen wieder eine Lösung

$$y_1 = C_1\, e^x, \qquad y_2 = C_2\, e^{-x}$$

$$y_3 = y_1 + y_2 = C_1\, e^x + C_2\, e^{-x}$$

Wir bestimmen jetzt eine spezielle Lösung, die folgende Anfangswertbedingungen erfüllt

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = -1$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \qquad y(0) = C_1 + C_2 = 2$$

$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x}, \qquad y'(0) = C_1 - C_2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{3}{2}$$

Die spezielle Lösung lautet

$$y = \frac{1}{2} e^x + \frac{3}{2} e^{-x}$$

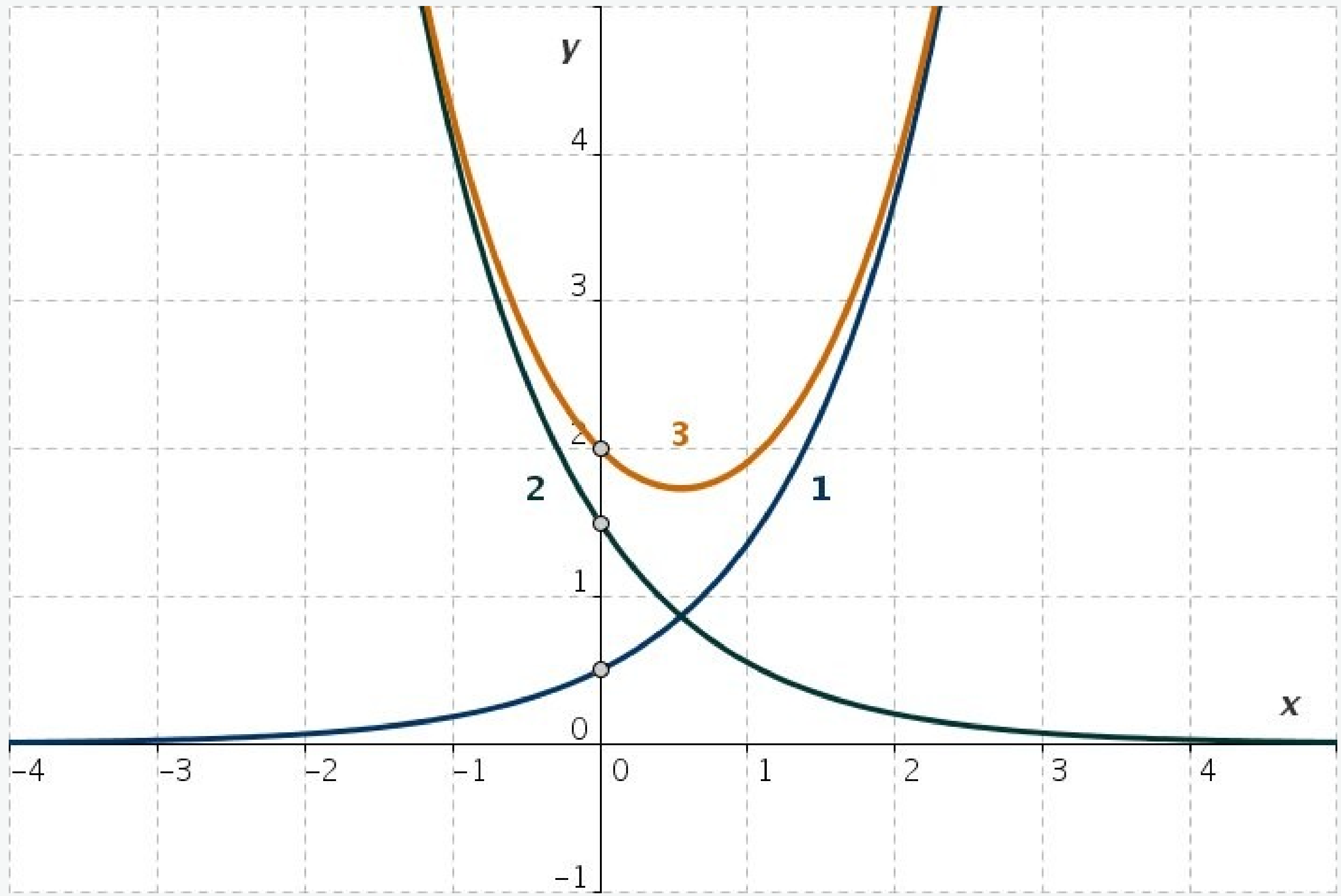


Abb. B2: Drei spezielle Lösungen der DGL 2. Ordnung $y'' - y = 0$

$$1)\ y = \frac{1}{2}\, e^{x}, \qquad 2)\ y = \frac{3}{2}\, e^{-x}, \qquad 3)\ y = \frac{1}{2}\, e^{x} + \frac{3}{2}\, e^{-x}$$

Jetzt versuchen wir die Lösung einer DGL *2.* Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$ zu erraten. Wir prüfen z.B., ob diese Gleichung exponentielle Lösungen hat. Wir nehmen also

$$y = e^{r x}$$

an, wobei r ein noch zu bestimmender Parameter ist. Daraus folgt, dass

$$y' = r\,e^{r x}, \qquad y'' = r^2 e^{r x}$$

ist.

Charakteristische Gleichung

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0, \qquad y = e^{r\,x}$$

$$(a\,r^2 + b\,r + c)\,e^{r\,x} = 0, \qquad e^{r\,x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \qquad a\,r^2 + b\,r + c = 0$$

Diese Gleichung wird als die charakteristische Gleichung der DGL bezeichnet. Sie ist von großer Bedeutung, da für den Fall, dass r eine Wurzel der Polynomgleichung ist, $y = exp\,(rx)$ eine Lösung der DGL ist. Da die Polynomgleichung eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten ist, besitzt sie zwei Wurzeln, die reell und verschieden, reell und gleich oder konjugiert komplex zueinander sein können. Wir betrachten nun den ersten Fall, die anderen beiden Fälle werden wir später behandeln.

Wir nehmen an, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung reell und voneinander verschieden sind

$$r_1 \neq r_2\,, \qquad y_1(x) = e^{r_1 x}\,, \qquad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x}$$

Wir bestimmen die Lösung dieser DGL mit folgenden Anfangsbedingungen

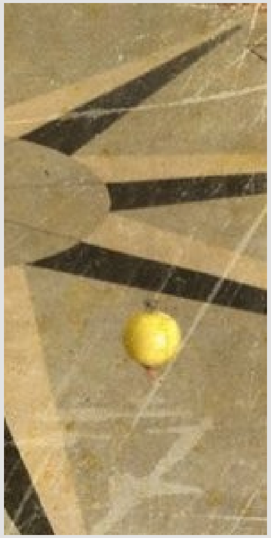
$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = 0\,, \qquad y(x_0) = y_0\,, \quad y'(x_0) = y'_0$$

$$x = x_0\,, \quad y = y_0\,, \qquad y_0 = C_1\, e^{r_1 x_0} + C_2\, e^{r_2 x_0}$$

$$y' = C_1\, r_1\, e^{r_1 x} + C_2\, r_2\, e^{r_2 x}\,, \qquad y'_0 = C_1\, r_1\, e^{r_1 x_0} + C_2\, r_2\, e^{r_2 x_0}$$

Wir lösen die Gleichungen nach Konstanten

$$C_1 = \frac{y'_0 - y_0\, r_2}{r_1 - r_2}\, e^{-r_1 x_0}\,, \qquad C_2 = \frac{y_0\, r_1 - y'_0}{r_1 - r_2}\, e^{-r_2 x_0}$$



Bestimmen Sie die Lösungen folgender Anfangswertproblem

Aufgabe 4:
$$y'' + 5y' + 6y = 0$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

Aufgabe 5:
$$4y'' - 8y' + 3y = 0$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$y = e^{rx} \qquad : (r^2 + 5r + 6)\, e^{rx} = 0$$

$$r^2 + 5r + 6 = (r+2)(r+3) = 0, \qquad r_1 = -2, \qquad r_2 = -3$$

Die allgemeine Lösung der DGL hat die Form

$$y = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{-3x}$$

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 3$$

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad y(0) = C_1 + C_2 = 2$$

$$y' = -2\,C_1\, e^{-2x} - 3\,C_2\, e^{-3x}, \qquad y'(0) = -2\,C_1 - 3\,C_2 = 3$$

$$C_1 + C_2 = 2, \qquad -2\,C_1 - 3\,C_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 9, \qquad C_2 = -7$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y = 9\, e^{-2x} - 7\, e^{-3x} = e^{-3x}\left(9\, e^{x} - 7\right)$$

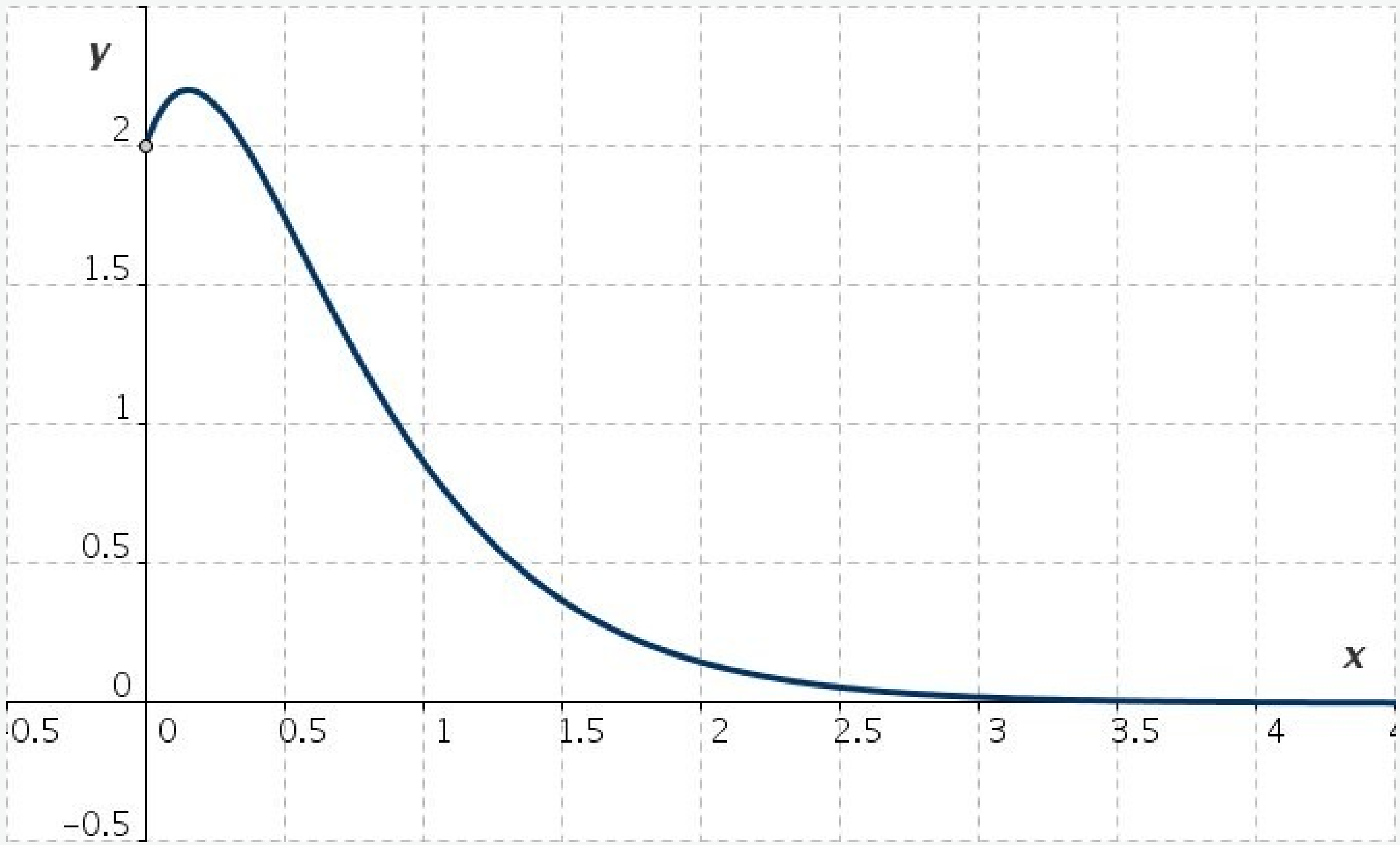


Abb. L4-1: Integralkurve der DGL $y'' + 5\,y' + 6\,y = 0$ *mit* $y\,(0) = 2, \quad y'\,(0) = 3$

Jetzt geben wir für die DGL $y'' + 5\,y' + 6\,y = 0$

Lösungen verschiedener Anfangswertprobleme

1) $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1: \qquad y = 2\,e^{-2x} - e^{-3x} = e^{-3x}(2\,e^{x} - 1)$

2) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0: \qquad y = 3\,e^{-2x} - 2\,e^{-3x} = e^{-3x}(3\,e^{x} - 2)$

3) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1: \qquad y = 4\,e^{-2x} - 3\,e^{-3x} = e^{-3x}(4\,e^{x} - 3)$

4) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2: \qquad y = 5\,e^{-2x} - 4\,e^{-3x} = e^{-3x}(5\,e^{x} - 4)$

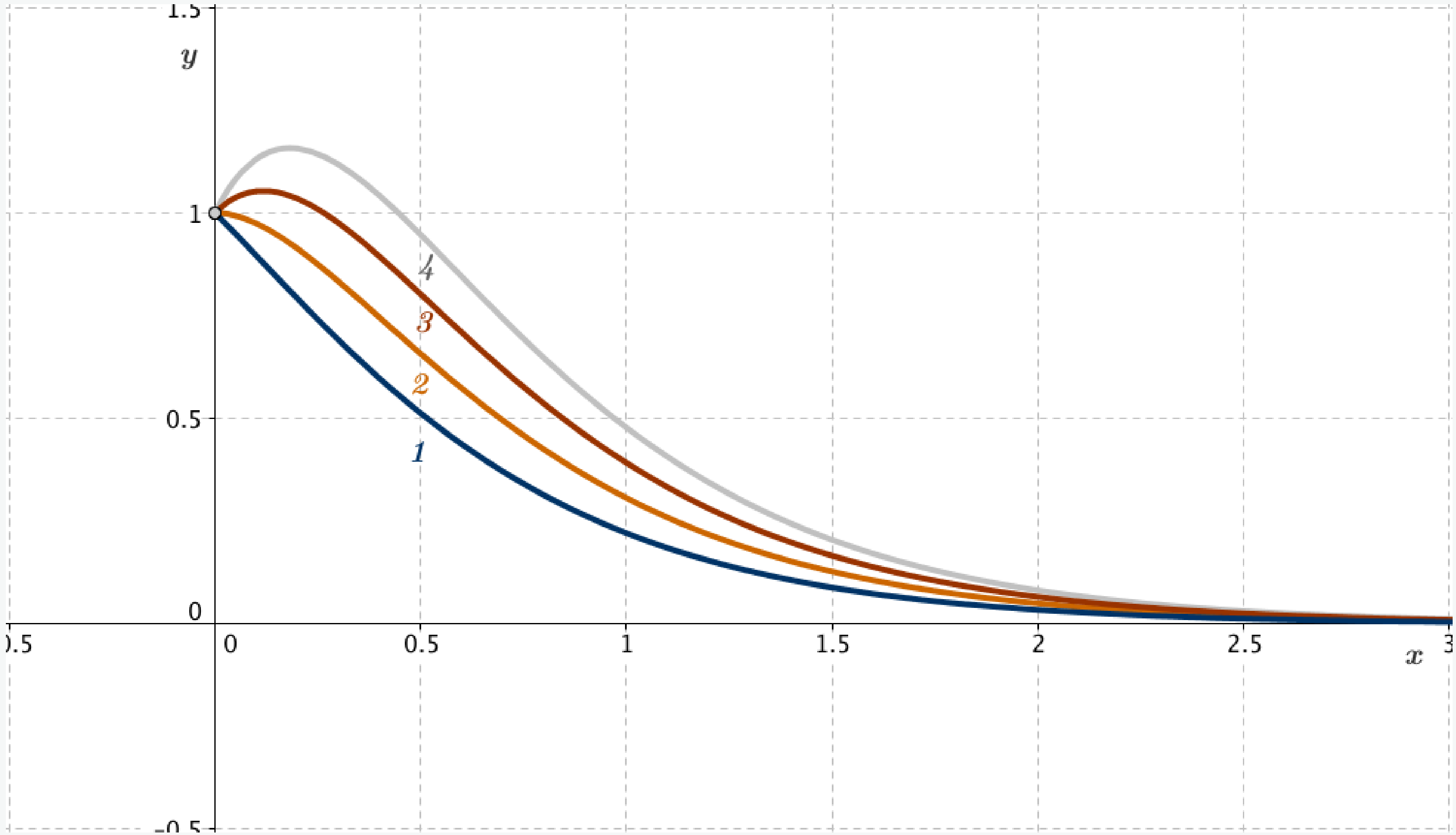


Abb. L4-2: Integralkurven der DGL $y'' + 5\,y' + 6\,y = 0$, die folgenden Anfangswertproblemen entsprechen: 1) $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = -1$, 2) $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 0$, 3) $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 1$, 4) $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 2$

$$y = e^{rx} \qquad : 4\,y'' - 8\,y' + 3\,y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(4\,r^2 - 8\,r + 3)\; e^{rx} = 0\,, \qquad r_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad r_2 = \frac{3}{2}$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist

$$y = C_1\, e^{\frac{x}{2}} + C_2\, e^{\frac{3x}{2}}$$

Die spezielle Lösung der DGL ist

$$y(0) = 2\,, \quad y'(0) = \frac{1}{2}\,, \qquad y = \frac{5}{2}\, e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\, e^{\frac{3x}{2}}$$

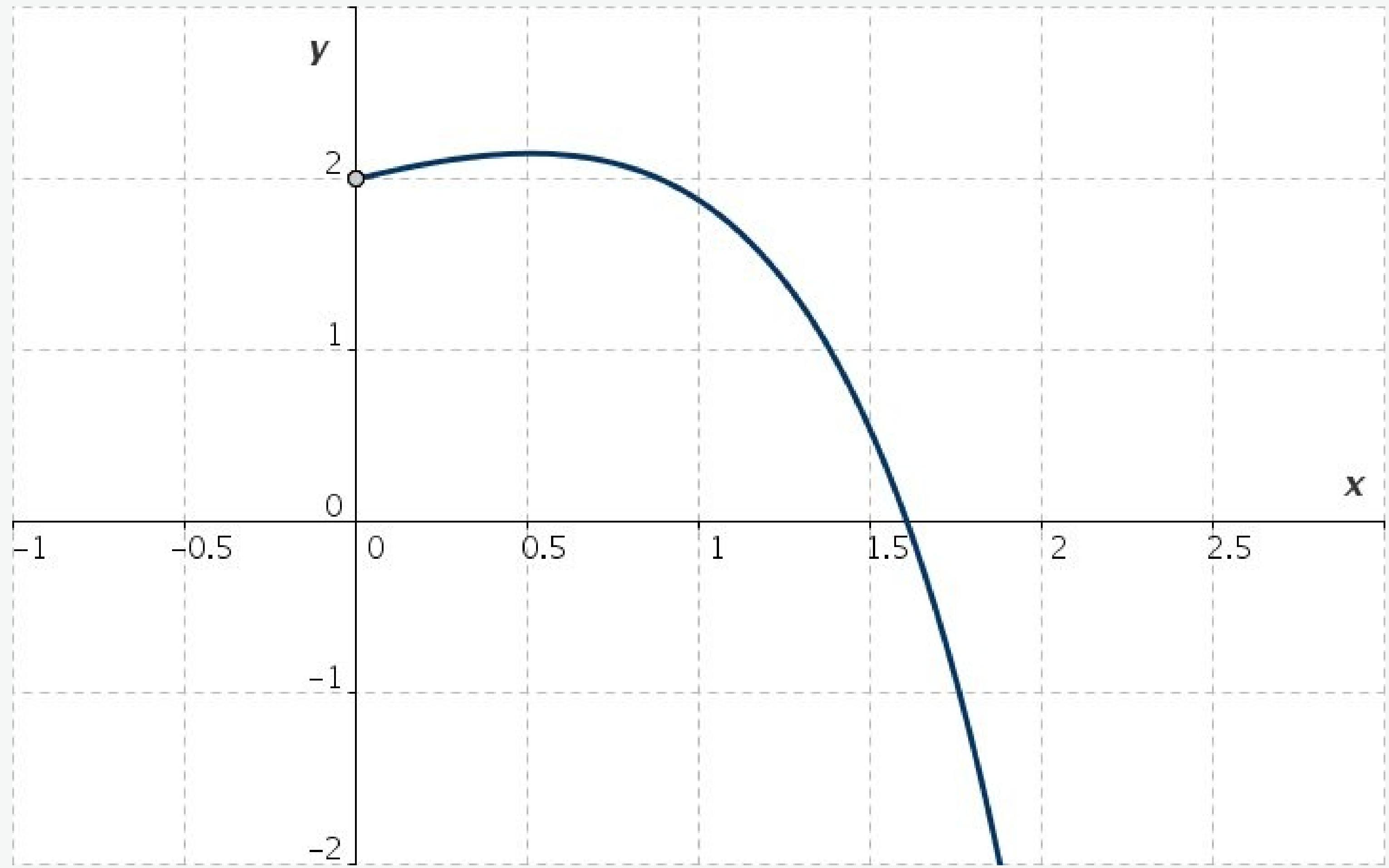


Abb. L5-1: Integralkurve der DGL $4\,y'' - 8\,y' + 3\,y = 0$ *mit* $y\,(0) = 2, \quad y'\,(0) = 1/2$

Wir geben für die DGL $4\,y'' - 8\,y' + 3\,y = 0$

Lösungen verschiedener Anfangswertprobleme

1) $y(0) = 2, \quad y'(0) = \dfrac{1}{2}, \qquad y = \dfrac{5}{2}\,e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2}\,e^{\frac{3x}{2}}$

2) $y(0) = 2, \quad y'(0) = \dfrac{1}{5}, \qquad y = \dfrac{14}{5}\,e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{4}{5}\,e^{\frac{3}{2}x}$

3) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \qquad y = 2\,e^{\frac{x}{2}}$

4) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 2, \qquad y = e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{3}{2}x}$

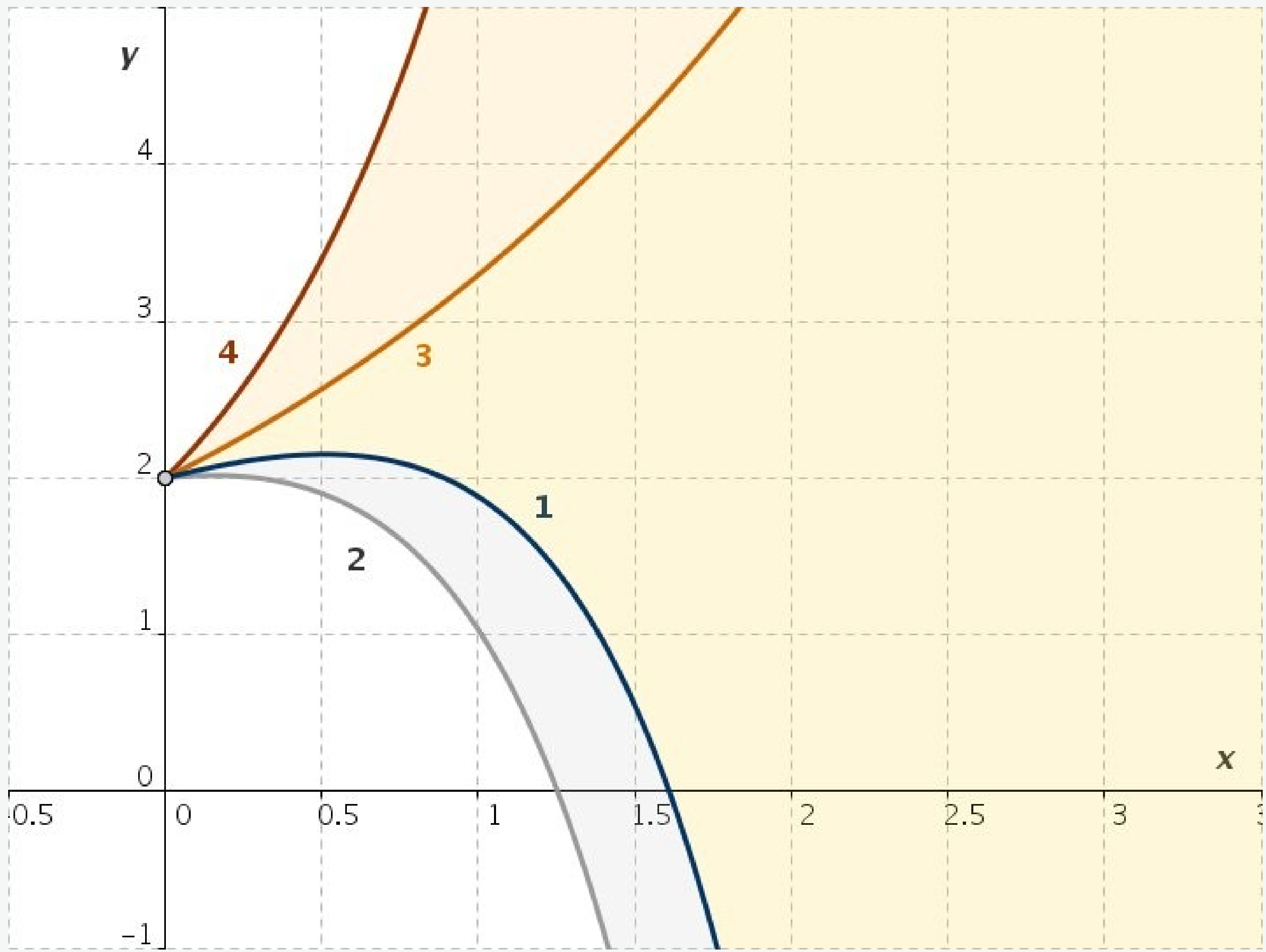


Abb. L5-2: Integralkurven der DGL $4y'' - 8y' + 3y = 0$, die folgenden Anfangswertproblemen entsprechen: 1) $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/2$, 2) $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/5$, 3) $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, 4) $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$