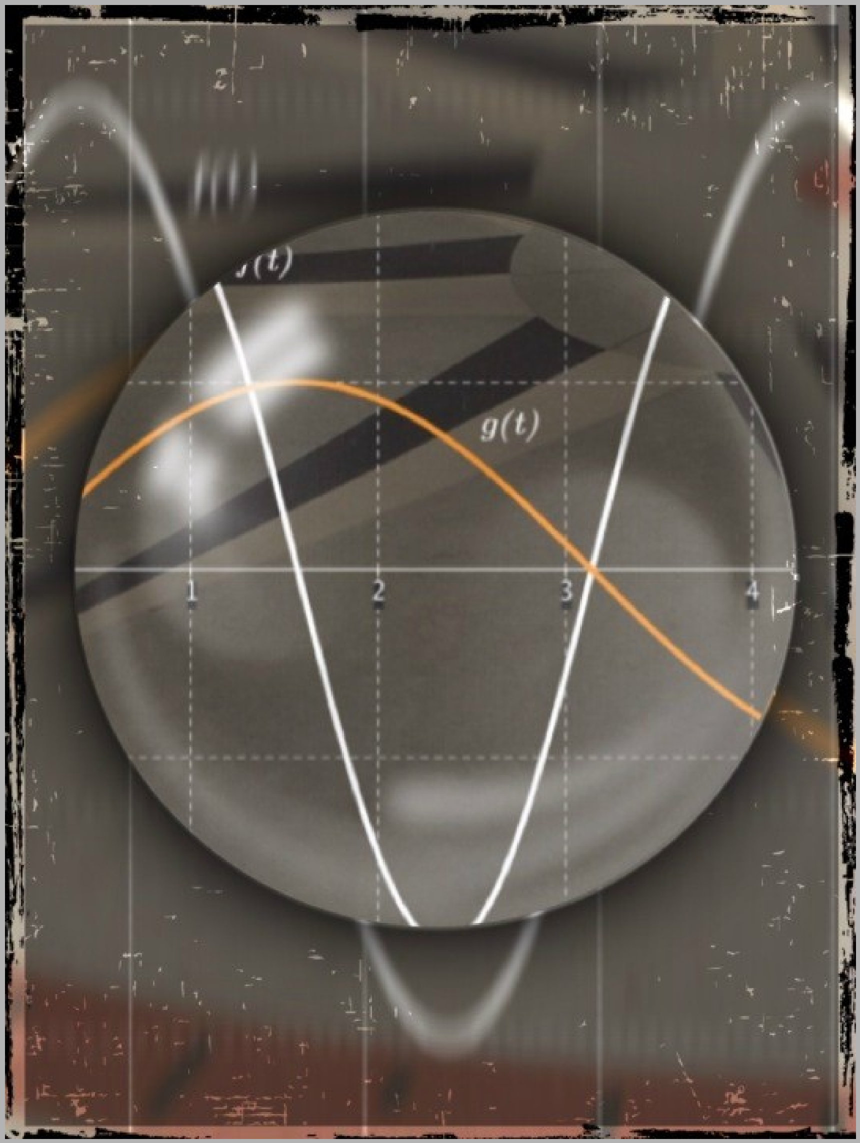
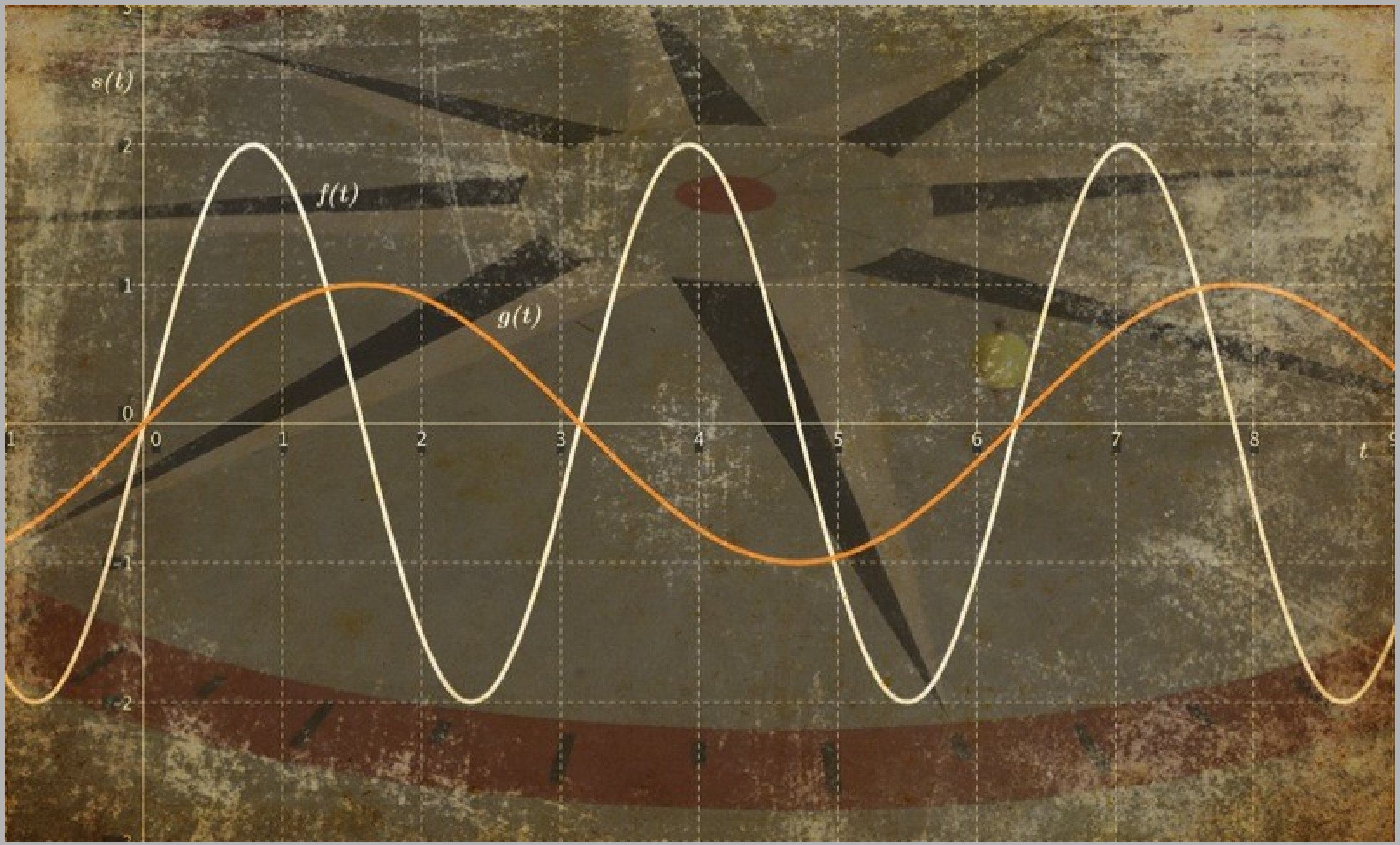


Differentialgleichungen 2. Ordnung


s(t)
f(t)
g(t)
t

Viele Geschichten ranken sich um den schiefen Turm von Pisa: Der Legende nach hat der aus Pisa stammende Galileo Galilei bei Versuchen auf dem Turm die Fallgesetze entdeckt.

$$\frac{d^2 s}{d\,t^2} = -g$$

$s\,(t)$ – die Weg-Zeit-Funktion

$\boldsymbol{g}$ – die konstante Erd- oder Fallbeschleunigung

Die Fallbeschleunigung erfolgt in der zur Koordinatenachse entgegengesetzten Richtung.

Die Lösung der Differentialgleichung ist die Funktion $s\,(t)$ der Fallbewegung. Wir erhalten sie, indem wir die Differentialgleichung zweimal nacheinander integrieren. Der 1. Integrationsschritt führt zur Geschwindigkeits-Zeit-Funktion

$$v\,(t) = \frac{ds}{dt} = -g\,t + v_0$$

Der *2*. Integrationsschritt führt zur Weg-Zeit-Funktion $s\,(t)$

Allgemeine Lösung: $$s\,(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + C_1\,t + C_2$$

Spezielle Lösung:

$$s\,(0) = s_0\,, \quad v\,(0) = v_0: \qquad s\,(t) = -\frac{g\,t^2}{2} + v_0\,t + s_0$$

Definition:

Eine Differenzialgleichung der Form

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = g(x)$$

heißt eine lineare Differenzialgleichung *2.* Ordnung. Die Funktion $g(x)$ wird als Störfunktion bezeichnet. Wir gehen davon aus, dass die Funktionen $a(x)$, $b(x)$ und $g(x)$ in einem Intervall I definiert und stetig sind.

Sind $a(x)$ und $b(x)$ konstant, so liegt eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten vor

$$y'' + a\, y' + b\, y = g(x)$$

Kennzeichen einer linearen DGL *2.* Ordnung sind:

1. y, y' und y'' treten linear auf.
2. "Gemischte Produkte" wie $y\,y'$, $y\,y''$ und $y'\,y''$ sind in der DGL nicht enthalten.

homogene lineare DGL *2*. Ordnung

$$g(x) = 0: \qquad y'' + a\, y' + b\, y = 0$$

inhomogene lineare DGL *2*. Ordnung

$$g(x) \neq 0: \qquad y'' + a\, y' + b\, y = g(x)$$

Die allgemeine Lösung einer DGL *2*. Ordnung ist eine Kurvenschar mit zwei beliebigen Parametern

$$y = y(x, C_1, C_2)$$

Die homogene DGL hat immer die triviale Lösung $y(x) = 0$.

Satz: Jede Linearkombination

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_m y_m$$

von Lösungen der homogenen DGL ist wieder eine Lösung der Gleichung.

Prüfen Sie, welche der folgenden Eigenschaften DGL 2. Ordnung besitzen: linear, homogen, inhomogen, konstante Koeffizienten

1. $y'' + y = 0$
2. $y'' + x\, y' + y = 0$
3. $y'' + 2\, y' - 3\, y = 2\, x - 4$
4. $y'' + y' + y^2 = 0$
5. $3\, y'' + 5\, y' + 6\, y = \sin x$
6. $x^3\, y'' + x^2\, y' + \sqrt{x}\, y = x$
7. $y'\, y'' + 2\, y = x$

1. $y'' + y = 0$
   – Linear, homogen, mit konstanten Koeffizienten

2. $y'' + x\,y' + y = 0$
   – Linear, homogen, besitzt nichtkonstante Koeffizienten

3. $y'' + 2\,y' - 3\,y = 2\,x - 4$
   – Linear, inhomogen, mit konstanten Koeffizienten

4. $y'' + y' + y^2 = 0$ – Nichtlinear (y^2-Term)

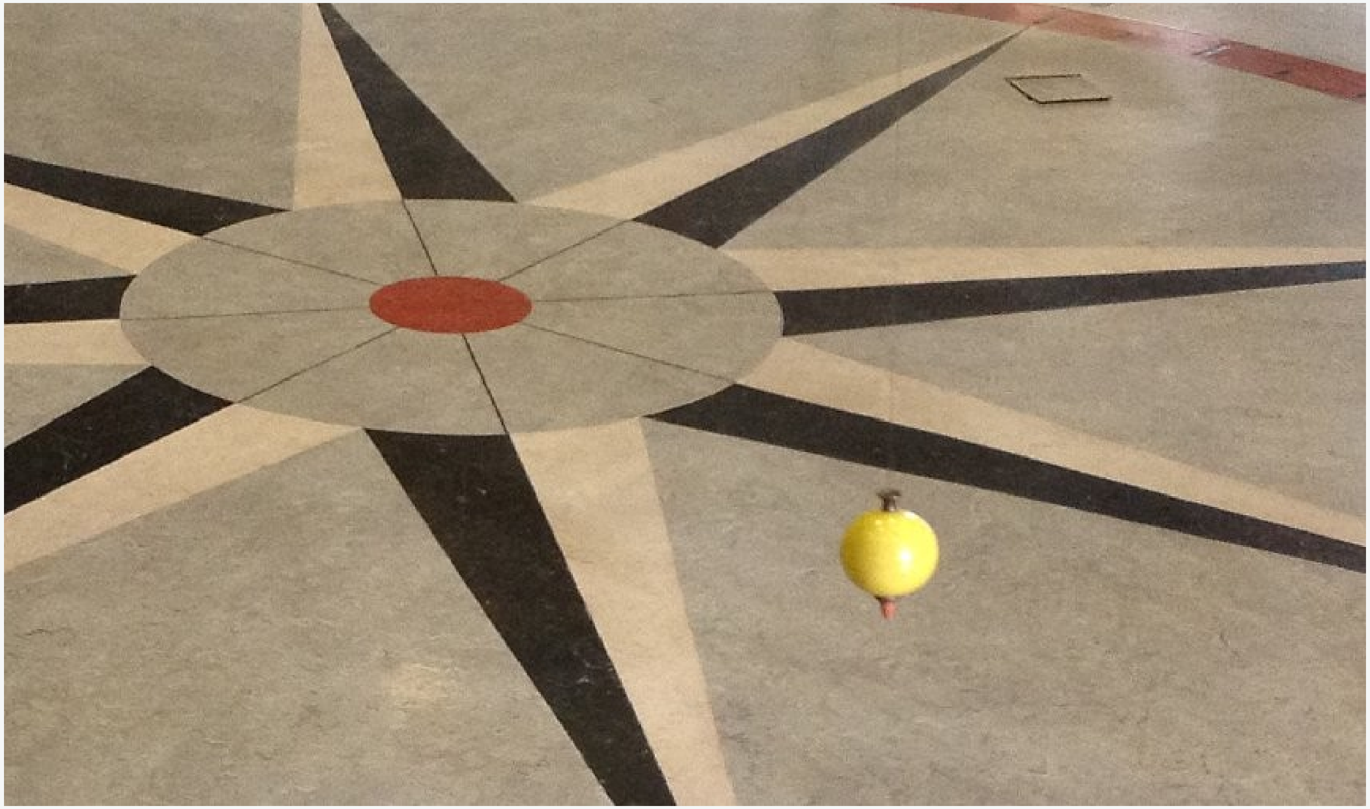
5. $3\,y'' + 5\,y' + 6\,y = \sin x$
   – Linear, inhomogen, mit konstanten Koeffizienten

6. $x^3\,y'' + x^2\,y' + \sqrt{x}\,y = x$
   – Linear, inhomogen, besitzt nichtkonstante Koeffizienten

7. $y'\,y'' + 2\,y = x$ – Nichtlinear ($y'y''$-Term)

Raten und Prüfen

Das Erraten der Lösung von Differentialgleichungen ist eine oft benutzte und bewährte Methode. Tatsächlich gibt es für sehr viele Differentialgleichungen kein systematisches Lösungsverfahren. Raten und Ausprobieren ist deshalb <u>sehr wichtig !</u>



Einführendes Beispiel: Freie ungedämpfte Schwingung

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen spielen die linearen DGL *2*. Ordnung mit konstanten Koeffizienten eine bedeutende Rolle. Sie treten z.B. in den mathematischen Beschreibungen von mechanischen und elektromagnetischen Schwingungen auf.

Wir bestimmen die Lösung einer DGL 2. Ordnung

$$\frac{d^2 s}{d\,t^2} = -s$$

Die 2. Ableitung der Funktion $s = s(t)$ ist wieder dieselbe Funktion, aber mit umgekehrtem Vorzeichen. Wohlbekannte Funktionen mit dieser Eigenschaft sind $s(t) = \cos t$ und $s(t) = \sin t$

$$\frac{d^2}{d\,t^2}(\cos t) = \frac{d}{dt}(-\sin t) = -\cos t$$

$$\frac{d^2}{d\,t^2}(\sin t) = \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$$

Durch Experimentieren wird sich dann zeigen, dass auch Vielfache dieser beiden Lösungen wiederum Lösungen sind. Die Funktionen $s(t) = 2\cos t$ und $s(t) = 5\sin t$ genügen z.B. der ursprunglichen DGL. Allgemeiner:

$$s_1(t) = C_1 \cos t\,, \qquad s_2(t) = C_2 \sin t$$

sind Lösungen.

Wie oben festgestell, ist jede Summe von Lösungen der Gleichung $s'' + s = 0$ wiederum eine Lösung

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t\,.$$

$s(t)$ ist eine allgemeine Lösung, die zwei Integrationskonstanten enthält. Um die Integrationskonstanten festlegen zu können, braucht man zusätzliche Informationen über die gesuchte Lösung. Sie können z.B. bei einem physikalischen Experiment in den Anfangsbedingungen bestehen

$$s(0) = s_0\,, \qquad v(0) = \frac{ds}{dt} = 0$$

$$s(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = s_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = s_0$$

$$v(0) = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = \left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right)\Big|_{t=0} = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 0$$

$$C_2 = 0$$

Die spezielle Lösung lautet

$$s(t) = s_0 \cos t$$

Jetzt bestimmen wir die Lösung der ähnlichen DGL *2.* Ordnung

$$\frac{d^2 s}{d\,t^2} = -\frac{k}{m}\, s$$

welche die freie ungedämpfte Schwingung eines Feder-Masse-Schwingers beschreibt (m ist die Masse, k – Federkonstante).

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 s}{d\,t^2} = -\,\omega^2\, s \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 s}{d\,t^2} + \omega^2\, s = 0$$

$\cos t$ und $\sin t$ sind nicht mehr die Lösungen dieser DGL.

$$\frac{d^2}{d\,t^2}(\sin t) = -\sin t \neq -\,\omega^2\,\sin t$$

Aber wir können trotzdem eine Lösung erraten: Wir wissen, dass $\cos t$ und $\sin t$ fast Lösungen dieser DGL sind. Wir sollten irgendwie den Extrafaktor ω^2 behandeln. Idealerweise sollte man diesen Faktor nach dem zweimaligen Differenzieren einer trigonometrischen Funktion $\cos t$ oder $\sin t$ erhalten. Eine Lösung ist nicht schwer zu erraten

$$\frac{d^2}{d\,t^2}(\sin \omega\, t) = \frac{d}{dt}(\omega\,\cos \omega\, t) = -\,\omega^2\,\sin \omega\, t$$

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2 s}{d t^2} + \omega^2 s = 0$$

ist in der Linearform

$$s(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

darstellbar.

Das System schwingt harmonisch mit der Kreisfrequenz ω, die auch als Eigenfrequenz bezeichnet wird, und der Schwingungsdauer T

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Die Schwingungsgleichung $\dfrac{d^2 s}{d\,t^2} + \omega^2\, s \;=\; 0$

kann auch komplexe Lösung haben. Schon die allgemeine Lösung weist darauf, wenn

$C_1 = 1, \qquad C_2 = i:$

$$s\,(t) = C_1 \cos\omega\, t + C_2 \sin\omega\, t = \cos\omega\, t + i \sin\omega\, t = e^{\,i\,\omega\, t}$$

<u>Eulersche Formel:</u>

$$\boxed{e^{\,i\,\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi}$$

$$\frac{ds}{dt} = i\,\omega\, e^{i\,\omega\, t}, \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = (i\,\omega)^2\, e^{i\,\omega\, t} = -\,\omega^2\, e^{i\,\omega\, t}$$

Wir bestimmen die folgenden Anfangswertprobleme:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} + 4 s = 0$$

$a)\ \ s(0) = 0, \qquad s(\pi/4) = 2$

$b)\ \ s(0) = 1, \qquad s'(0) = -6$

Aus der allgemeinen Lösung der DGL $\quad \dfrac{d^2 s}{d t^2} + \omega^2 s = 0$

bestimmen wir die gesuchte Lösung mit zwei Integrationskonstanten

$$\omega^2 = 4, \quad \omega = 2 \quad \Rightarrow \quad s(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

$a)\ \ s(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, \qquad C_1 = 0$

$$s\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \qquad C_2 = 2$$

$s(t) = 2 \sin 2t$ – spezielle Lösung

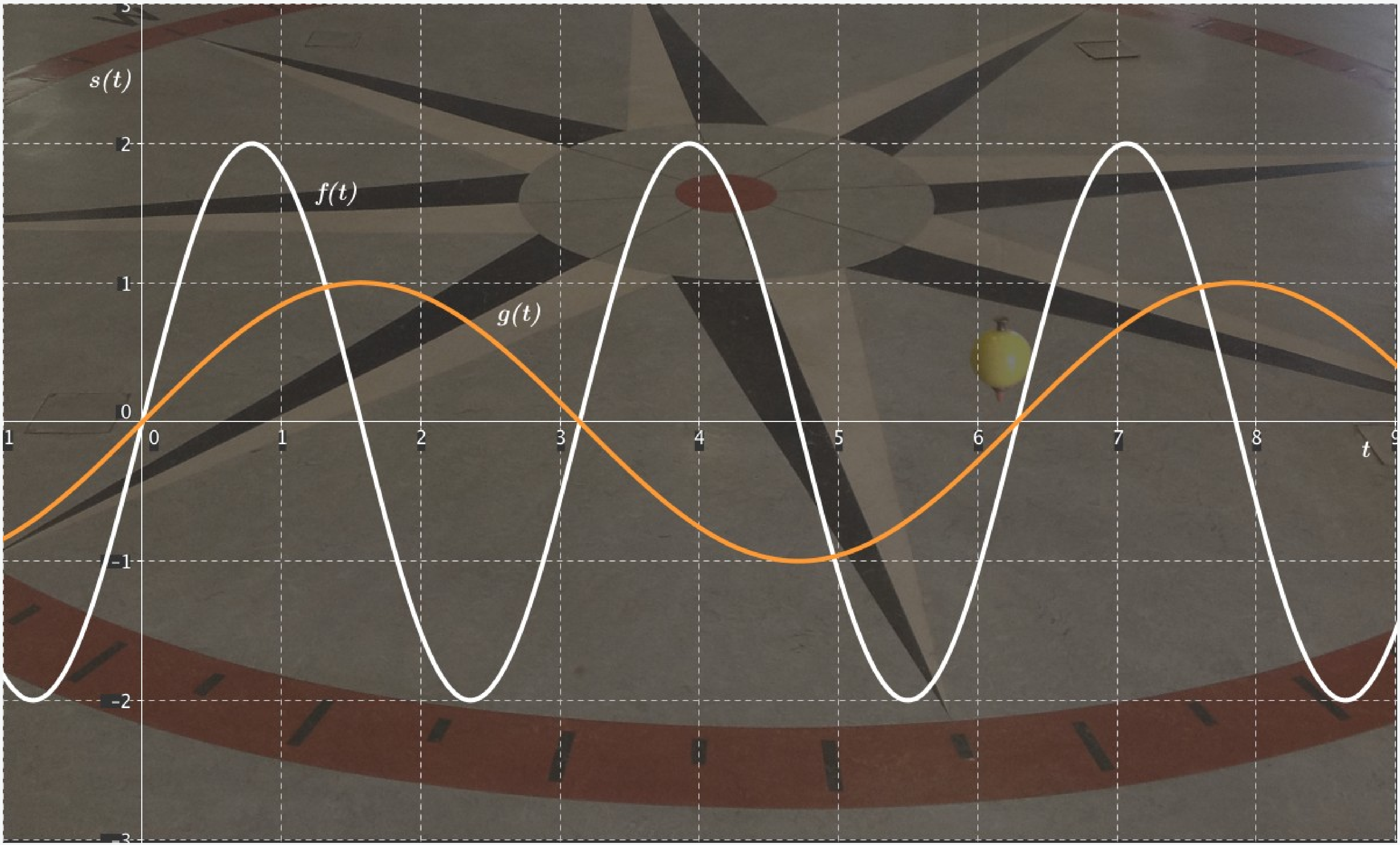


Abb. 1-1: Die Funktionen $f(t) = 2 \sin(2t)$ und $g(t) = \sin t$

$$b)\quad s(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t, \qquad s(0) = 1, \quad s'(0) = -6$$

$$s(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$s(t) = \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

$$s'(t) = -2 \sin 2t + 2 C_2 \cos 2t$$

$$s'(0) = -2 \sin 0 + 2 C_2 \cos 0 = 2 C_2 = -6 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -3$$

$s(t) = \cos 2t - 3 \sin 2t$ – spezielle Lösung

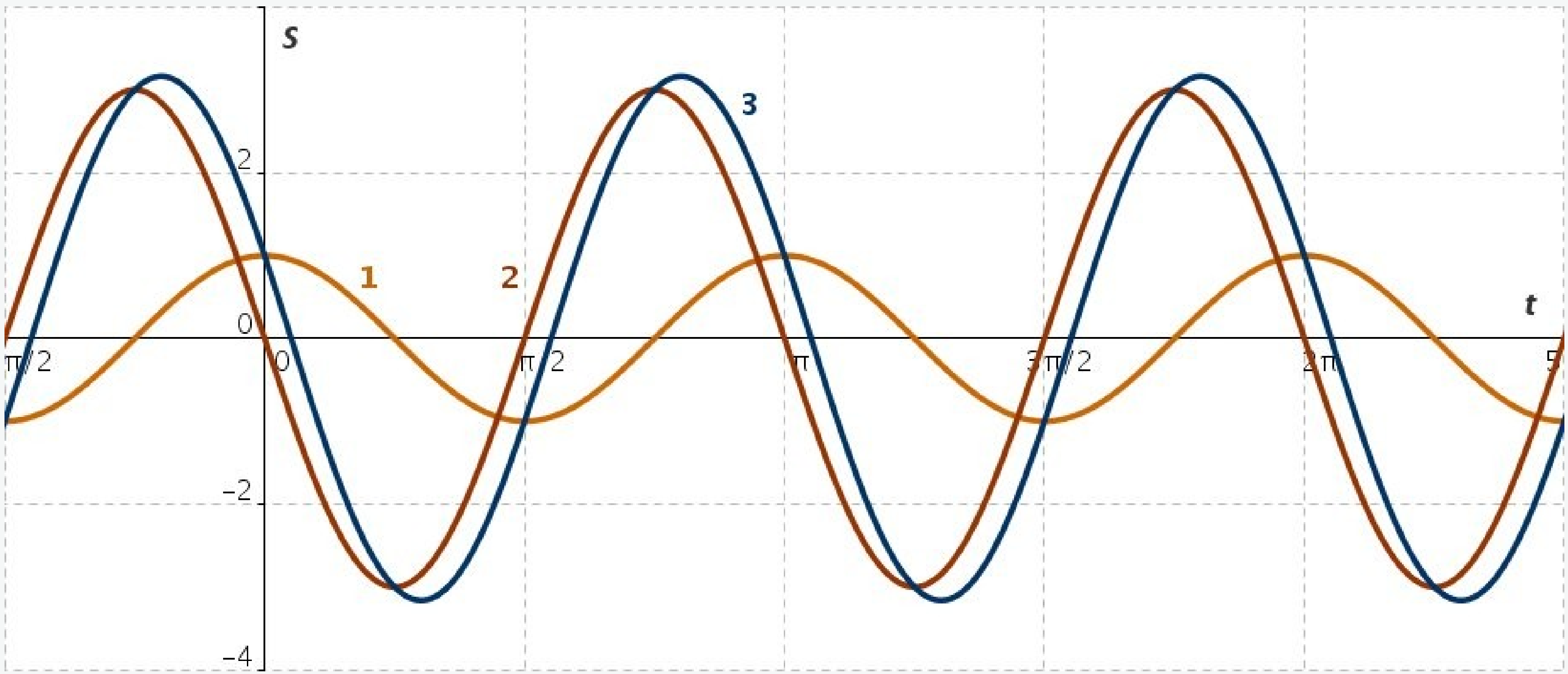


Abb. 1-2: Funktionen 1) $f(t) = \cos(2t)$, 2) $g(t) = -3\sin(2t)$, 3) $h(t) = \cos(2t) - 3\sin(2t)$

Die Abbildung zeigt, dass die Funktion $h(t) = \cos(2t) - 3\sin(2t)$ wie eine Sinus- oder Kosinusfunktion aussieht. Was kann man im Allgemeinen über eine solche Lösung sagen?

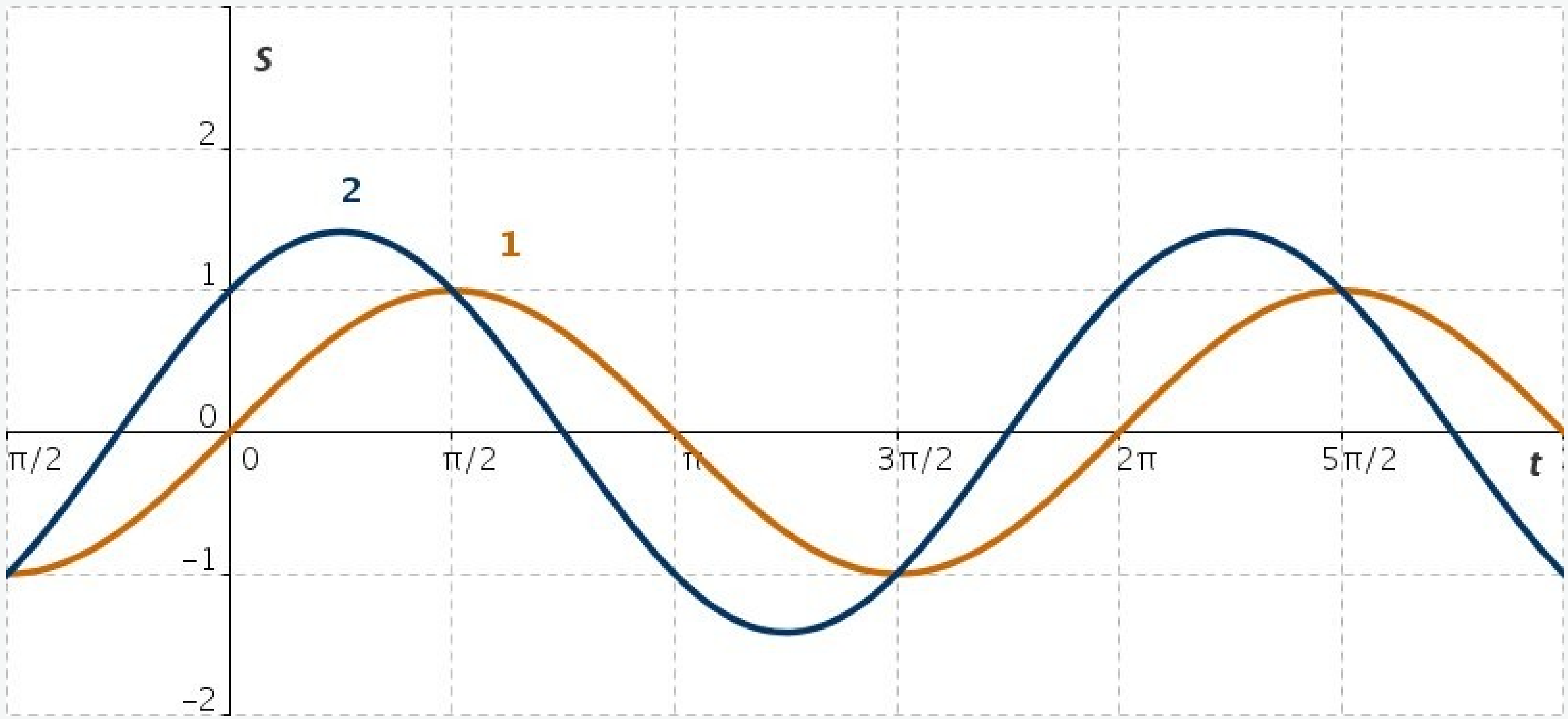


Abb. 2-1: Funktionen 1) f (t) = sin t und 2) g (t) = sin t + cos t

Die Funktion $g(t) = \cos t + \sin t$ sieht genau wie eine Sinus-Funktion aus. Im Grunde genommen ist sie eine Sinus-Funktion mit der Periode 2π und der Amplitude $\sqrt{2}$. Im Folgenden werden wir eine Sinus-Darstellung für diese Funktion herleiten.

Wir zeigen, dass eine Sinus-Funktion

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \qquad A > 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

in der Form

$$s(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \qquad (C_1, \ C_2 \in \mathbb{R})$$

darstellbar ist.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$s(t) = A\left(\sin(\omega t) \cos \varphi + \cos(\omega t) \sin \varphi\right) =$$

$$= C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

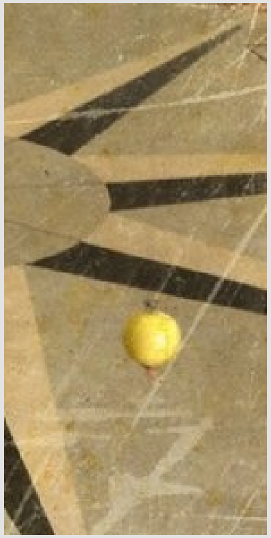
$$C_1 = A \cos \varphi, \quad C_2 = A \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{C_2}{C_1}$$

A – Amplitude, ω – Kreisfrequenz der Schwingung

φ – Phase, T – Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Aufgabe 2:

Folgende DGL *2.* Ordnung stellen oszillierende Systeme dar

$a)\quad y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 5, \quad y'(0) = 0$

$b)\quad 4y'' + y = 0, \qquad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0$

$c)\quad y'' + 6y = 0, \qquad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$

$d)\quad 6y'' + y = 0, \qquad y(0) = 20, \quad y'(0) = 0$

Welches System

1) oszilliert am schnellsten (hat die kleinste Periode)?

2) hat die größte Amplitude ?

3) hat die größte Periode?

4) hat die größte Geschwindigkeit?

Aufgabe 3:

Für welche Werte ω und A ist $y = A \cos(\omega t)$ die Lösung der DGL *2.* Ordnung

$y'' + 5y = 0, \qquad y'(1) = 3$

Lösung 2:

1) System *(c)* oszilliert am schnellsten (hat die kleinste Periode).

2) System *(c)* hat die größte Amplitude.

3) System *(d)* hat die größte Periode.

4) System *(a)* hat die größte Geschwindigkeit.

Lösung 3: $y = -1.705 \cos(\omega t), \qquad \omega = \pm\sqrt{5}$