Richtungsfelder oder

Das große Ganze im Überblick

Man verliert sich leicht in den mathematischen Details einer DGL und vernachlässigt dabei die Vorstellung vom Gesamtbild. Ein praktisches Werkzeug, mit dem man sich einen Überblick über Differentialgleichungen verschaffen kann, sind Richtungsfelder. Richtungsfelder sind praktisch, um sich Differentialgleichungen der folgenden Form

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x\,,\,y)$$

besser vorstellen zu können. Diese Gleichung gibt die Steigung der Gleichung $y = f(x)$ an einem beliebigen Punkt x an. Ein Richtungsfeld kann helfen, sich eine solche Gleichung vorzustellen, ohne dass man nach y auflösen muss.

$$\boxed{y' = f(x,\ y)}$$ – DGL 1. Ordnung

Durch jeden Punkt des Definitionsbereiches von $f(x, y)$ verläuft genau eine Lösungskurve.

Die Steigung m der Kurventangente kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden:

1. $m = y'(x_0)$

2. $m = f(x_0;\ y_0)$

$$m = y'(x_0) = f(x_0;\ y_0)$$

In einem Richtungsfeld kennzeichnet man die Richtung der Kurventangente in P durch eine kleine, in der Tangente liegende Strecke, die als Linien- oder Richtungselement bezeichnet wird.

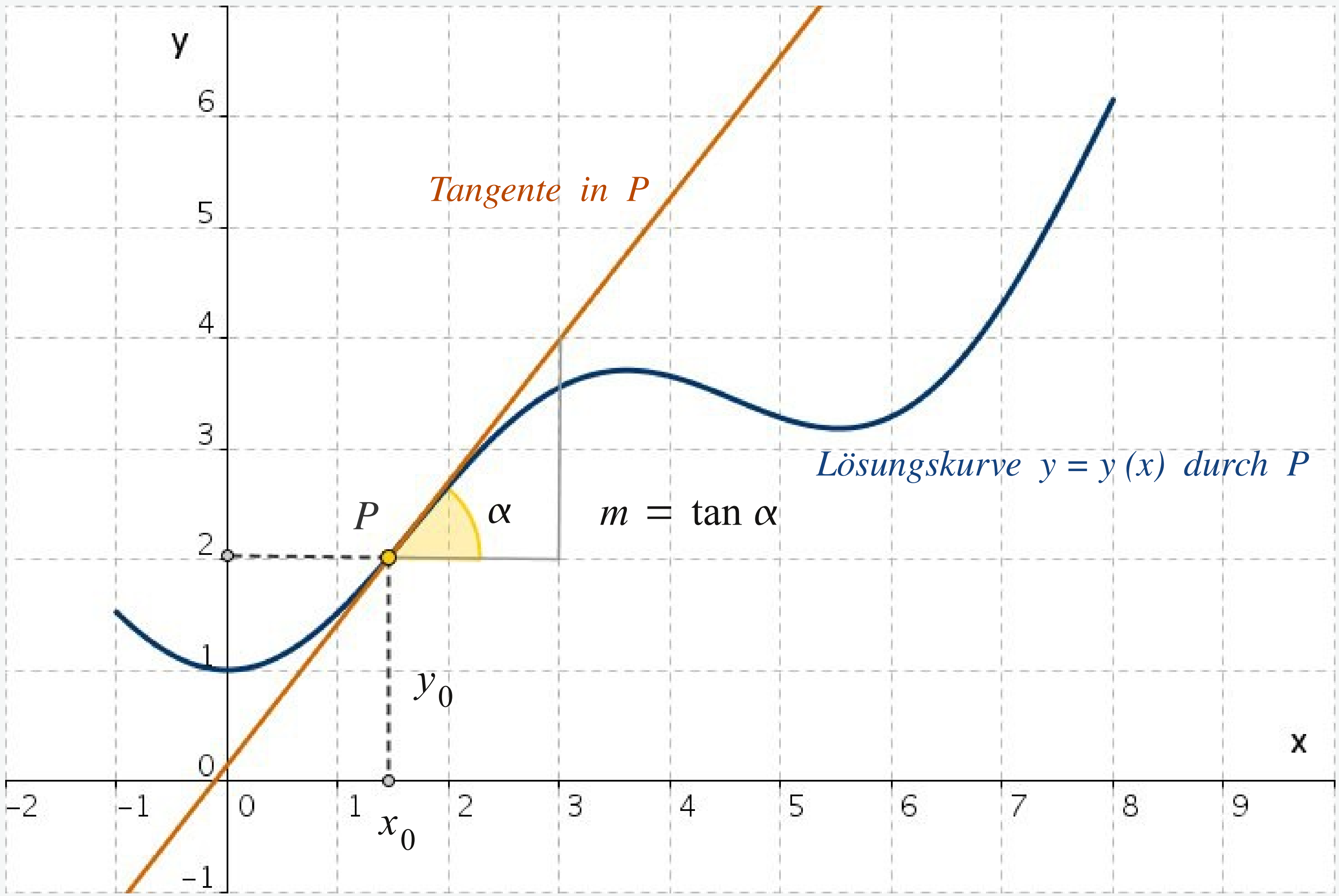


Abb. 1: Lösungskurve der DGL $y' = f(x, y)$ durch den Punkt P

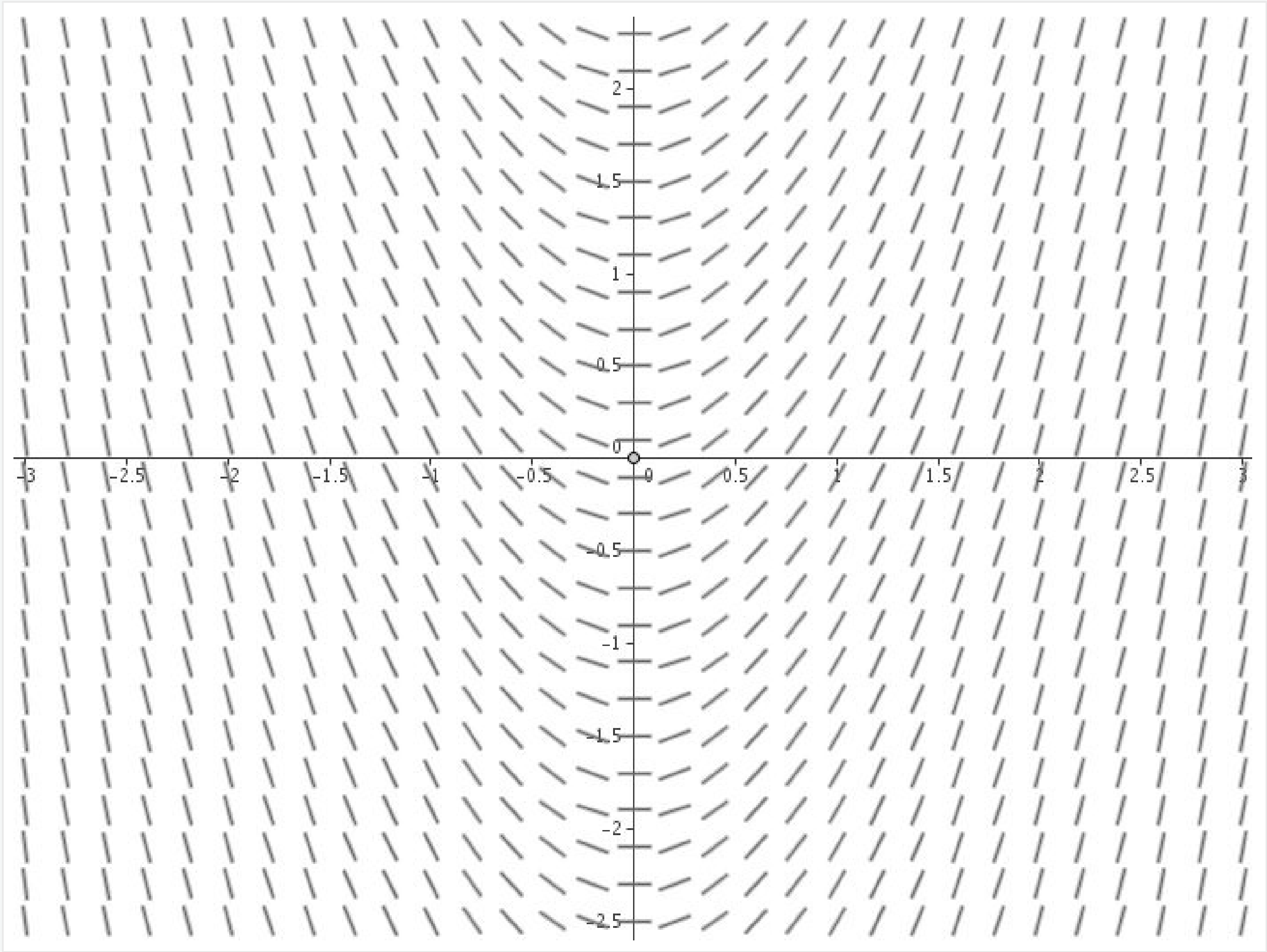
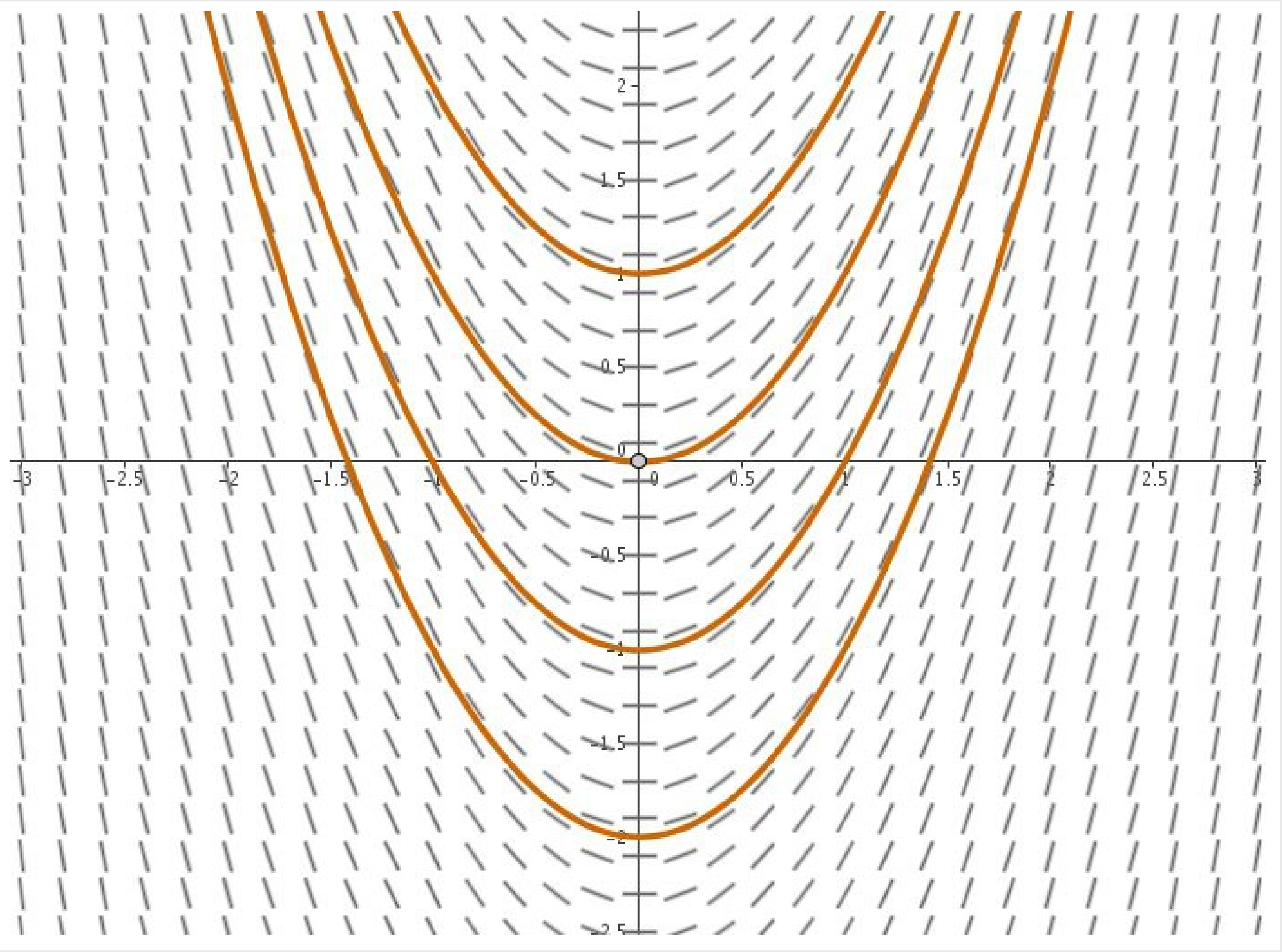


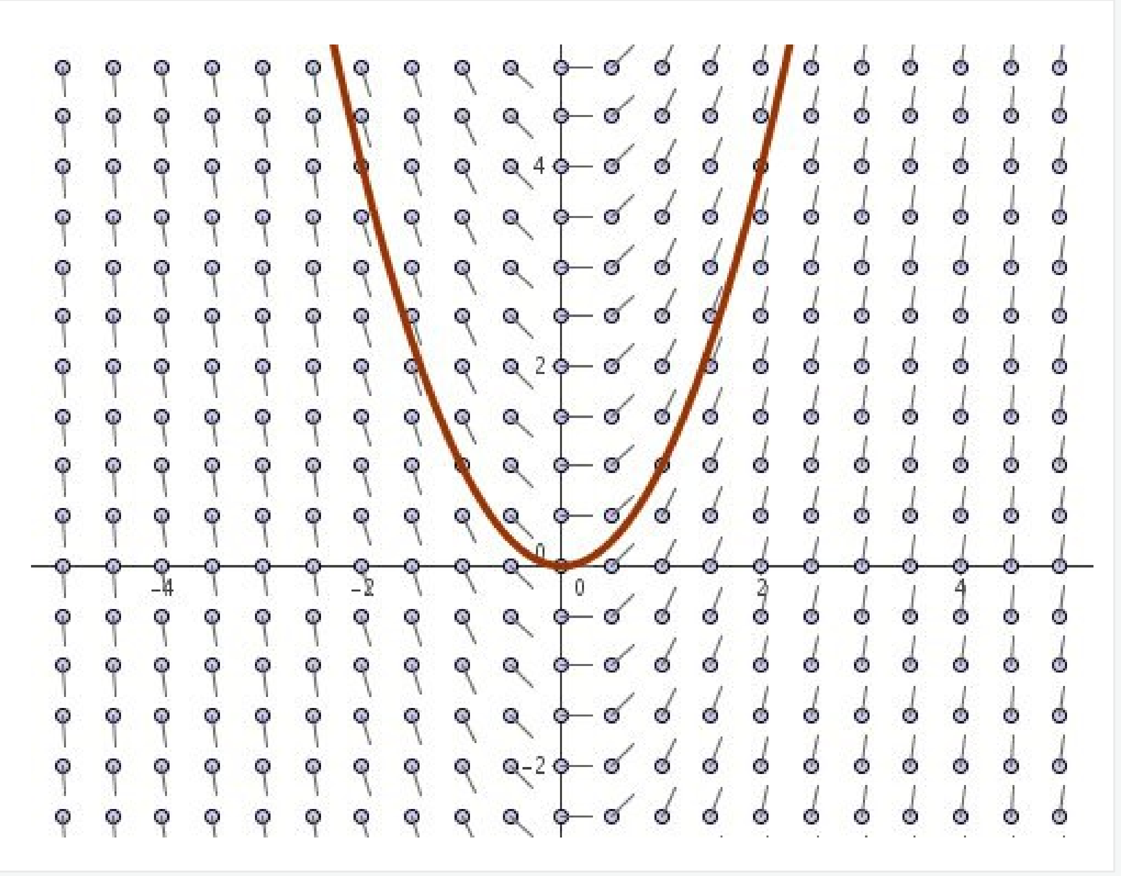
Abb. 2-1: Richtungsfeld einer DGL 1. Ordnung $y' = 2\,x$



http://mathplotter.lawrenceville.org/mathplotter/mathPage/slopeField.htm

Abb. 2-2: Richtungsfeld einer DGL 1. Ordnung $y' = 2x$ und vier Lösungskurven, die den Werten $C = -2, -1, 0, 1$ der Integrationskonstante entsprechen

$$y' = 2x, \qquad y = x^2 + C$$



http://www.mnwest.edu/fileadmin/static/website/dmatthews/Geogebra/SlopeFieldGenerator02.html

Abb. 2-3: Richtungsfeld einer DGL 1. Ordnung $y' = 2x$, Lösungskurve, die dem Wert $C = 0$ der Integrationskonstante entspricht

Bei der Konstruktion von Näherungskurven erweisen sich die sog. Isoklinen als sehr hilfreich und nützlich. Unter einer Isokline versteht man die Verbindungslinie aller Punkte, deren zugehörige Linienelemente in die gleiche Richtung zeigen, d.h. zueinander parallel sind. Die Isoklinen der DGL $y' = f(x, y)$ sind durch die folgende Gleichung definiert

$$f(x, y) = const$$

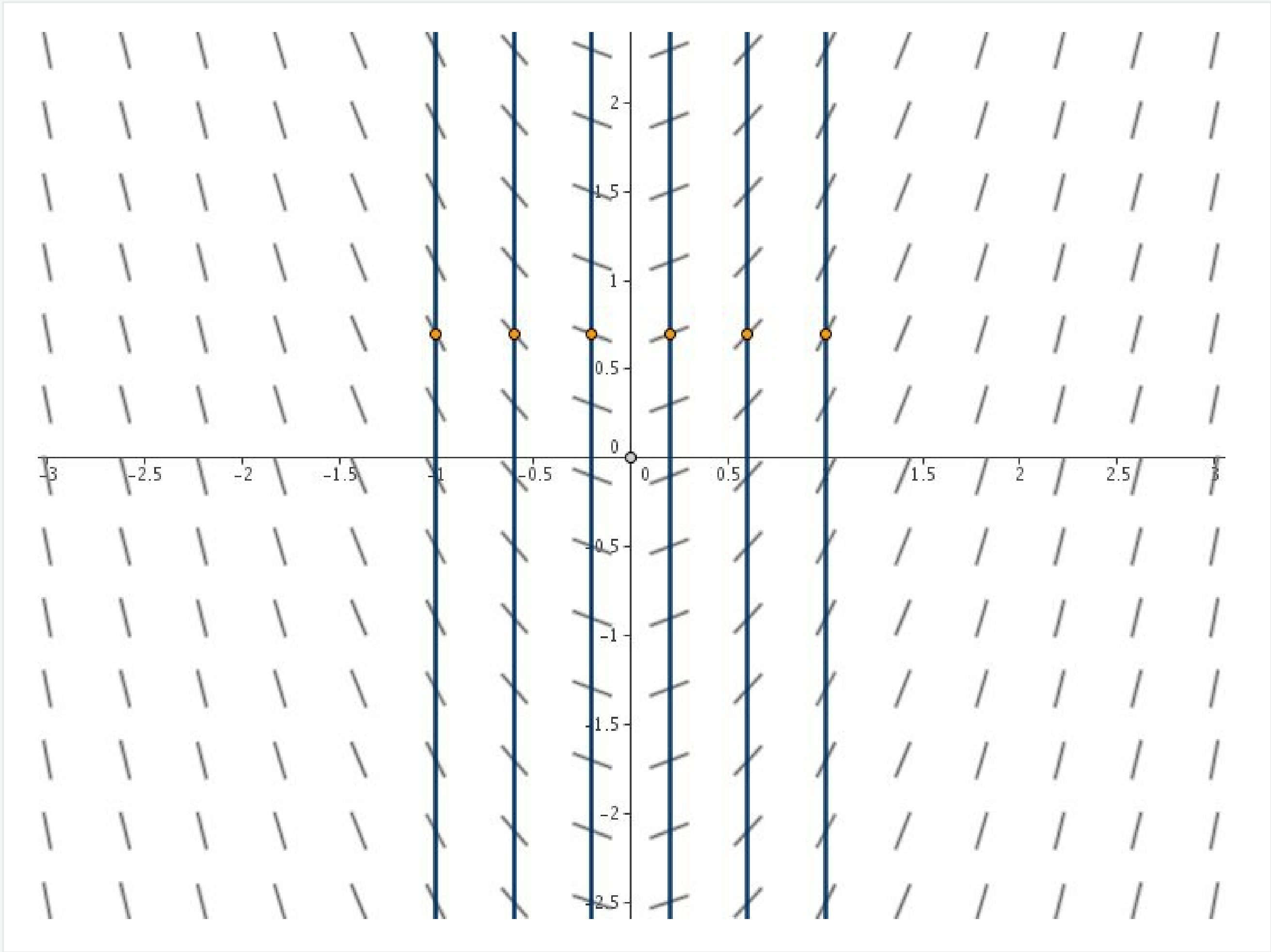


Abb. 2-4: Richtungsfeld und einige Isoklinen der DGL 1. Ordnung $y' = 2x$

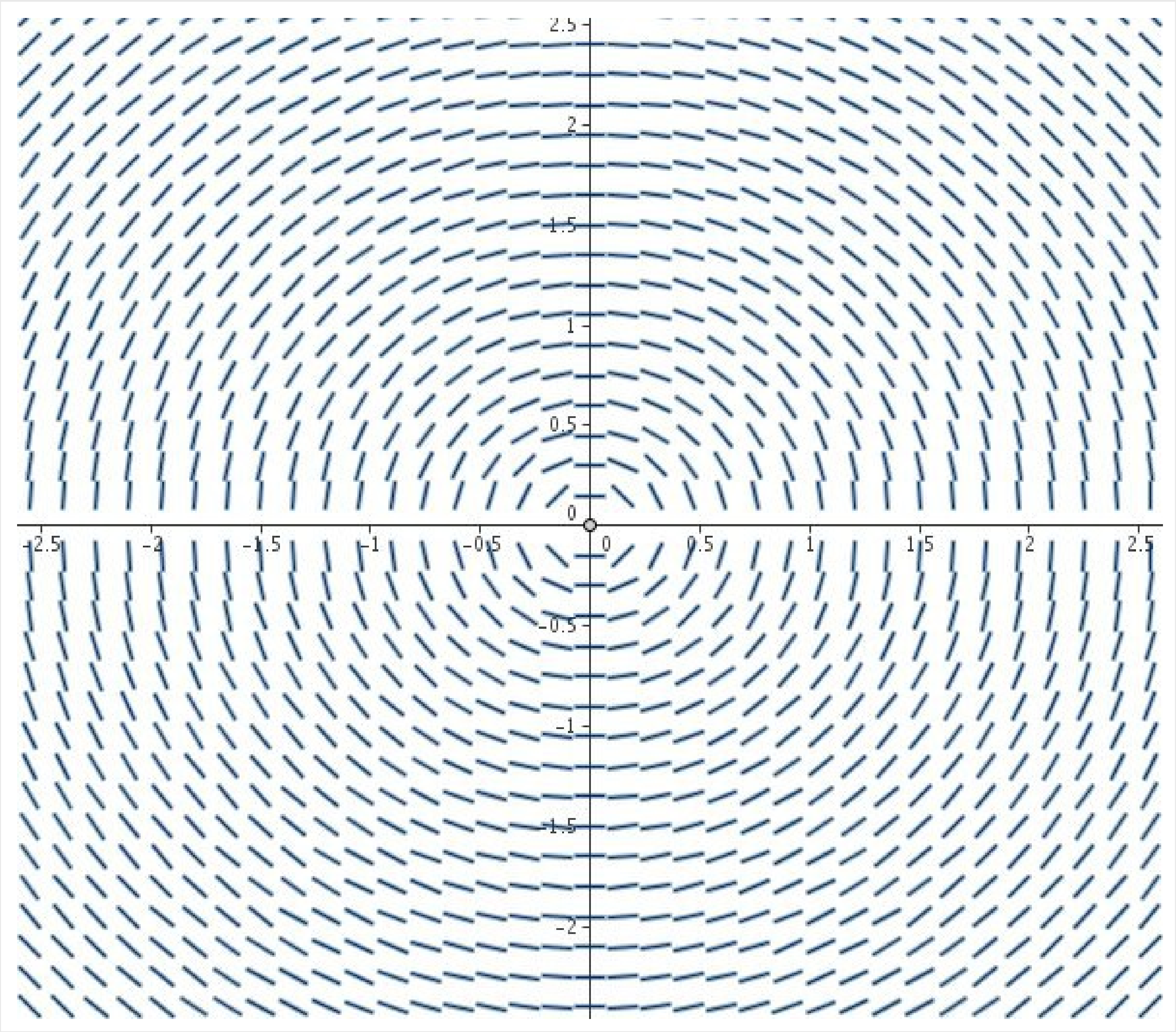


Abb. 3-1: Richtungsfeld der DGL 1. Ordnung $x + y\ y' = 0$, d.h. $y' = - x/y$

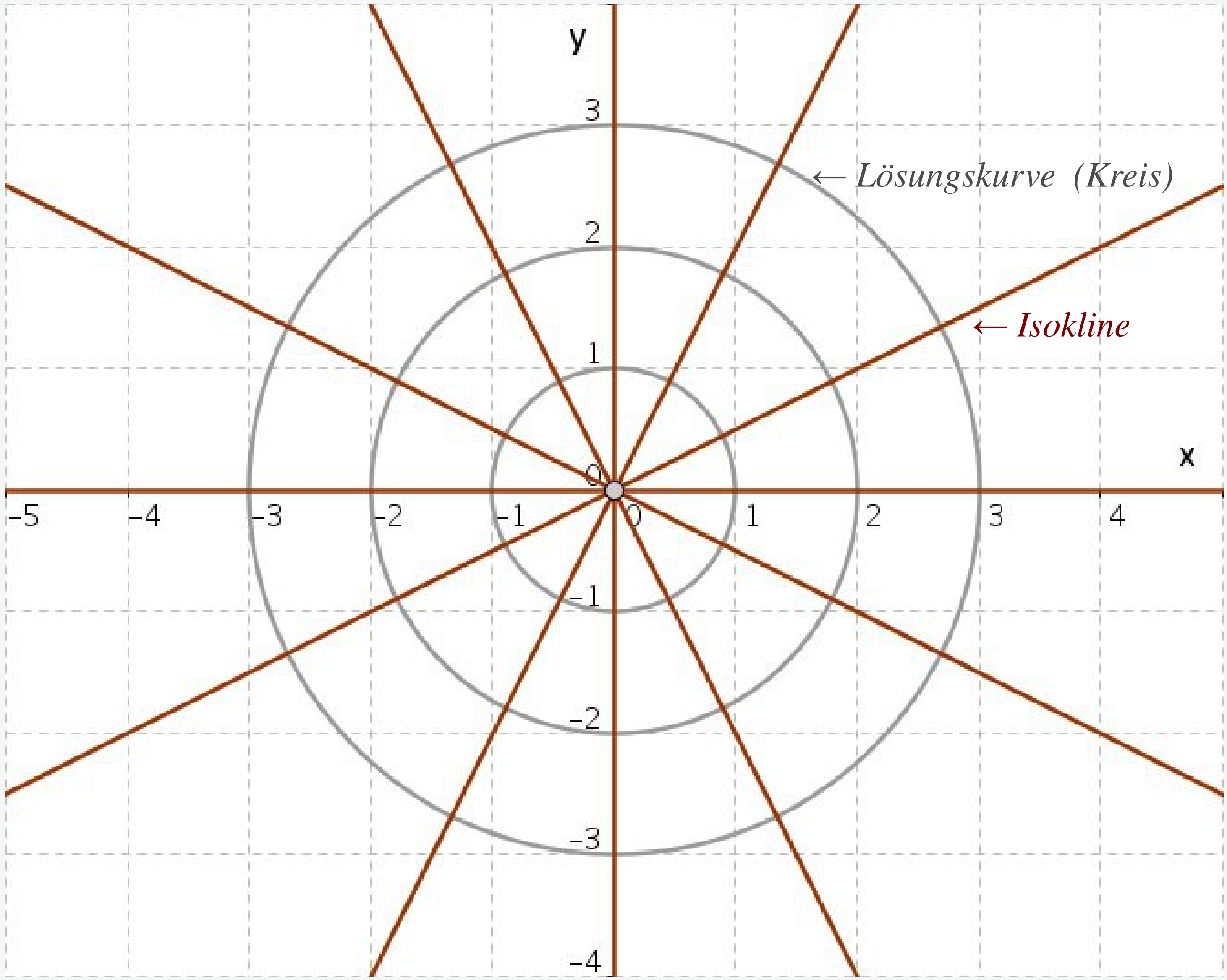


Abb. 3-2: Einige Lösungskurven und Isoklinen der DGL 1. Ordnung $x + y\,y' = 0$

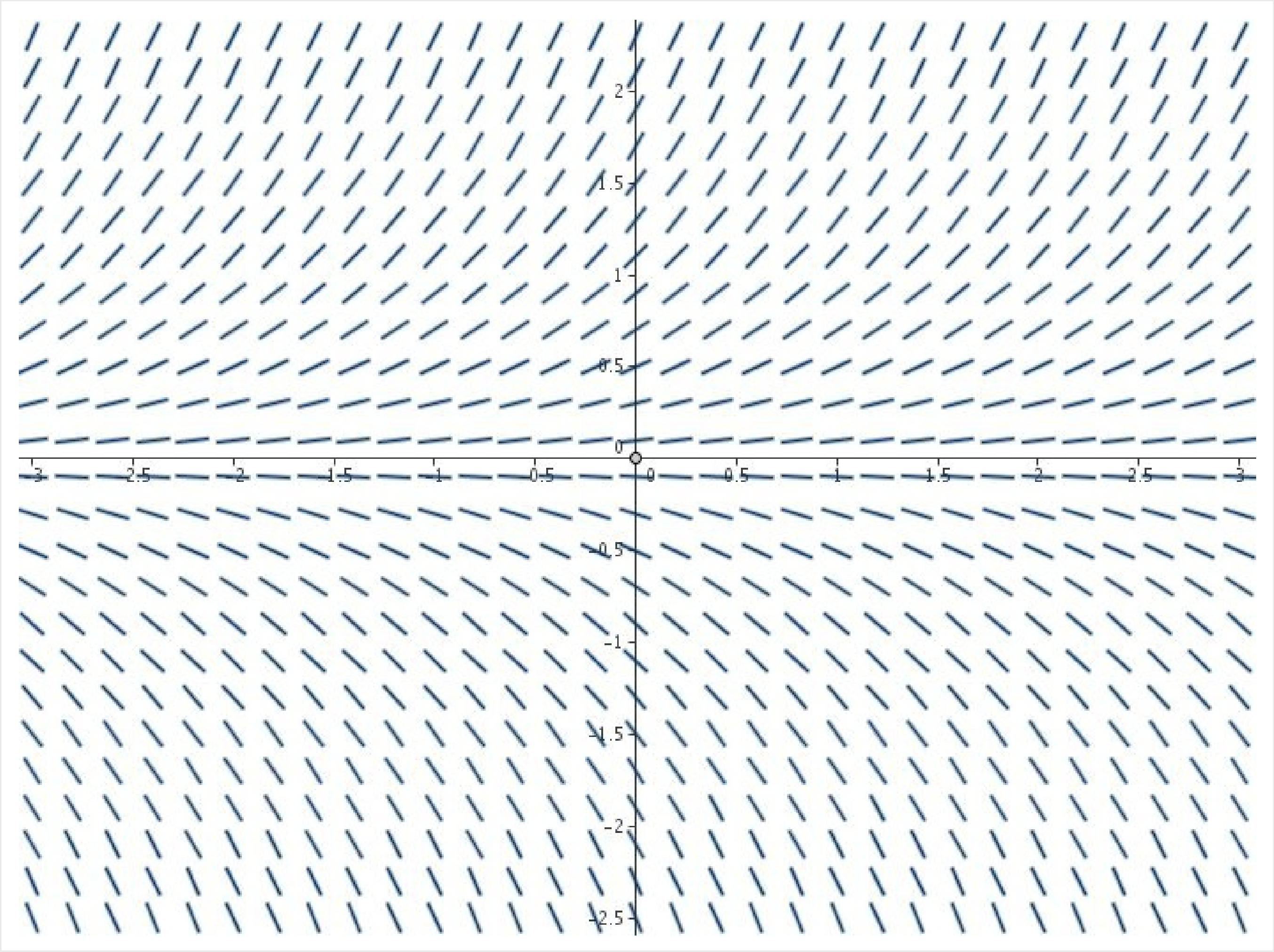


Abb. 4-1: Richtungsfeld der DGL 1. Ordnung $y' = y$

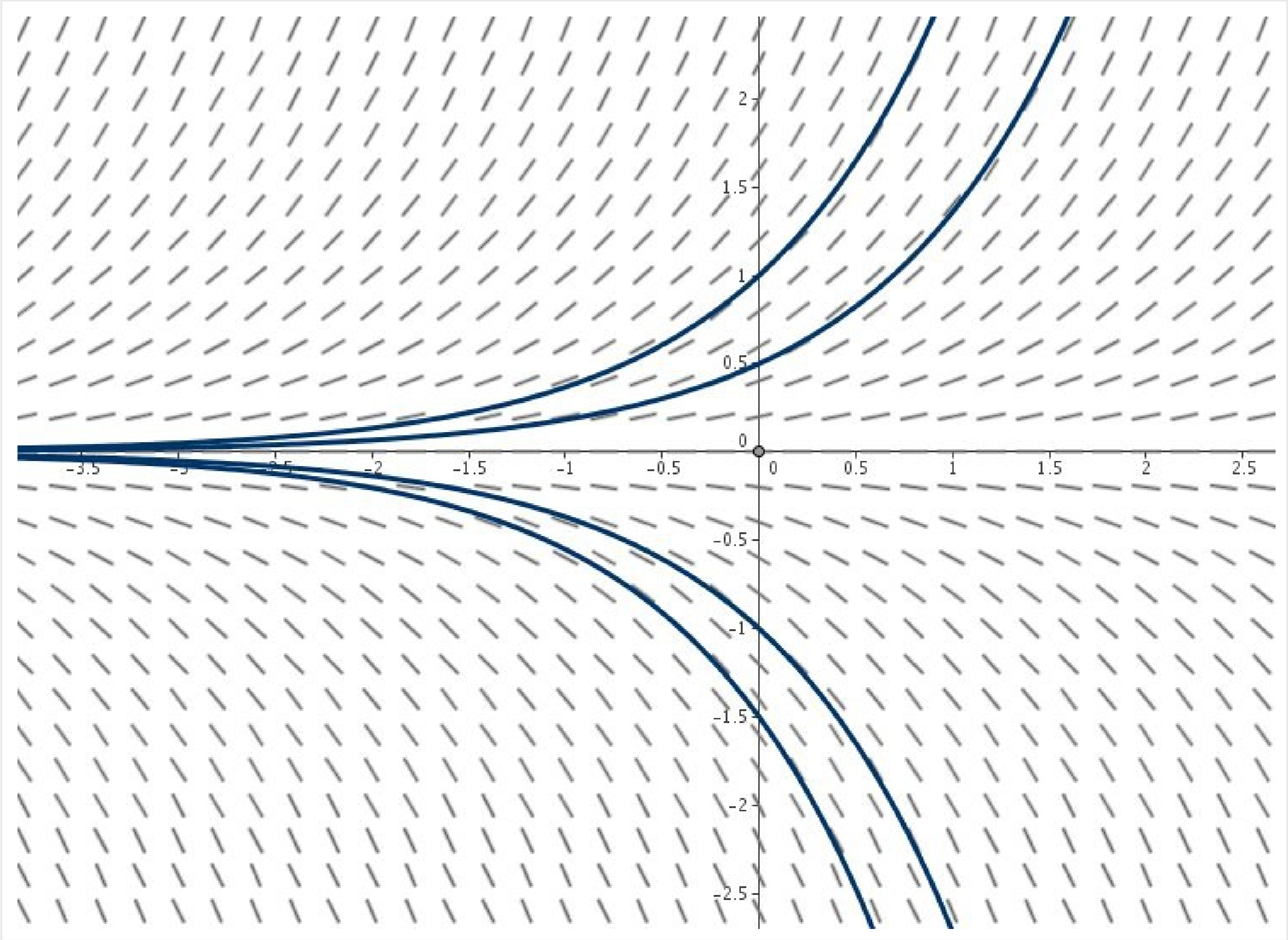


Abb. 4-2: Richtungsfeld der DGL 1. Ordnung $y' = y$, vier Lösungskurven

$$y' = y, \qquad y(x) = C\ e^{x}$$