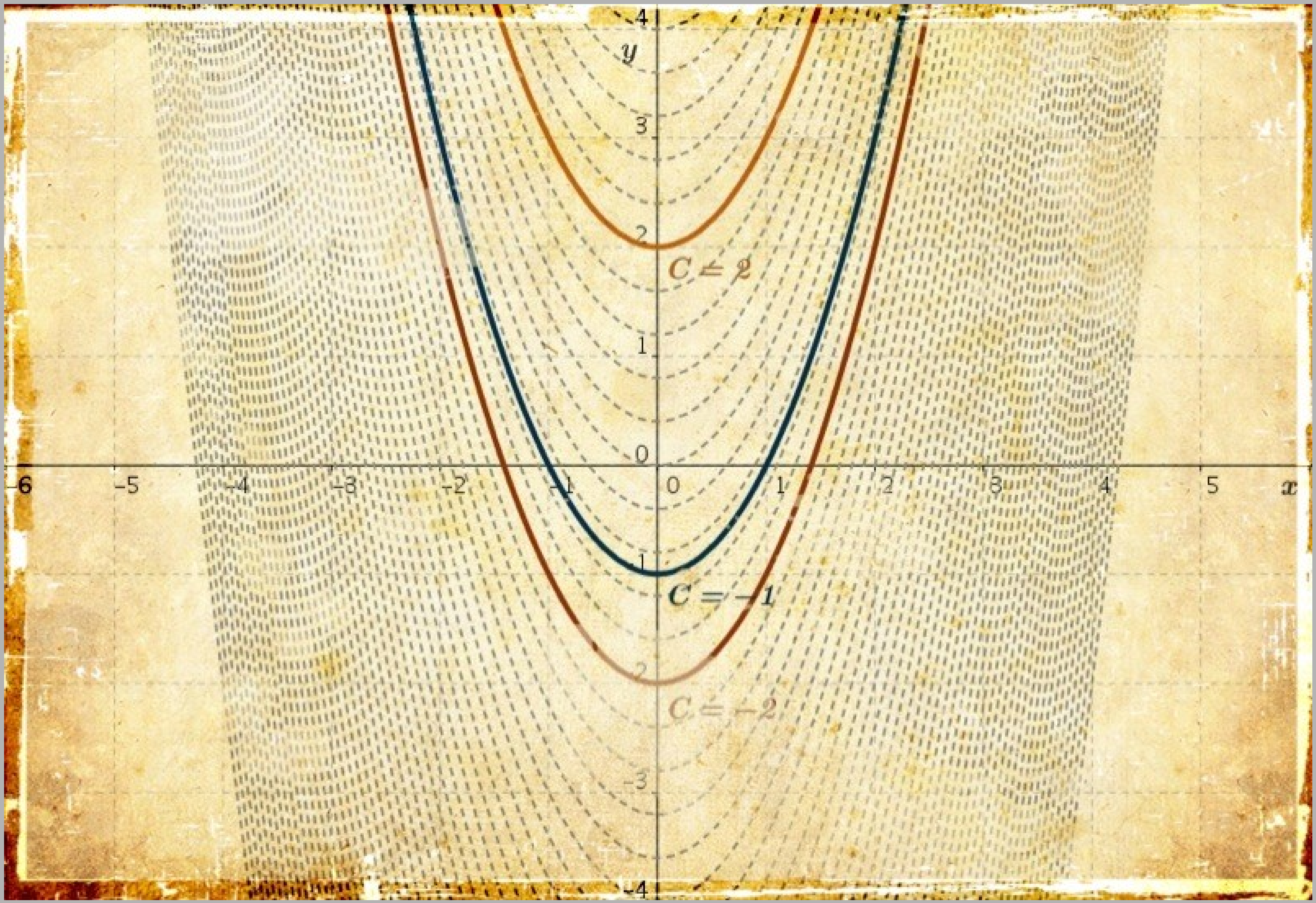
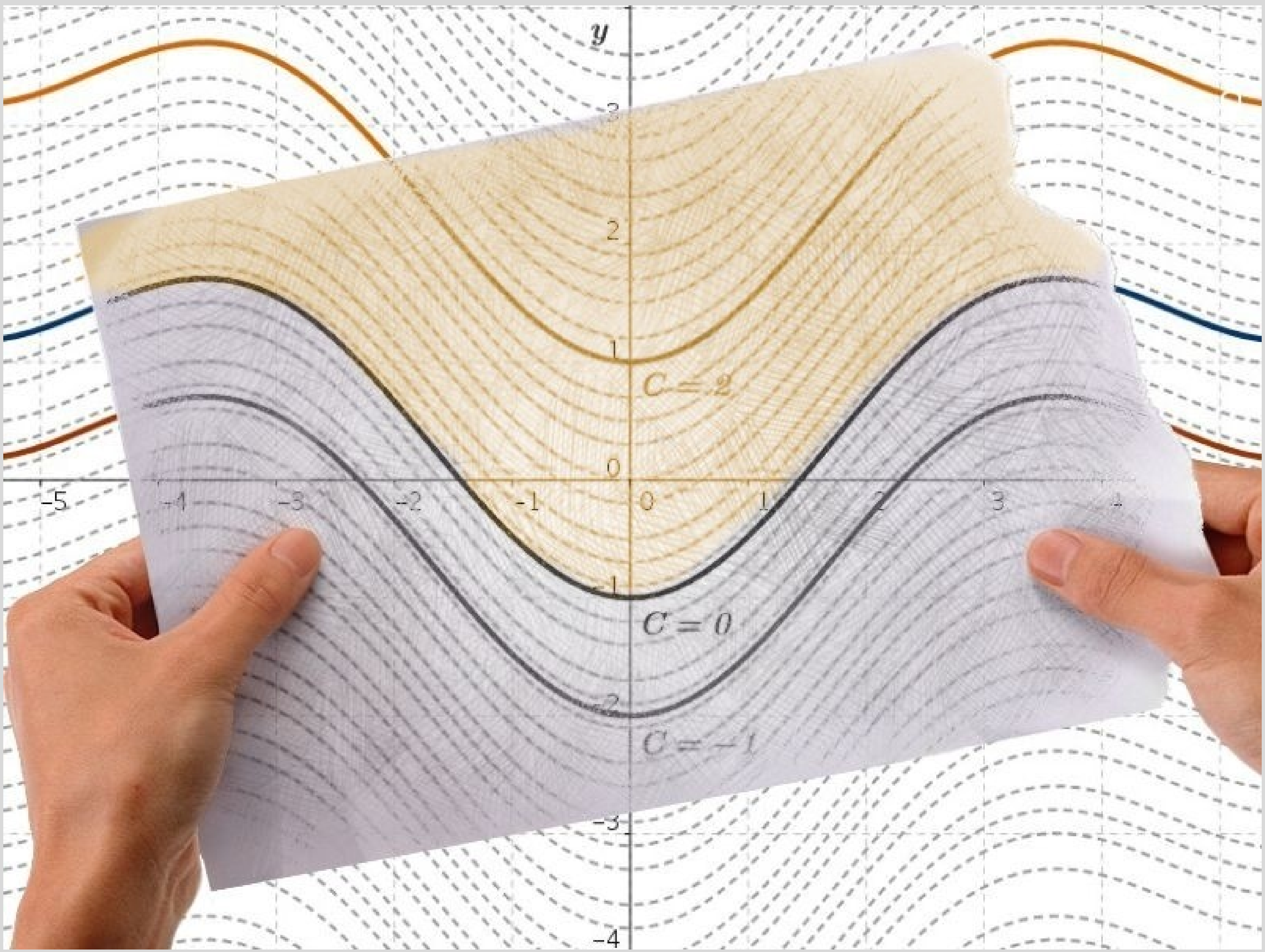
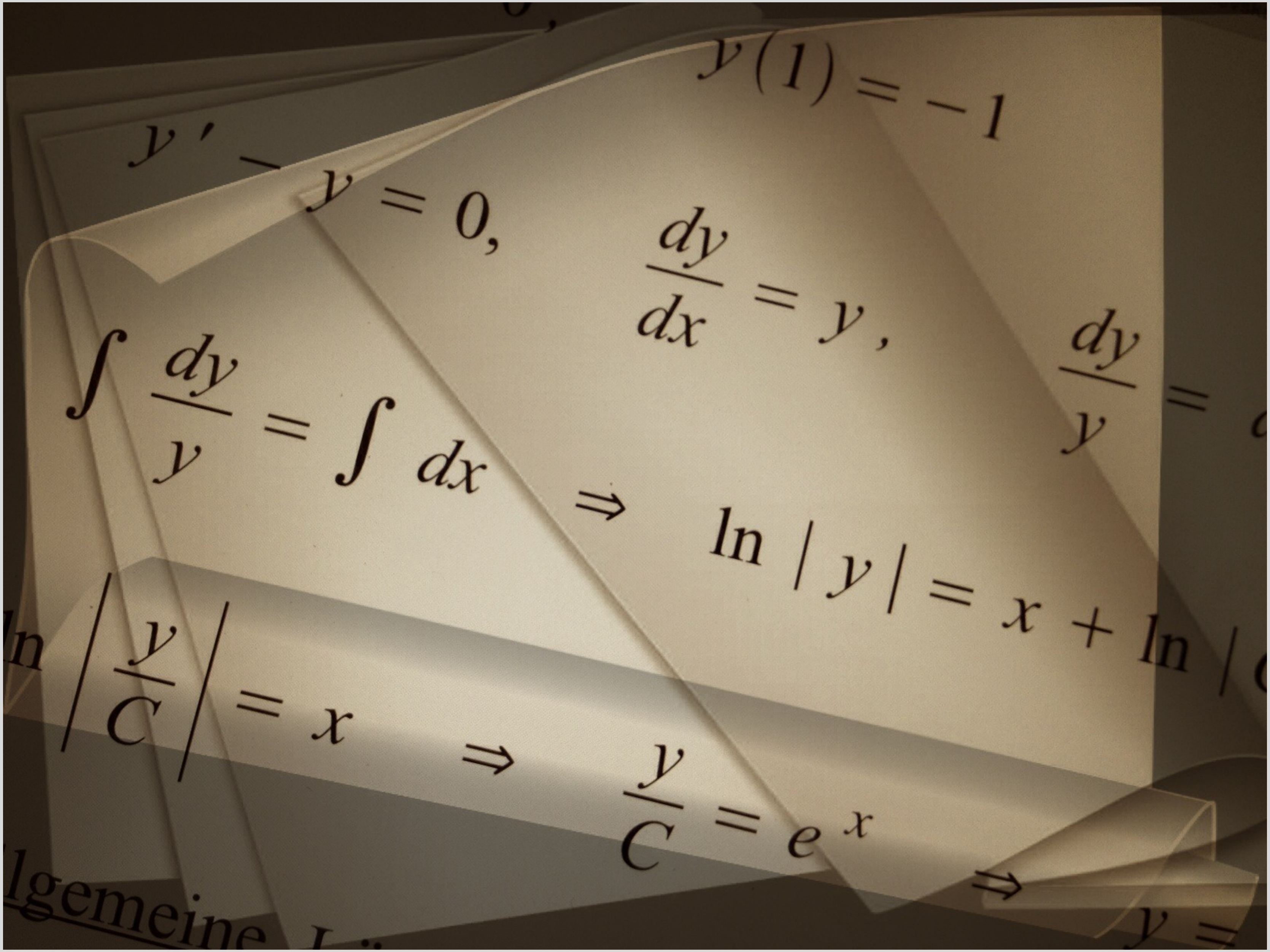



*Gewöhnliche Differentialgleichungen*

*Aufgaben, Teil 1*


y
3
2
1
C = 2
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
-1
C = 0
-2
C = −1
-3
-4


y(1) = −1
y′ − y = 0,
dy/dx = y,
dy/y =
∫ dy/y = ∫ dx ⇒ ln | y | = x + ln |
ln |y/C| = x ⇒ y/C = e^x ⇒ y =
llgemeine

Bestimmen Sie allgemeine und spezielle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

Aufgabe 1: $y' = 2x\,, \qquad 1)\ y(x_0) = y_0\,, \qquad 2)\ y(0) = -2$

Aufgabe 2: $y' - y = 0\,, \qquad y(1) = -1$

Aufgabe 3:

Die Größe einer biologischen Population (z.B. die Anzahl von Bakterien oder von Fischen) wird als $x$ bezeichnet. Die Zuwachsrate ist proportional zur Zahl der gegenwärtig vorhandenen Individuen (die Annahme ist erfüllt, sofern genügend Nahrung da ist):

$$\frac{dx}{dt} = k\,x\,, \qquad x\,,\ k > 0, \qquad x(t_0) = x_0$$

Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung.

## Aufgabe 4:

Zur Zeit $t \geq 0$ seien $n\,(t)$ Atome einer radioaktiven Substanz vorhanden. Die Zahl der Atome, die in einer kleinen Zeitspanne $dt$ zerfällt, ist $n(t)$ und der Zeitspanne $dt$ proportional, d.h. die Änderung von $n(t)$ ist durch $dn = -\lambda\, n\,(t)\, dt$ gegeben. Die Konstante $\lambda > 0$ ist die Zerfallskonstante. Daraus ergibt sich die Differenzialgleichung des radioaktiven Zerfalls, deren Lösung zu bestimmen ist:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda\, n$$

Die Gleichung $y' = 2x$ ist eine einfache Differentialgleichung. Die Änderungsrate, d.h. die Ableitung der unbekannten Funktion $y = y\,(x)$ ist eine lineare Funktion von $x$. Im Folgenden werden die allgemeine und spezielle Lösungen dieser Gleichung bestimmt.

$$y\,' = 2\,x \qquad \text{oder} \qquad \frac{dy}{dx} = 2\,x$$

Man kann die Lösung die Differentialgleichung erraten. Ist die Ableitung einer Funktion gleich $2\,x$, so ist die Funktion eine quadratische Funktion $x^2 + C$.

$$\frac{dy}{dx} = 2\,x\,, \qquad y\,(x) = x^2 + C \qquad (C \in \mathbb{R}) \quad \left(\frac{d}{dx}\,(x^2 + C) = 2\,x\right)$$

Die allgemeine Lösung ist damit nicht nur eine Funktion, sondern sie besteht aus unendlich vielen Funktionen, die sich durch eine Konstante voneinander unterscheiden. Die Lösung der Gleichung kann auch durch Integration bestimmt werden:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,x\,, \qquad dy = 2\,x\;dx\,, \qquad \int dy = 2\int x\;dx$$

$$y + C_1 = x^2 + C_2\,, \qquad y = x^2 + C\,, \qquad C = C_2 - C_1$$

Statt zwei Integrationskonstanten schreibt man eine Konstante $C$.

Allgemeine Lösung: $y_A = x^2 + C$

Die Lösungsfunktionen repräsentieren eine Schar von Normalparabeln, die nach oben geöffnet sind. Durch jeden Punkt der *x,y*-Ebene geht genau eine Lösungskurve.

Jetzt bestimmen wir die speziellen Lösungen, die den Anfangsbedingungen entsprechen:

$$1)\ y(x_0) = y_0: \quad y_0 = x_0^2 + C, \qquad C = y_0 - x_0^2, \qquad y_{S1} = x^2 + y_0 - x_0^2$$

$$2)\ y(0) = -2: \quad y = x^2 + C, \qquad -2 = 0 + C, \qquad C = -2, \qquad y_{S2} = x^2 - 2$$

Spezielle Lösungen:

$$1)\ y(x_0) = y_0: \quad y_{S1} = x^2 + y_0 - x_0^2$$

$$2)\ y(0) = -2: \quad y_{S2} = x^2 - 2$$

*Abbildung 1L zeigt* Spezielle Lösungen der Differentialgleichung $y' = 2\,x$:

$$y(0) = -2, \qquad C = -2, \qquad y(x) = x^2 - 2$$

$$y(0) = -1, \qquad C = -1, \qquad y(x) = x^2 - 1$$

$$y(0) = 2, \qquad C = 2, \qquad y(x) = x^2 + 2$$

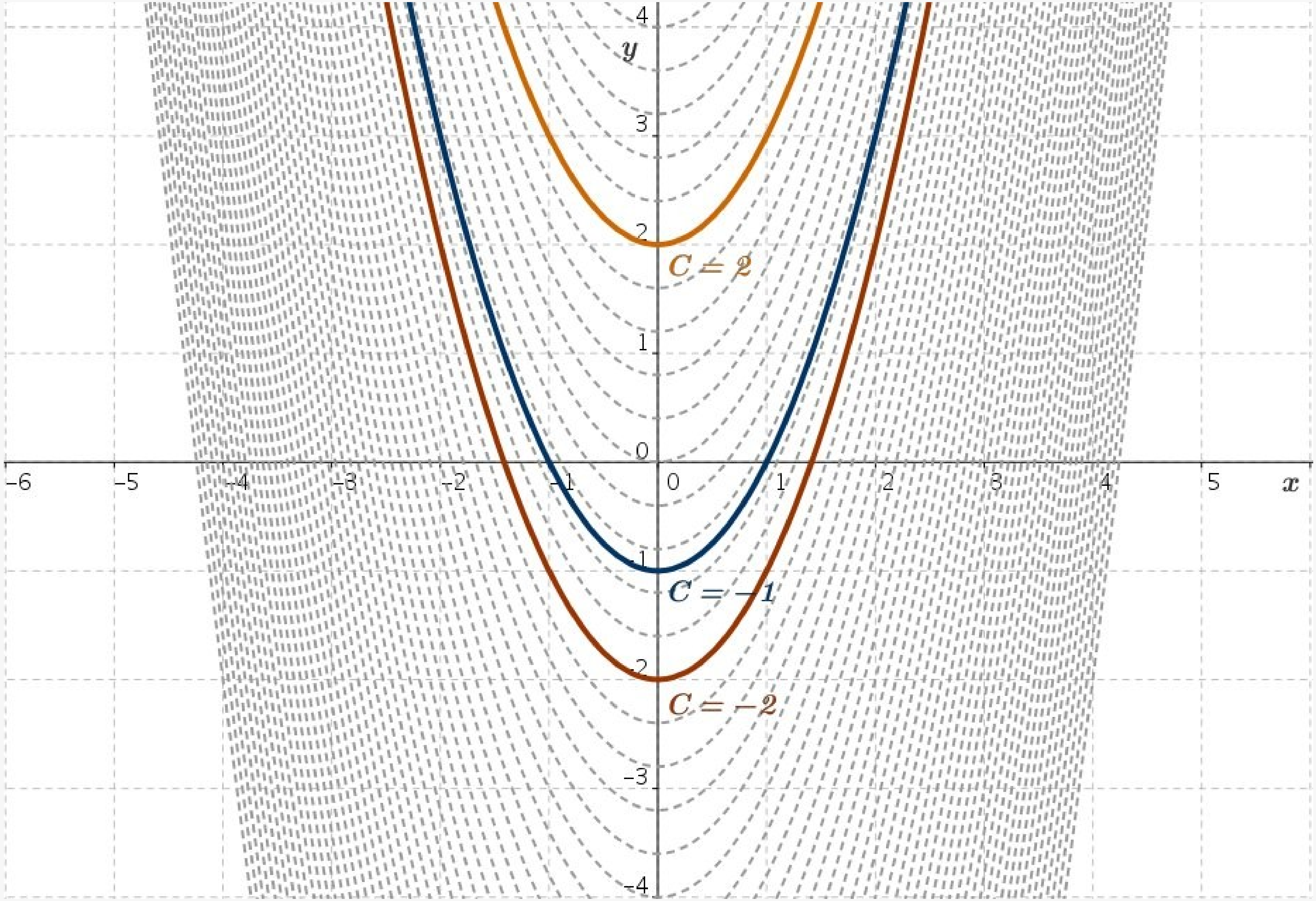



*Abb. 1L: Integralkurven der DGL y' = 2 x, die den Anfangsbedingungen y (0) = -2, -1 und 2 entsprechen*

$$y' - y = 0, \qquad y' = y, \qquad \frac{dy}{dx} = y$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung kann man erraten. Die Gleichung $y' = y$ sagt uns, dass die Ableitung der Funktion $y = y(x)$ mit der Funktion übereinstimmt. Dies ist bei der Exponentialfunktion der Fall. Deshalb stellt $y = exp(x)$ eine mögliche Lösung dar.

$$y' = y, \qquad y = e^x, \qquad \left(e^x\right)' = e^x$$

Auch bei $y = C\, exp(x)$ stimmen Funktion und Ableitung überein:

$$y = C\, e^x, \qquad \left(C\, e^x\right)' = C\, e^x$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = C\, e^x$

Jetzt bestimmen wir die spezielle Lösung. Die Anfangswertaufgabe ist:

$$y(1) = -1, \qquad y(1) = C\, e = -1, \qquad C = -\frac{1}{e} = -\, e^{-1}$$

Spezielle Lösung: $\quad y = -\, e^{x-1}$

Durch analytisches Lösen der Differentialgleichung kann man zeigen, dass die erratene Lösung richtig ist.

$$y' - y = 0\,, \qquad y(1) = -1$$

$$y' - y = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = y\,, \qquad \frac{dy}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx\,, \qquad \ln|y| = x + \ln|C|$$

Hier schreibt man Integrationskonstante in der Form $\ln|C|$. Dann ist es einfacher, $y\,(x)$ zu bestimmen.

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = x\,, \qquad \frac{y}{C} = e^{x} \qquad y = C\,e^{x}$$

Allgemeine Lösung: $\quad y = C\,e^{x}$

$$y(1) = -1, \qquad -1 = C\,e\,, \qquad C = -\frac{1}{e} = -e^{-1}$$

Spezielle Lösung: $\quad y = -e^{-1}\,e^{x} = -e^{x-1}$

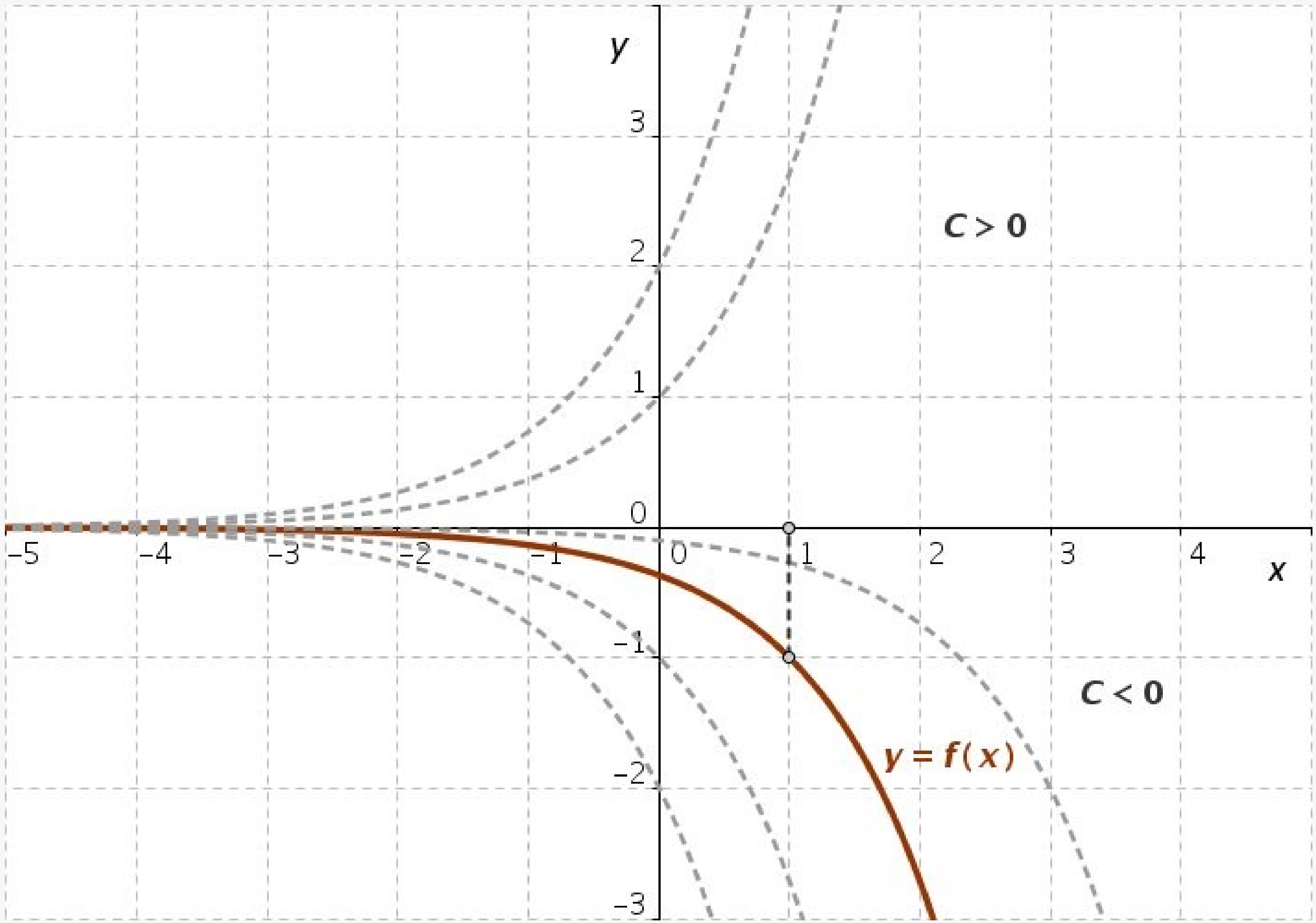
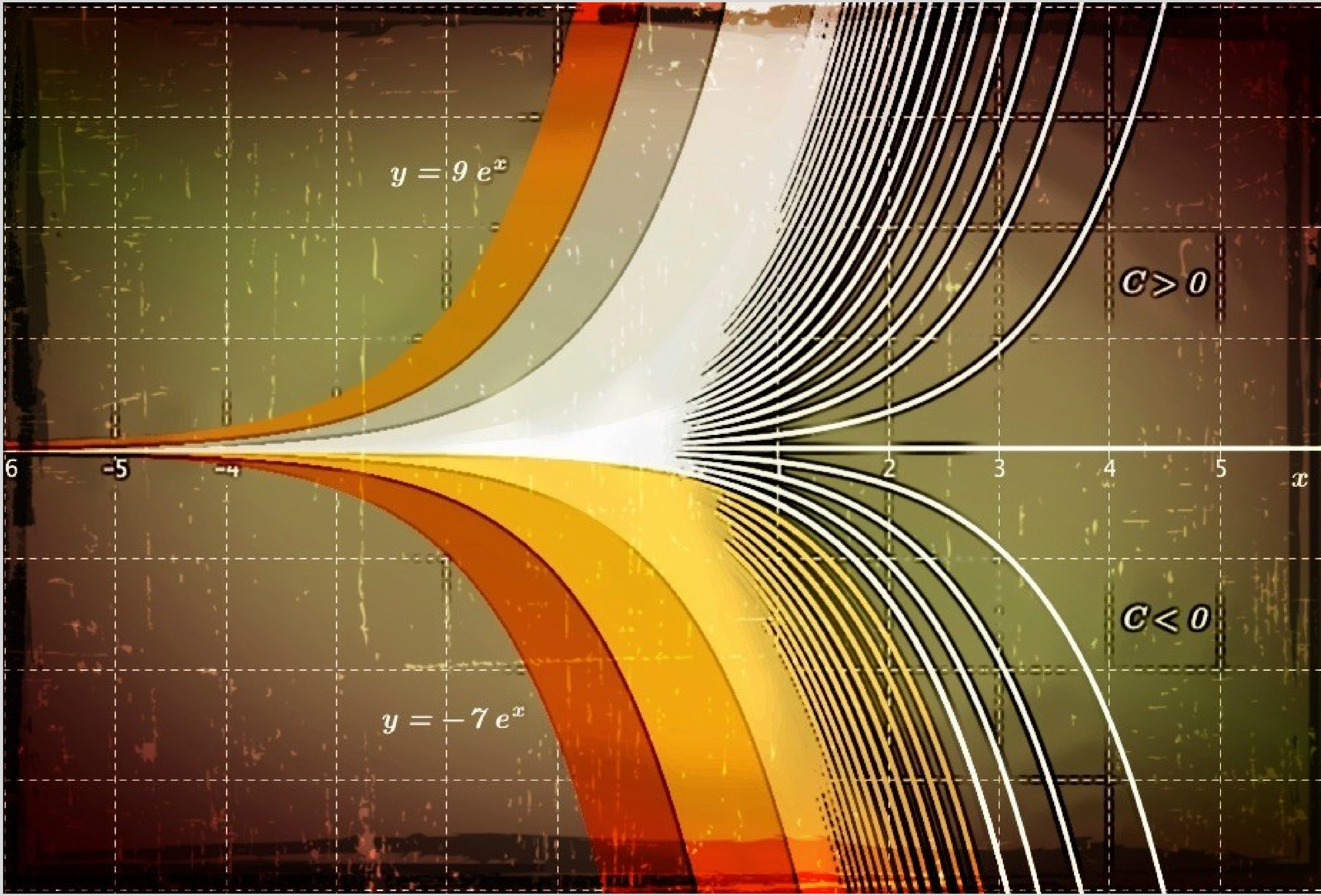



*Abb. 2L: Integralkurven der DGL $y' = y$. Die rote Kurve entspricht der speziellen Lösung der Gleichung mit $y(1) = -1$*


$y = 9\,e^x$
$C > 0$
-6
-5
-4
2
3
4
5
6
$x$
$C < 0$
$y = -7\,e^x$

Die Annahme der Aufgabe wird durch folgende Differentialgleichung der normalen Vermehrung ausgedrückt:

$$\frac{dx}{dt} = k\,x\,, \qquad x\,,\; k > 0, \qquad x\left(t_0\right) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt} = k\,x\,, \qquad x\,,\; k > 0, \qquad x(t_0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt} = k\,x\,, \qquad \frac{dx}{x} = k\,dt\,, \qquad \int \frac{dx}{x} = k \int dt \qquad \Rightarrow$$

$$\ln|x| = k\,t + \ln|C|\,, \qquad \ln|x| - \ln|C| = k\,t$$

$$\ln\left|\frac{x}{C}\right| = k\,t\,, \qquad \frac{x}{C} = e^{k\,t}\,, \qquad x = C\,e^{k\,t}$$

Allgemeine Lösung: $\quad x = C\,e^{k\,t}$

Um die spezielle Lösung zu finden, müssen wir die Integrationskonstante so bestimmen, dass die Anfangsbedingung erfüllt ist.

$$x_0 = C\,e^{k\,t_0}\,, \qquad C = \frac{x_0}{e^{k\,t_0}} = x_0\,e^{-k\,t_0}$$

$$x = C\,e^{k\,t} = x_0\,e^{-k\,t_0} \cdot e^{k\,t} = x_0\,e^{k\,(t - t_0)}$$

Spezielle Lösung: $\quad x = x_0\,e^{k\,(t - t_0)}$

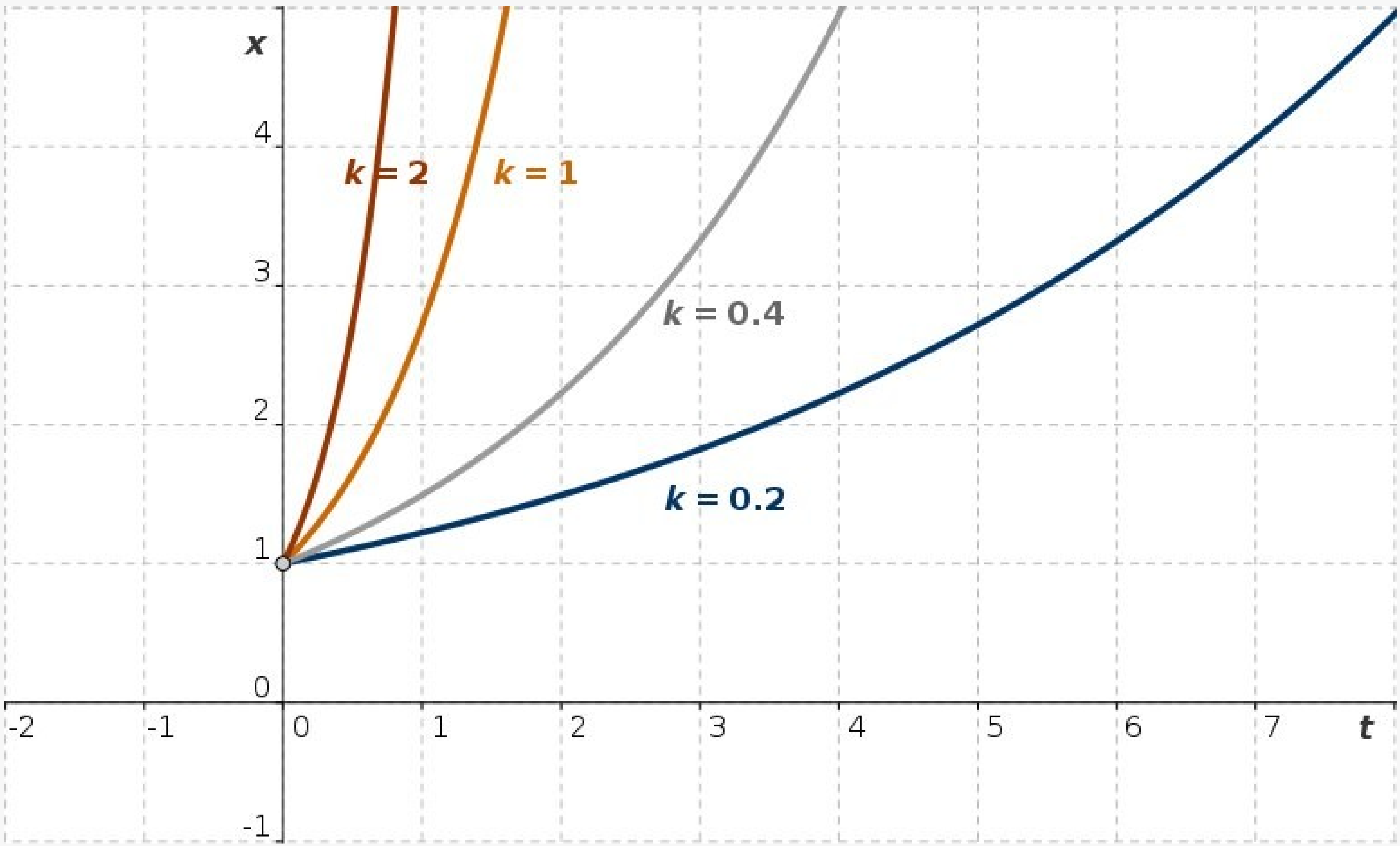



*Abb. L3: Einige Integralkurven zur Aufgabe*

Spezielle Lösung: $x = x_0 \, e^{k\,(t \,-\, t_0)}$

$t_0 = 0, \quad x_0 = 1 \qquad : x = e^{k\,t}$

Zur Zeit $t \geq 0$ seien $n\,(t)$ Atome einer radioaktiven Substanz vorhanden. Die Zahl $dn$, die in einer kleinen Zeitspanne $dt$ zerfällt, ist der gerade vorhandenen Zahl $n\,(t)$ und der Zeitspanne $dt$ proportional, d.h. die Änderung von $n(t)$ ist gegeben durch

$$d\,n = -\lambda\, n\,(t)\, dt \quad .$$

$\lambda > 0$ ist die Zerfallskonstante. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls:

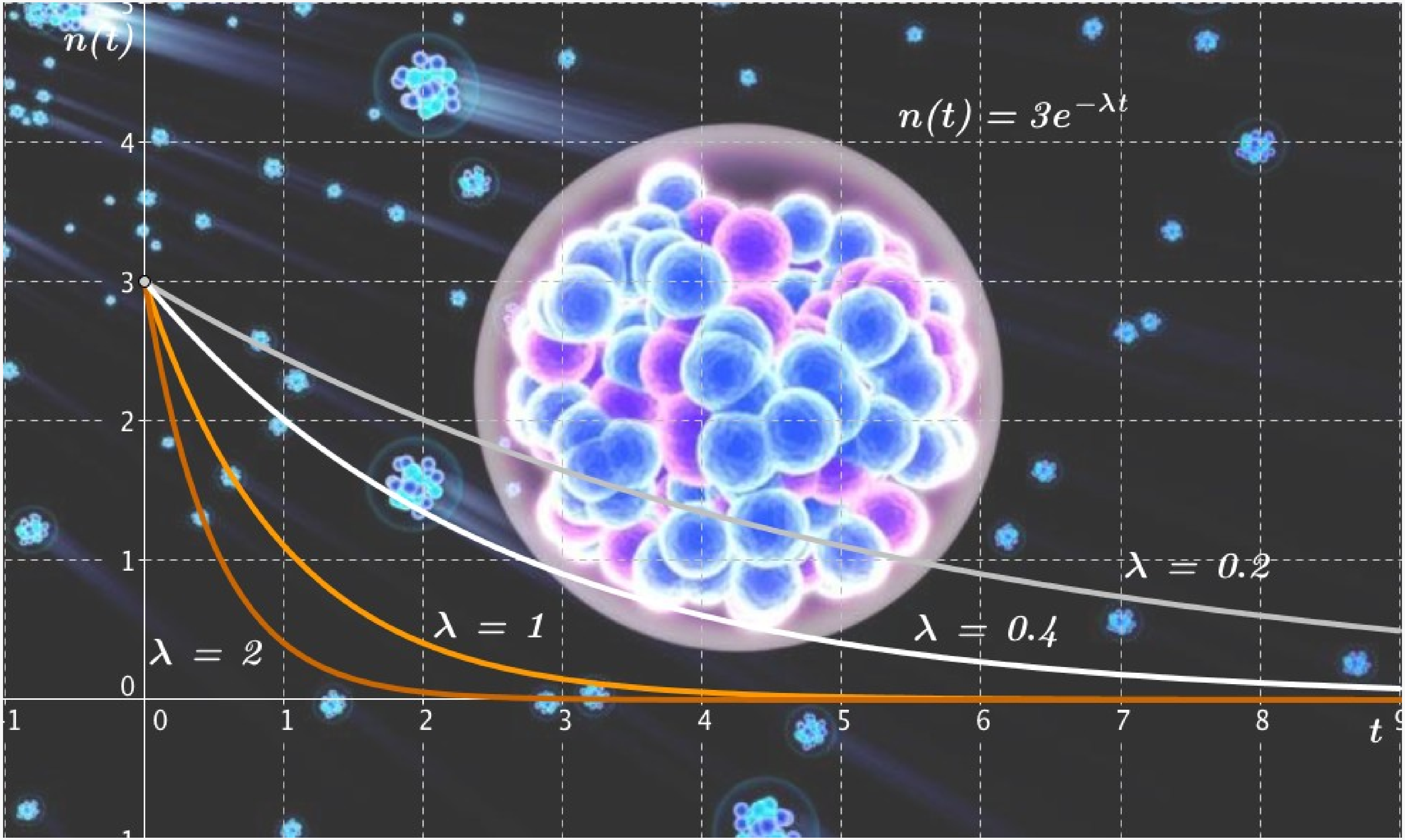
$$\frac{dn}{dt} = -\lambda\, n \qquad \Leftrightarrow \qquad n\,(t) = C\, e^{-\lambda\, t} \qquad n\,(t=0) = n_0$$

$$n\,(t) = n_0\; e^{-\lambda\, t}, \qquad t \geqslant 0$$

Die radioaktive Substanz zerfällt exponentiell. Das Zerfallsgesetz ist empirisch gut bestätigt. Die reziproke Zerfallskonstante gibt die mittlere Lebensdauer der betrachteten Atomkerne an. Anschaulicher als diese Größe ist die Zeit, die vergeht, bis die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atome auf die Hälfte abgenommen hat:

$$\frac{n_0}{2} = n_0\; e^{-\lambda\, \tau} \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda\, \tau} = 2, \quad \tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Diese Zeit ist unabhängig von $n\,(t)$.




*http://images.iop.org/objects/phw/news/14/4/11/element1.jpg*

*Abb. L4: Einige Integralkurven zur Aufgabe*

$$n(t) = 3\ e^{-\lambda t}, \qquad t \geqslant 0, \qquad n_0 = 3, \qquad t_0 = 0$$

Bestimmen Sie allgemeine und spezielle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

Aufgabe 5: $y' = \sin x + \frac{x}{8}, \qquad y(0) = -2$

Aufgabe 6: $a)\ e^{y'} = 1, \qquad b)\ e^{y'} = x$

Aufgabe 7: $s'' = -g, \qquad s = s(t)$

$s(0) = s_0, \qquad v(0) = v_0$

Aufgabe 8: $y''' = \sin x + \cos x$

Aufgabe 9: $x\, y^{(5)} = y^{(4)}$

$$y' = \sin x + \frac{x}{8}, \qquad y(0) = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + \frac{x}{8}, \qquad dy = \sin x \, dx + \frac{x}{8} \, dx \quad \Rightarrow$$

$$\int dy = \int \sin x \, dx + \frac{1}{8} \int x \, dx = -\cos x + \frac{x^2}{16} + C$$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = -\cos x + \dfrac{x^2}{16} + C$

$$y(0) = -2$$

$$y(0) = -\cos 0 + C = -1 + C = -2 \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

Spezielle Lösung: $\quad y(x) = -\cos x + \dfrac{x^2}{16} - 1$

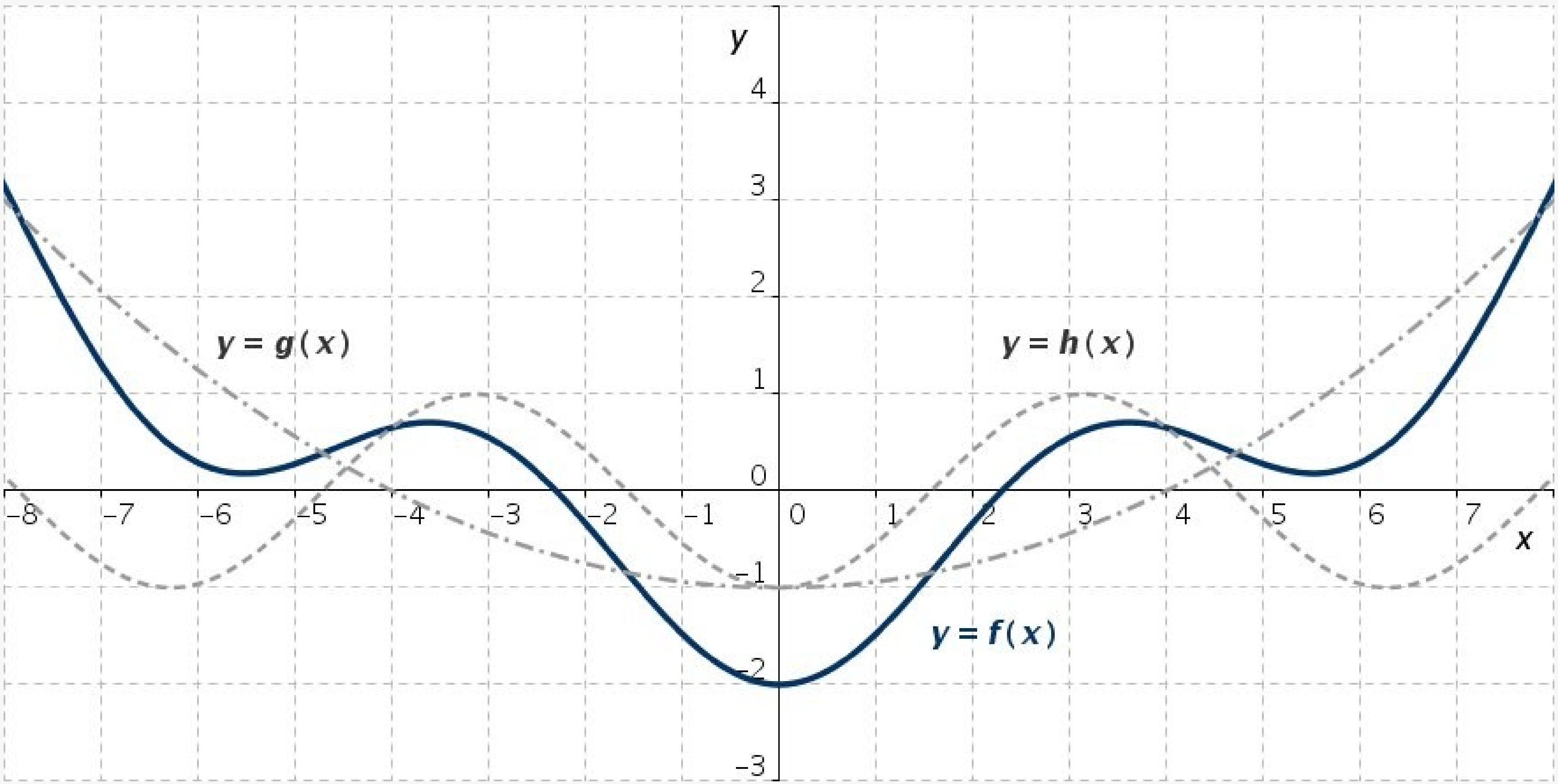



*Abb. 5L-1: Die Integralkurve der DGL y' = sin x + x/8 (blau), die Funktion y = f (x), sowie die Funktionen y = g (x) und y = h (x)*

$$f(x) = \frac{x^2}{16} - \cos x - 1, \qquad g(x) = \frac{x^2}{16} - 1, \qquad h(x) = -\cos x$$

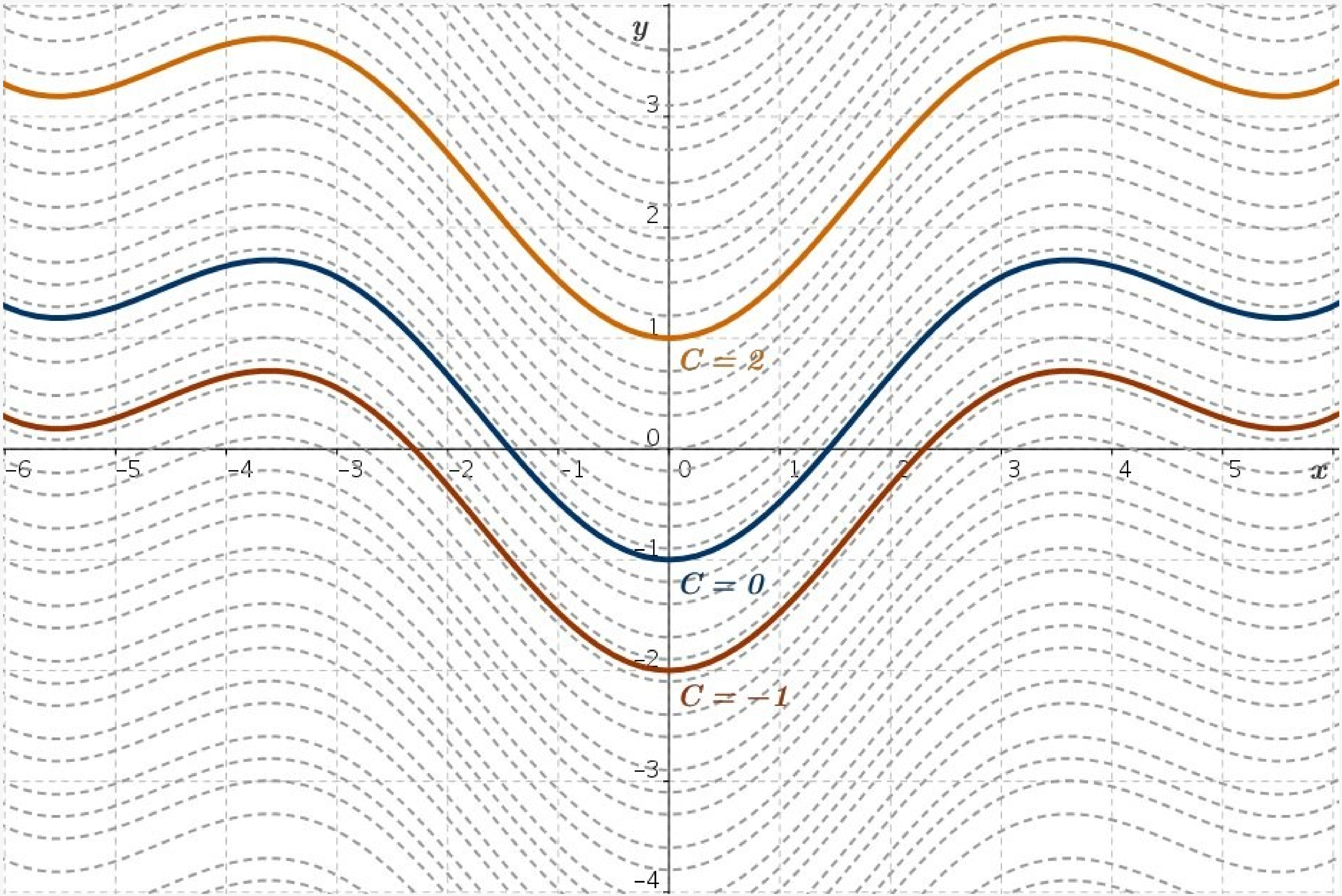



*Abb. 5L-2: Integralkurven der DGL $y' = \sin x + x/8$*

Die Allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \sin x + \dfrac{x}{8}$ ist:

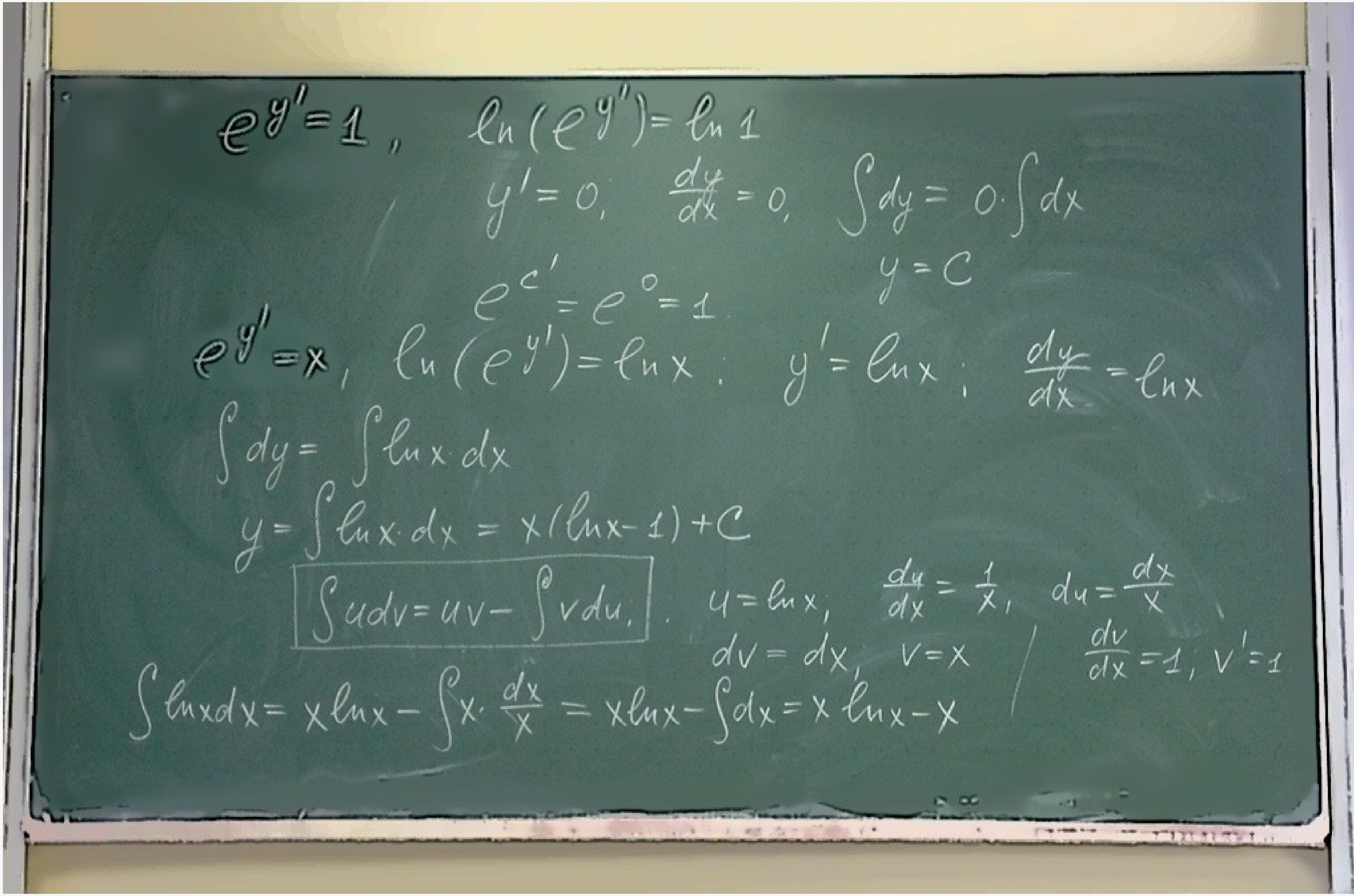
$$y(x) = -\cos x + \frac{x^2}{16} + C$$

Spezielle Lösungen:

$y(0) = -2, \qquad C = -1, \qquad y(x) = -\cos x + \dfrac{x^2}{16} - 1$

$y(0) = -1, \qquad C = 0, \qquad y(x) = -\cos x + \dfrac{x^2}{16}$

$y(0) = 1, \qquad C = 2, \qquad y(x) = -\cos x + \dfrac{x^2}{16} + 2$


$e^{y'}=1, \quad \ln(e^{y'})=\ln 1$
$y'=0, \quad \frac{dy}{dx}=0, \quad \int dy = 0\cdot\int dx$
$y=C$
$e^{c'}=e^{0}=1$
$e^{y'}=x, \quad \ln(e^{y'})=\ln x; \quad y'=\ln x; \quad \frac{dy}{dx}=\ln x$
$\int dy = \int \ln x\cdot dx$
$y=\int \ln x\cdot dx = x(\ln x-1)+C$
$\boxed{\int u\,dv = uv-\int v\,du.}$
$u=\ln x, \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}, \quad du=\frac{dx}{x}$
$dv=dx, \quad v=x$
$\frac{dv}{dx}=1; \quad v'=1$
$\int \ln x\,dx = x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x-\int dx = x\ln x - x$

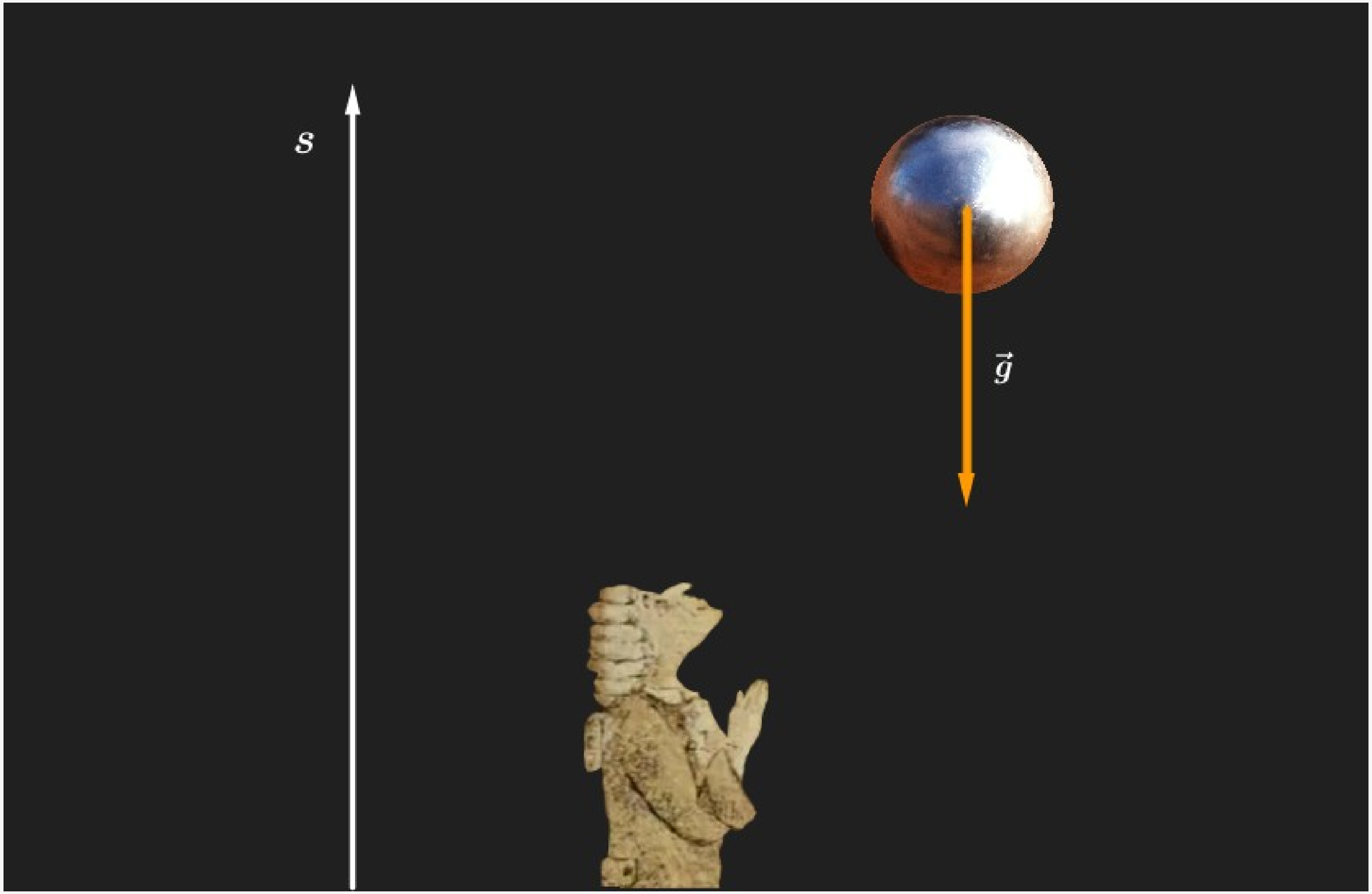



*Abb. L7: Zum freien Fall im luftleeren Raum*

Wir betrachten einen im luftleeren Raum frei fallenden Körper. Der Körper, auf den die Schwerkraft wirkt, erfährt die konstante Fallbeschleunigung $a = -g$.

$$s = s(t), \quad v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t), \quad a(t) = s''(t) = -g$$

Anfangsbedingungen: $s(0) = s_0, \quad v(0) = v_0$

$$s''(t) = -g \quad \text{– lineare DGL 2. Ordnung}$$

$$v(t) = -\int g\,dt = -g\,t + C_1$$

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (-g\,t + C_1)\,dt = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + C_1\,t + C_2$$

Allgemeine Lösung: $s(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + C_1\,t + C_2$

$$s(0) = C_2 = s_0, \quad v(0) = C_1 = v_0$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + s_0$$

$$y''' = \sin x + \cos x$$

$$y''' = \frac{d}{dx} y'' = \sin x + \cos x, \qquad d\, y'' = (\sin x + \cos x)\, dx$$

$$\int d\, y'' = \int (\sin x + \cos x)\, dx = -\cos x + \sin x + C_1$$

$$y'' = -\cos x + \sin x + C_1, \qquad \frac{d\, y'}{dx} = -\cos x + \sin x + C_1$$

$$\int d\, y' = \int (-\cos x + \sin x + C_1)\, dx = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\int dy = \int (-\sin x - \cos x + C_1 x + C_2)\, dx$$

$$y = \cos x - \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$x\,y^{(5)} = y^{(4)}, \qquad p = y^{(4)}$$

$$x\,p' = p, \qquad x\,\frac{dp}{dx} = p, \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \ln|\,p\,| = \ln|\,x\,| + \ln|\,C_1\,| = \ln|\,C_1\,x\,|$$

$$p = C_1\,x, \qquad y^{(4)} = C_1\,x$$

$$y''' = C_1\,\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y'' = C_1\,\frac{x^3}{6} + C_2\,x + C_3$$

$$y' = C_1\,\frac{x^4}{24} + C_2\,\frac{x^2}{2} + C_3\,x + C_4$$

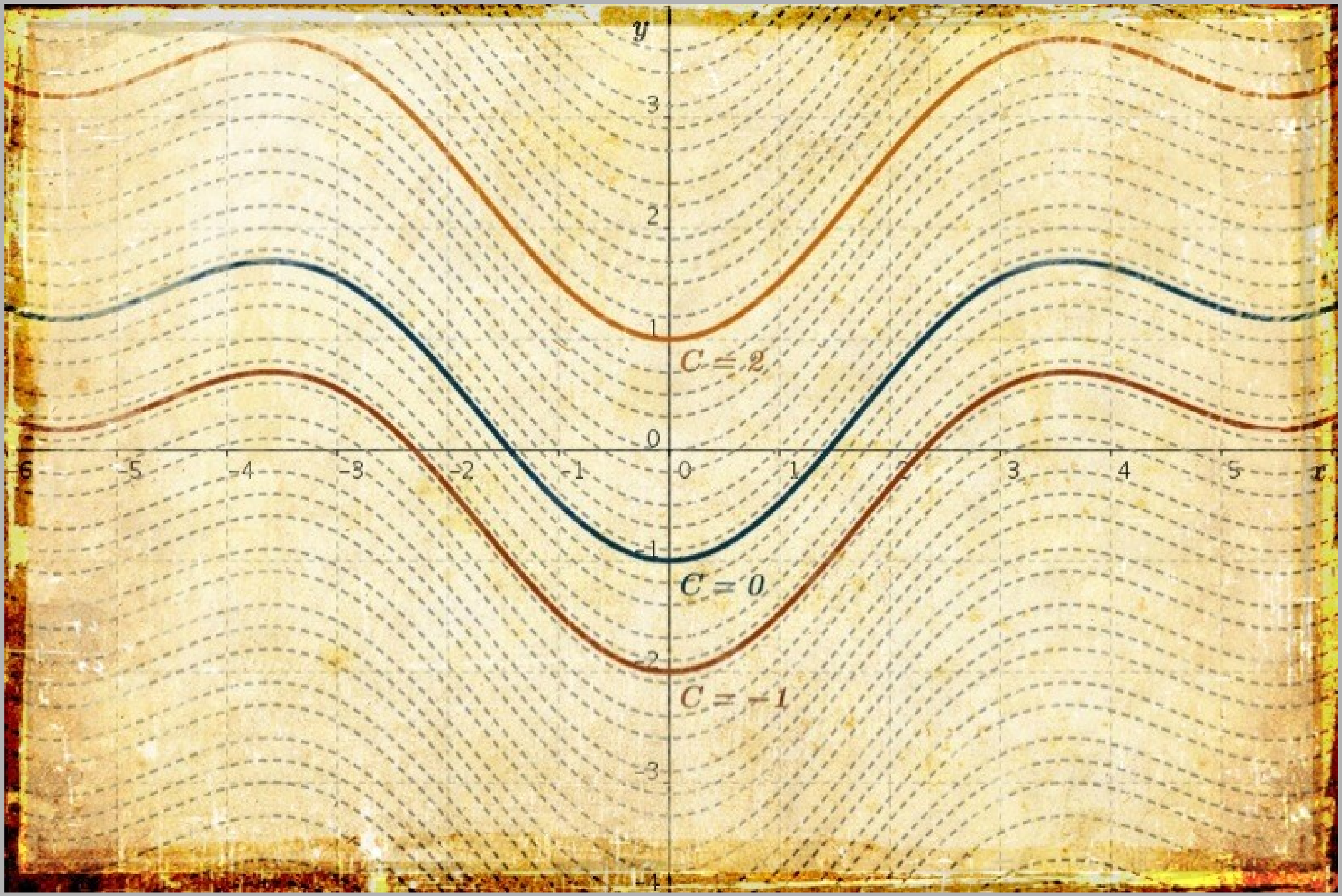
$$y = C_1\,\frac{x^5}{120} + C_2\,\frac{x^3}{6} + C_3\,\frac{x^2}{2} + C_4\,x + C_5$$

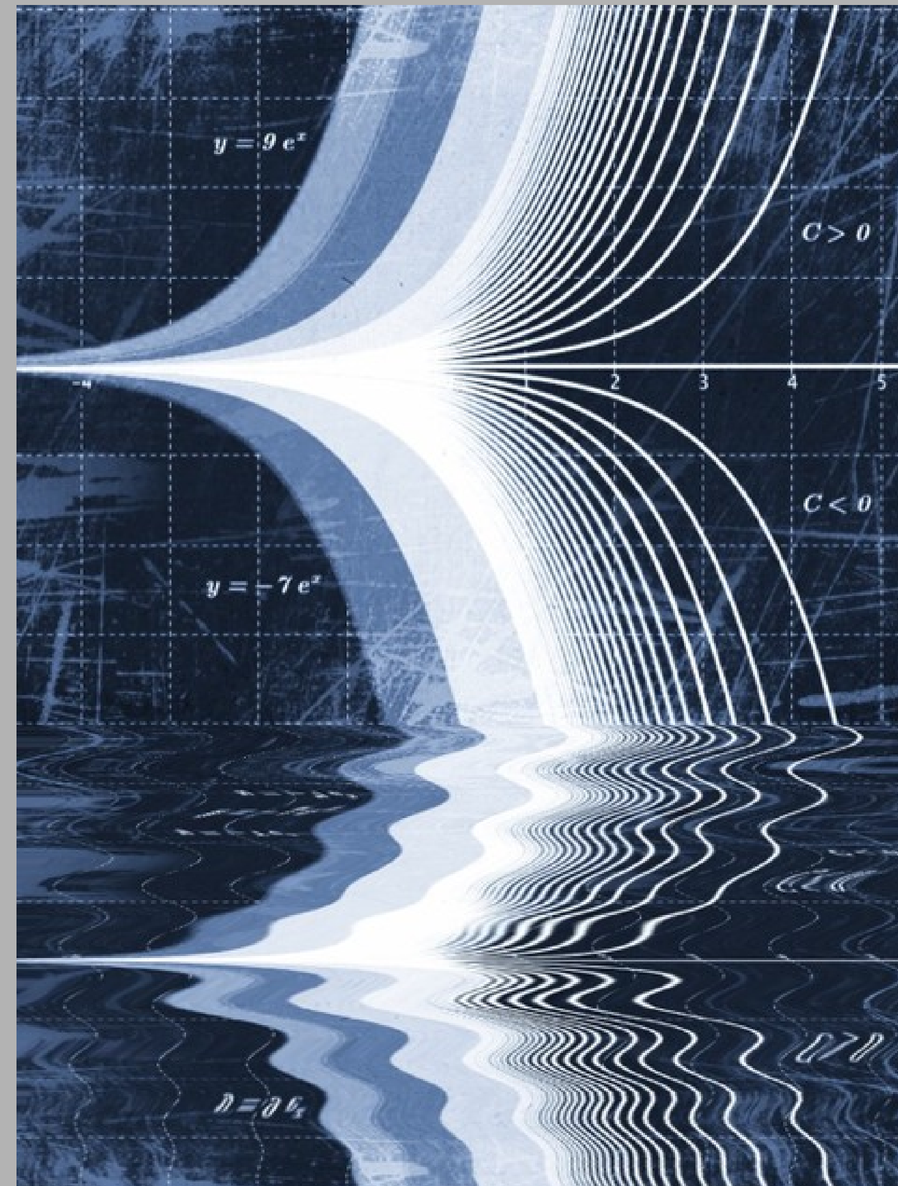
$$y = C_1^*\,x^5 + C_2^*\,x^3 + C_3^*\,x^2 + C_4\,x + C_5$$

$$C_1^* = \frac{C_1}{120}, \qquad C_2^* = \frac{C_2}{6}, \qquad C_3^* = \frac{C_3}{2}$$

In diesen einfachen Beispielen kommen schon die wesentlichen Elemente einer Differentialgleichung vor:

- Wir haben es mit einer Gleichung zu tun, in der die Unbekannte eine Funktion ist.
- In der Gleichung tauchen Ableitungen der gesuchten Funktion auf.
- Zur Lösung der Gleichung ist eine Integration notwendig.
- Durch die Integration kommt eine Integrationskonstante ins Spiel. Die Lösung der Differentialgleichung ist nicht eindeutig – es gibt viele Lösungen.


y
x
C = 2
C = 0
C = −1


$y = 9\,e^x$
$C > 0$
$C < 0$
$y = -7\,e^x$
2
3
4
5