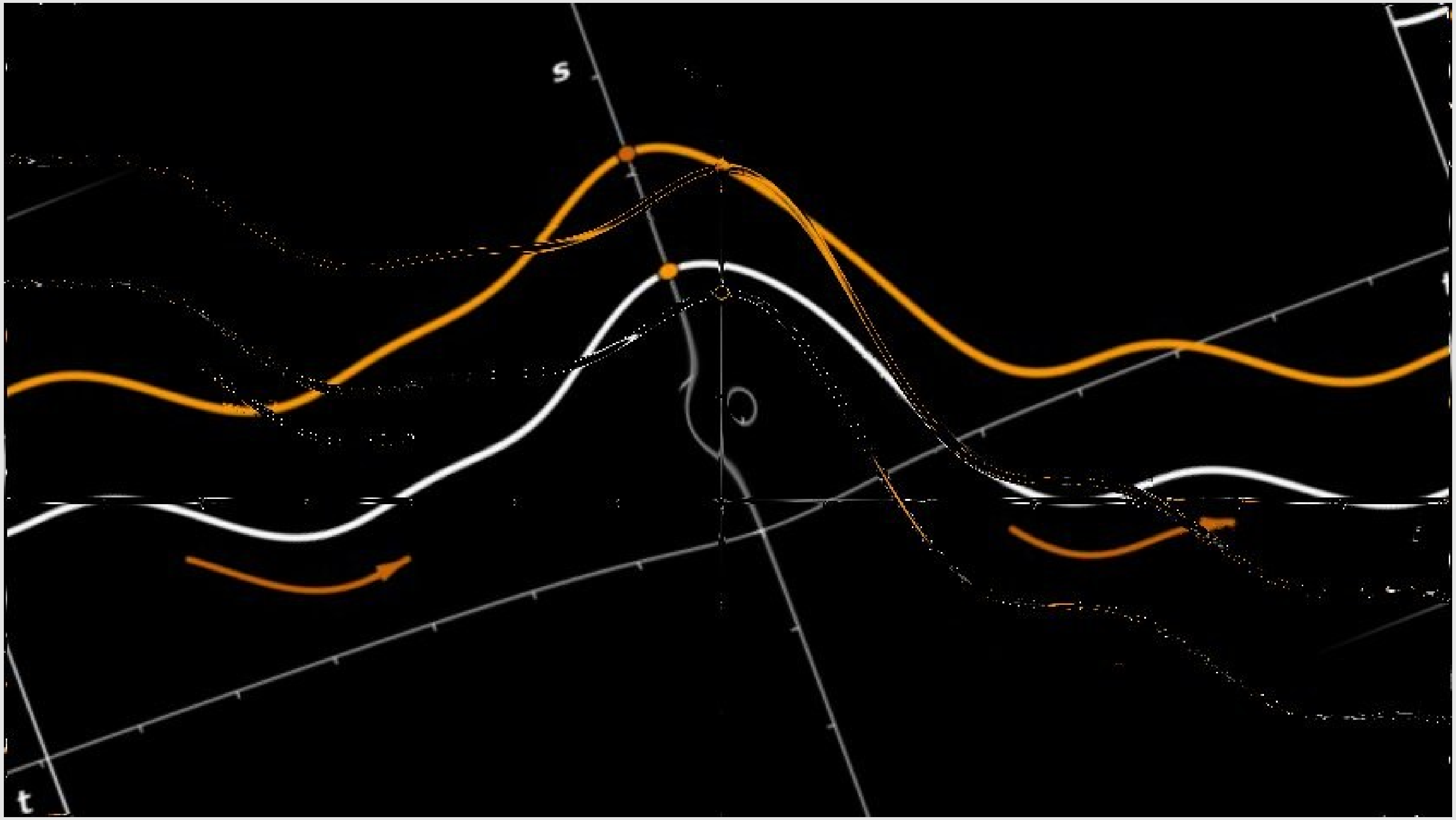
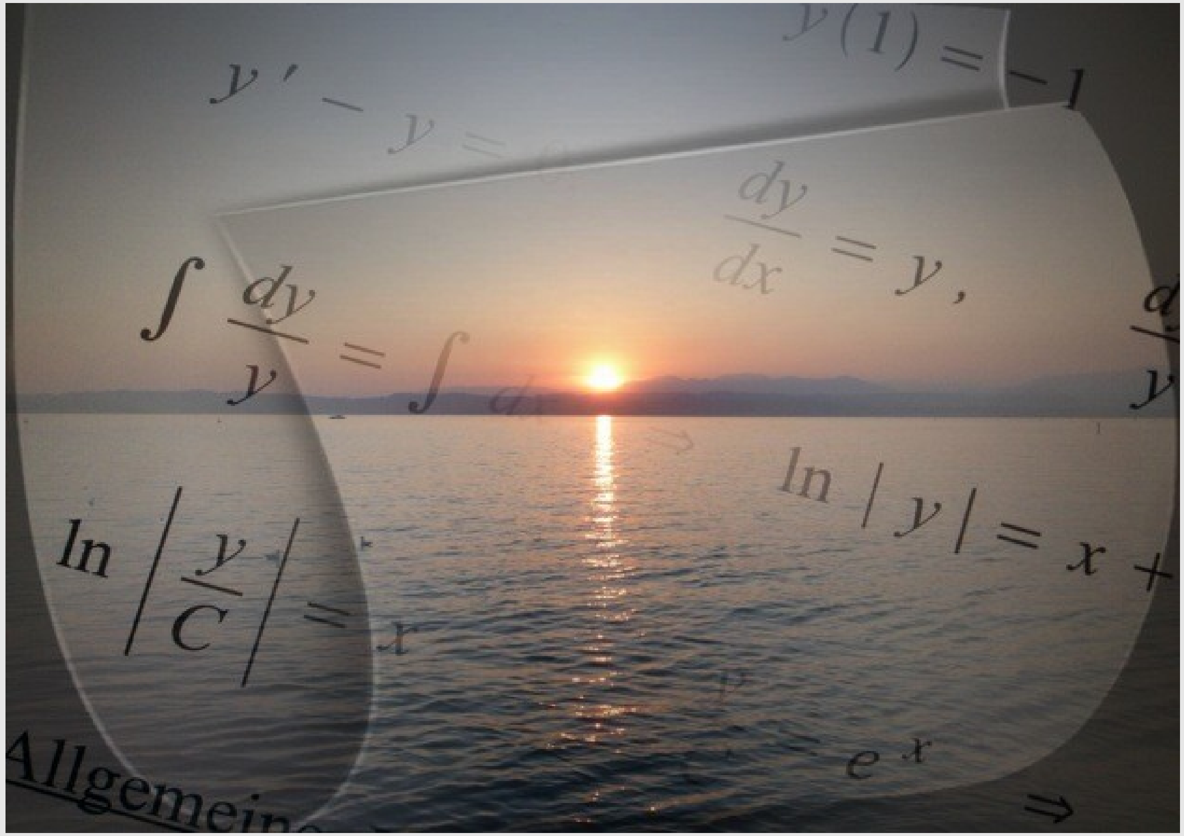


Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einleitung

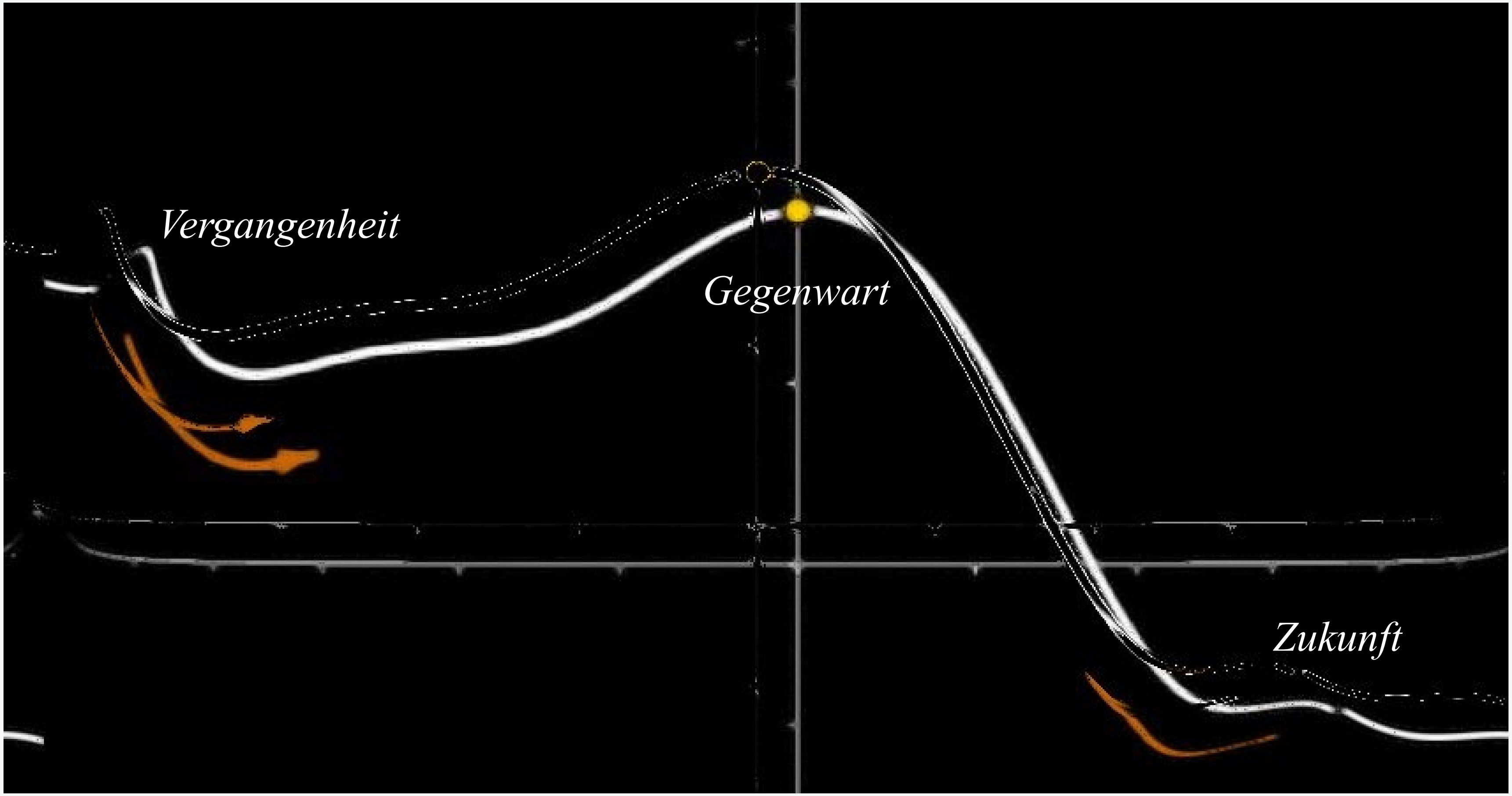
Die Sprache des Universums ist die Sprache der Differentialgleichungen.

Faszinierender Anwendungsreichtum



Wie verstanden die Alten das Naturgesetz? Für sie war es eine innere Harmonie, statisch und unveränderlich; oder es war ein Idealbild, dem nachzustreben die Natur sich bemühte. Für uns hat ein Gesetz nicht mehr diese Bedeutung; es ist eine unveränderliche Beziehung zwischen der Erscheinung von heute und der von morgen; mit einem Wort: es ist eine Differentialgleichung.

Henri Poincaré



Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ermöglicht es, *deterministische* Evolutionsprozesse zu untersuchen.

Ein Prozeß heißt deterministisch, wenn sein gesamter zukünftiger Verlauf und seine gesamte Vergangenheit eindeutig durch seinen gegenwärtigen Zustand bestimmt sind. Die Menge aller möglichen Zustände des Prozesses heißt Phasenraum.

http://www.eubaumgartner.ch/images/planeten1.jpg

Die klassische Mechanik betrachtet z.B. Bewegungen von Systemen, deren Zukunft und Vergangenheit eindeutig durch die anfänglichen Lagen und die anfänglichen Geschwindigkeiten aller Punkte des Systems festgelegt sind. Der Phasenraum eines mechanischen Systems ist eine Menge, deren Elemente die Positionen und Geschwindigkeiten aller Punkte des gegebenen Systems beschreiben.

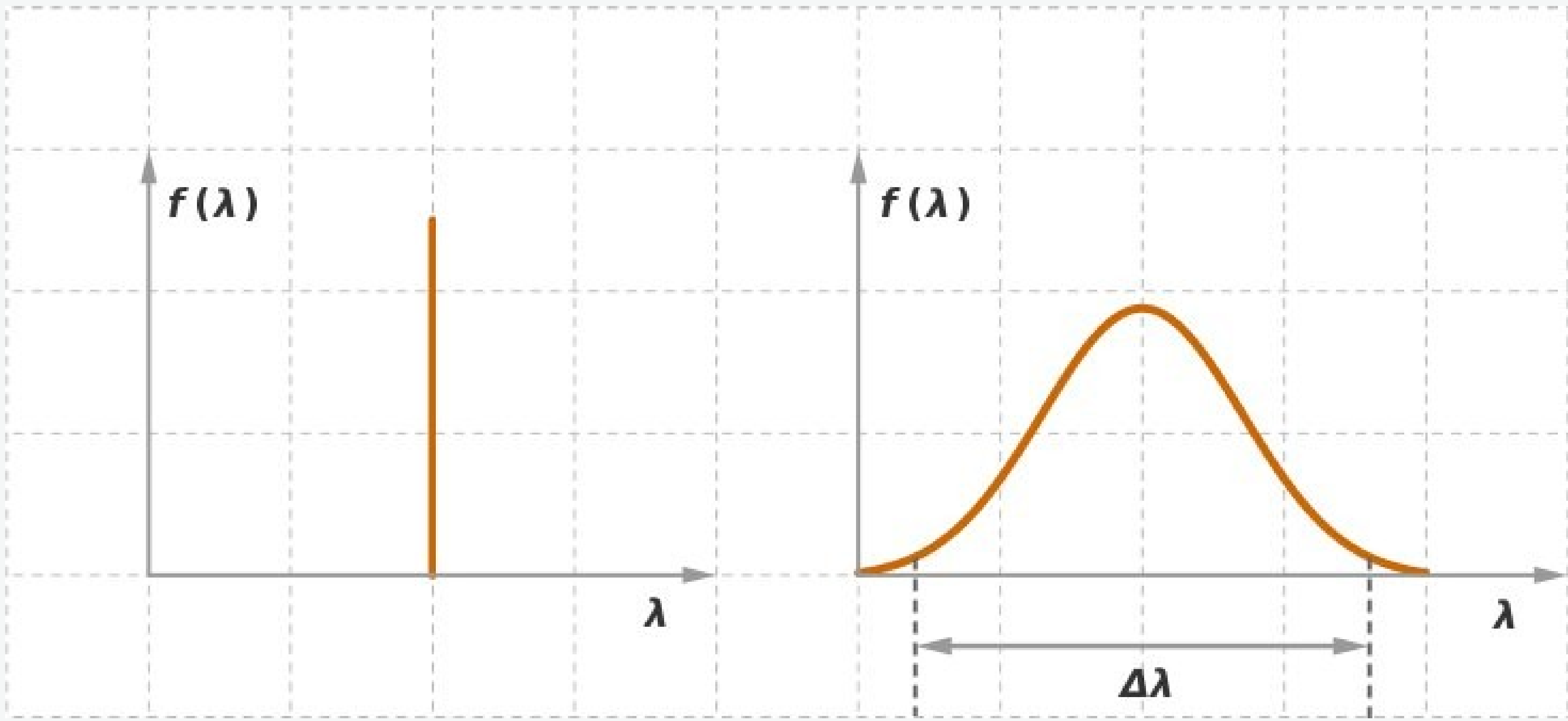


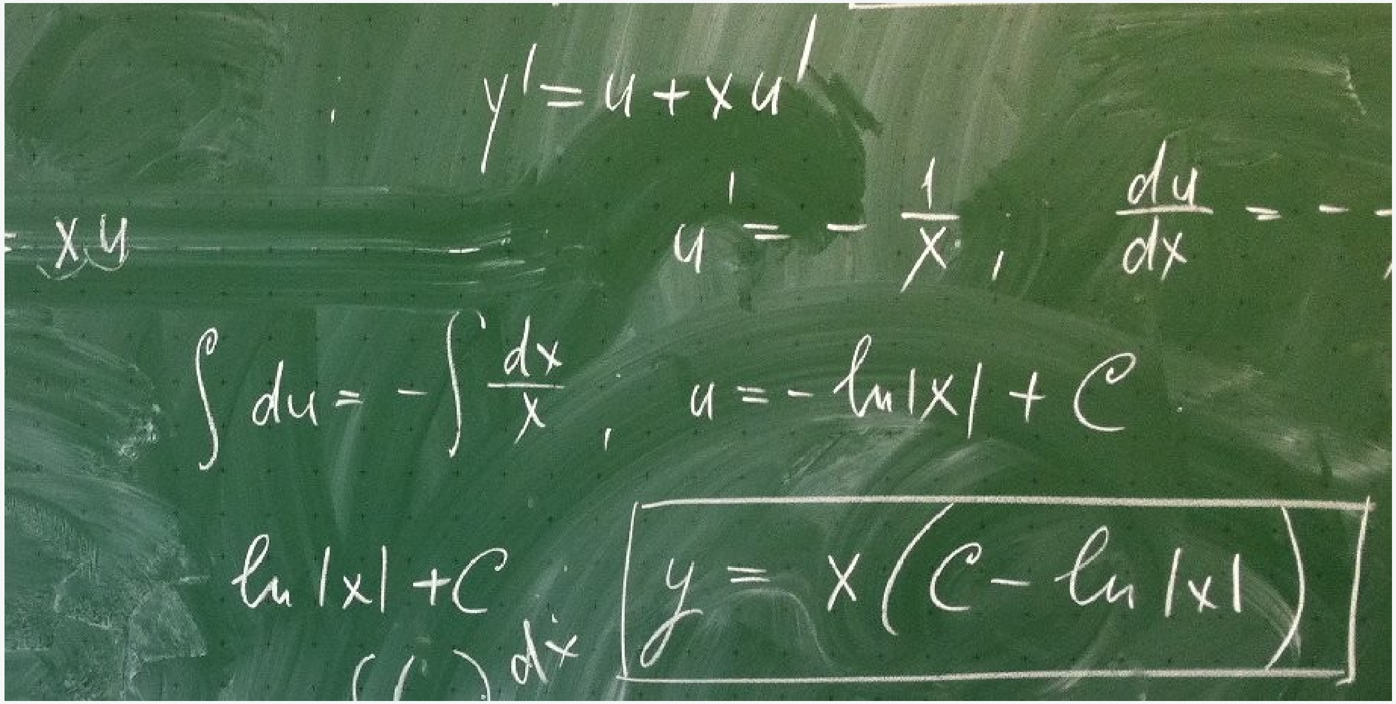
Abb. 1: De Broglie-Wellen und Unbestimmtheitsrelation

Die Bewegungen der Teilchen in der Quantenmechanik kann man nicht durch deterministische Prozesse beschreiben: Eine Welle mit einer festen Wellenlänge λ erstreckt sich über den ganzen Raum. Um ein Wellenpacket der Breite Δx zu erzeugen, sind viele Wellenlängen in einem Bereich $\Delta\lambda$ erforderlich.

Ein Prozeß heißt differenzierbar, wenn die Veränderung der Zustände mit der Zeit durch differenzierbare Funktionen beschrieben wird. Die Koordinaten und Geschwindigkeiten der Elemente eines mechanischen Systems verändern sich in differenzierbarer Weise. In der Theorie des Stoßes sind die Bewegungen allerdings nicht differenzierbar.

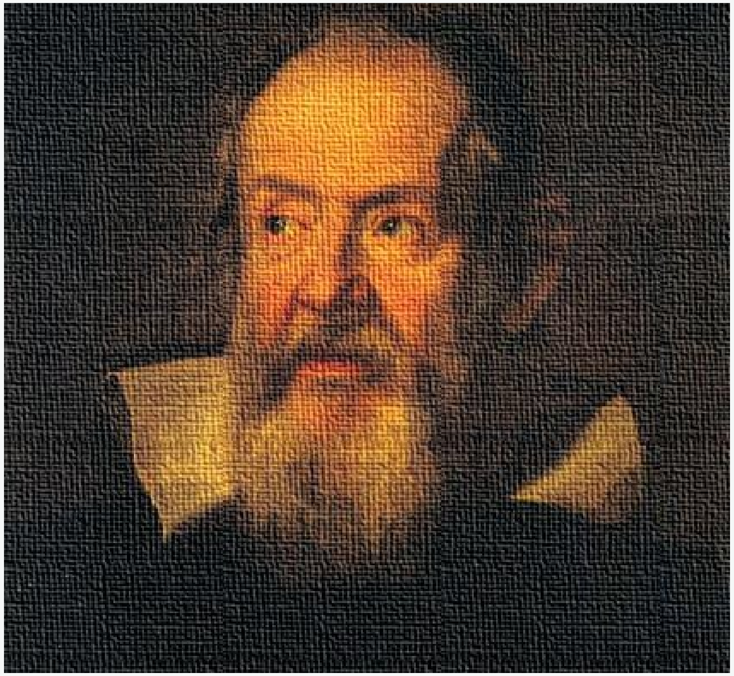
Die Bewegungen der Systeme der klassischen Mechanik können mit Hilfe der gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben werden, während die Quantenmechanik, die Theorie der Wärmeleitung, die Hydrodynamik und die Theorie des Stoßes andere Mittel erfordern.

Faszinierender Anwendungsreichtum



Eine Gleichung zwischen einer gesuchten Funktion und einigen ihrer Ableitungen heißt eine Differentialgleichung. Differentialgleichungen gehören zu unseren mächstigsten Mitteln, Naturvorgänge zu beschreiben.

Harro Heuser



Galileo Galilei (1564-1642)

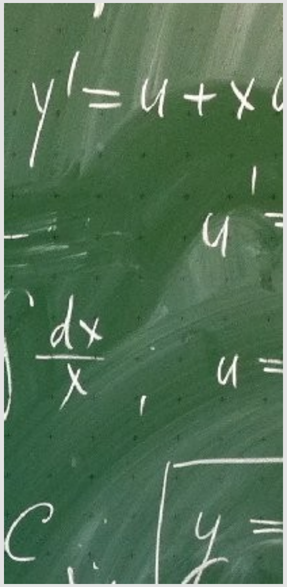
Galilei erkannte *1590* die Gesetze des freien Falls: Alle Körper fallen im Vakuum unabhängig von ihrer Gestalt und Masse gleich schnell. Ihre Fallgeschwindigkeit ist proportional zur Fallzeit, der Fallweg proportional zum Quadrat der Fallzeit.

Pisaturm

Die Gleichung, die einen im luftleeren Raum frei fallenden Körper beschreibt, hat die Form

$$\frac{d^2 s(t)}{d t^2} = -g$$

g – die konstante Erd- oder Fallbeschleunigung, *s (t)* – die Weg-Zeit-Funktion



Folgende Beispiele zeigen, wie Forscher verschiedenster Gebiete Differentialgleichungen (DGL) zur Lösung von “real-life”-Probleme mitbenutzen

$y' = a\,y$ – Änderung ist proportional zum Ist-Zustand

Radioaktiver Zerfall

Anfängliche Entwicklung einer Bakterienkultur

Zellwachstum

Stetige Verzinsung

$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$

Schwingendes Federpendel

Schwingungen von Atomen und Molekülen

Elektrische Polarisation

Modell zur Diabetes-Aufdeckung (GTT)

$y' = k\,(A - y)\,(B - y)$

Chemische Reaktion, bei der sich Stoffe A und B zum Stoff C $(= y)$ zusammensetzen

Definition:

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, in der Ableitungen von einer oder mehreren Funktionen auftreten, die von einer oder mehreren Variablen abhängen. Die gesuchten Unbekannten sind die Funktionen. Eine gewöhnliche DGL für eine Funktion $y(x)$ hat die allgemeine Form

$$F\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right) = 0$$

$$y(x),\ y'(x),\ y''(x),\ \ldots \quad \rightarrow \quad y,\ y',\ y'',\ldots$$

Beispiele:

$$y' = (x - y)^2 + 1$$

$$x\, y\, y' - y^2 = x^4$$

$$y = (y')^2 - x\, y' + \frac{x^2}{2}$$

$$y'' + 4\, y' + 8\, y = e^{2x}\,(\sin 2x + \cos 2x)$$

Definition:

Die Ordnung der höchsten in einer Differenttialgleichung auftretenden Ableitung heißt die Ordnung der Differentialgleichung.

Beispiele:

$y' = 3x$ – DGL 1. Ordnung

$x^2 + y\,y'' = 0$ – DGL 2. Ordnung

$y' + y^2 y''' = 2\cos x$ – DGL 3. Ordnung

$y^{(9)} - x\,y'' = x^2$ – DGL 9. Ordnung

$y^{(6)} - x\,y''' = x\,y$ – DGL 6. Ordnung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung kann in impliziter und expliziter Form geschrieben werden:

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ – implizite Form

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ – explizite Form, die Gleichung ist nach der höchsten auftretenden Ableitung aufgelöst.

Beispiele:

$y'' = e^x + 5x$	– explizite DGL 2. Ordnung
$x^3 y - 2xy''' = 0$	– implizite DGL 3. Ordnung
$y'' = 2xy^2 y' + 2\sin x$	– explizite DGL 2. Ordnung
$y^{(7)} = 3xy'' + x^3$	– explizite DGL 7. Ordnung
$y^{(4)} - \sin(x)\, y'' = e^x$	– implizite DGL 4. Ordnung

Definition:

Eine Differentialgleichung heißt linear, falls sie die Form

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x) \cdot y(x) = b(x)$$

$$a_\nu = a_\nu(x), \qquad \nu = 1, 2, \ldots n$$

besitzt, wobei die Koeffizienten $a_\nu(x)$ und die rechte Seite $b(x)$ gegebene Funktionen sind.

Die anderen gewöhnlichen Differentialgleichungen heißen nichtlinear.

$y' \cdot y = x$ – nichtlineare DGL 1. Ordnung

$3\,y'' + x^2 \cdot y' - \sin x \cdot y = x$ – lineare DGL 2. Ordnung

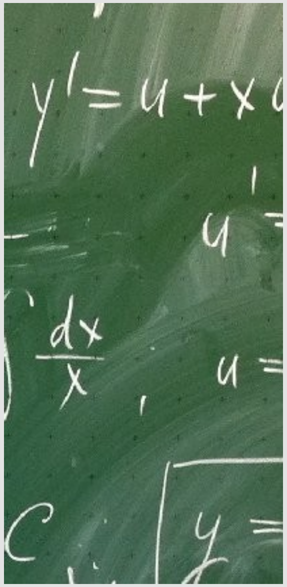
$y^{(4)} \cdot y^2 + x \cdot \cos y = e^x$ – nichtlineare DGL 4. Ordnung

$x^2 \cdot y'' = y$ – lineare DGL 2. Ordnung

Definition:

Eine Funktion heißt eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

- Die allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordnung enthält noch n voneinander unabhängigen Parameter (Integrationskonstanten). Die Anzahl der Parameter ist durch die Ordnung der DGL bestimmt.
- Eine spezielle Lösung wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man aufgrund zusätzlicher Bedingungen den n Parametern feste Werte zuweist.
- Eine graphische Lösung einer DGL heißt Integralkurve.



Bestimmen Sie die Ordnung der gegebenen Differentialgleichungen. Bestimmen Sie auch, ob die Differentialgleichungen linear oder nichtlinear sind

$a)\quad x^2\, y'' + x\, y' + 2\,y = \sin x$

$b)\quad (1 + y^2)\, y'' + x\, y' + y = e^x$

$c)\quad y^{(4)} + y''' + y'' + y' + y = 1$

$d)\quad y' + x\,y^2 = 0$

$e)\quad y'' + \sin(x + y) = \sin x$

$f)\quad y''' + x\, y' + y\, \cos^2 x = x^3$

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Grundbegriffe: Lösung 1

a) – lineare DGL 2. Ordnung;

b) – nichtlineare DGL 2. Ordnung;

c) – lineare DGL 4. Ordnung;

d) – nichtlineare DGL 1. Ordnung;

e) – nichtlineare DGL 2. Ordnung;

f) – lineare DGL 3. Ordnung.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die gegebenen Funktionen Lösungen der Differentialgleichungen sind

a) $y'' + 2y' - 3y = 0, \qquad y_1(x) = e^{-3x}, \qquad y_2(x) = e^{x}$

b) $x\, y' - y = x^2, \qquad y(x) = 3x + x^2$

c) $2x^2 y'' + 3x y' - y = 0, \quad x > 0, \qquad y_1(x) = \sqrt{x}, \qquad y_2(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $y' = x + \cos x \qquad y(x) = \sin x + \dfrac{x^2}{2} + C$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Werte für r, für welche die gegebenen Differentialgleichungen Lösungen der Form $y = e^{rx}$ besitzen

a) $y' + 2y = 0$

b) $y'' - y = 0$

c) $y'' + y' - 6y = 0$

d) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Wir bestimmen die Werte für r, für welche die gegebenen Differentialgleichungen Lösungen der Form $y = e^{rx}$ besitzen

$$y = e^{rx}, \qquad y' = r\, e^{rx} = r\, y,$$
$$y'' = r^2\, e^{rx} = r^2\, y, \qquad y''' = r^3\, e^{rx} = r^3\, y$$

$a)\quad y' + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r\,y + 2\,y = y\,(r + 2) = 0, \quad r = -2$

$b)\quad y'' - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 y - y = y\,(r^2 - 1) = 0, \quad r_1 = -1, \quad r_2 = 1$

$c)\quad y'' + y' - 6\,y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r^2 + r - 6) = 0, \quad r_1 = -3, \quad r_2 = 2$

$d)\quad y''' - 3\,y'' + 2\,y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r\,(r^2 - 3\,r + 2) = 0,$

$r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 2$

Als Bernoulli-Differentialgleichung wird die DGL

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$$

bezeichnet, wobei $p(x)$ und $q(x)$ in einem Intervall I stetige Funktionen sind.

Aufgabe 4:

Prüfen Sie, ob die gegebenen Funktionen Lösungen der Bernoulli-Differenzialgleichung sind

1) $y' + 2xy = 2xy^2, \qquad y_1 = \dfrac{1}{2 - e^{-x}}, \qquad y_2 = \dfrac{2}{2 - e^{x^2}}$

2) $y' + 2xy = e^{x^2} y^2, \qquad y_1 = \dfrac{e^{-x^2}}{1 - x}, \qquad y_2 = \dfrac{e^{x}}{1 - x^2}$