http://www.w-volk.de/museum/street04.htm

Bernoulli-Differentialgleichung: Aufgaben

Lösen Sie folgende Bernoulli-Differenzialgleichungen

Aufgabe 3: $y' + 2\,x\,y = y^2\, e^{x^2}$

$y(0) = 1, \qquad y(0) = -1$

Aufgabe 4: $3\,y' + y = \dfrac{1}{y^2}$

Aufgabe 5: $x\,y' + 2\,y = -\,x^3 \cos x \cdot y^2, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

Wir vergleichen die DGL $y' + 2\,x\,y = y^2\, e^{x^2}$

mit der Bernoulli-Differenzialgleichung $y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$

$$p(x) = 2\,x\,, \quad q(x) = e^{x^2}, \quad n = 2 \quad \Rightarrow$$

$$u(x) = y(x)^{1-n} = \frac{1}{y(x)} \quad \Rightarrow \quad u' = -\,\frac{y'}{y^2}$$

$$y' + 2\,x\,y = y^2\, e^{x^2} \quad \Big| \quad \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2\,x}{y} = e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad -u' + 2\,x\,u = e^{x^2}$$

$-u' + 2\,x\,u = 0$ – homogene lineare DGL 1. Ordnung

$$\int \frac{du}{u} = 2\int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = x^2 + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{u}{C}\right| = x^2$$

$$u = C\,e^{x^2}, \quad C \to C(x), \quad u = C(x)\, e^{x^2}$$

Jetzt werden wir die Lösung $u = C(x)\, e^{x^2}$

in die inhomogene lineare DGL $-u' + 2xu = e^{x^2}$

einsetzen.

$$C'(x) = -1, \qquad C(x) = -\int dx = -x + C_1$$

$$u = \frac{1}{y} = C(x)\, e^{x^2} = (C_1 - x)\, e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{e^{-x^2}}{C_1 - x}$$

Allgemeine Lösung: $$y = \frac{e^{-x^2}}{C_1 - x}$$

Spezielle Lösungen: $$y(0) = 1, \qquad y = \frac{e^{-x^2}}{1 - x}, \qquad C_1 = 1$$

$$y(0) = -1, \qquad y = -\frac{e^{-x^2}}{1 + x}, \qquad C_1 = -1$$

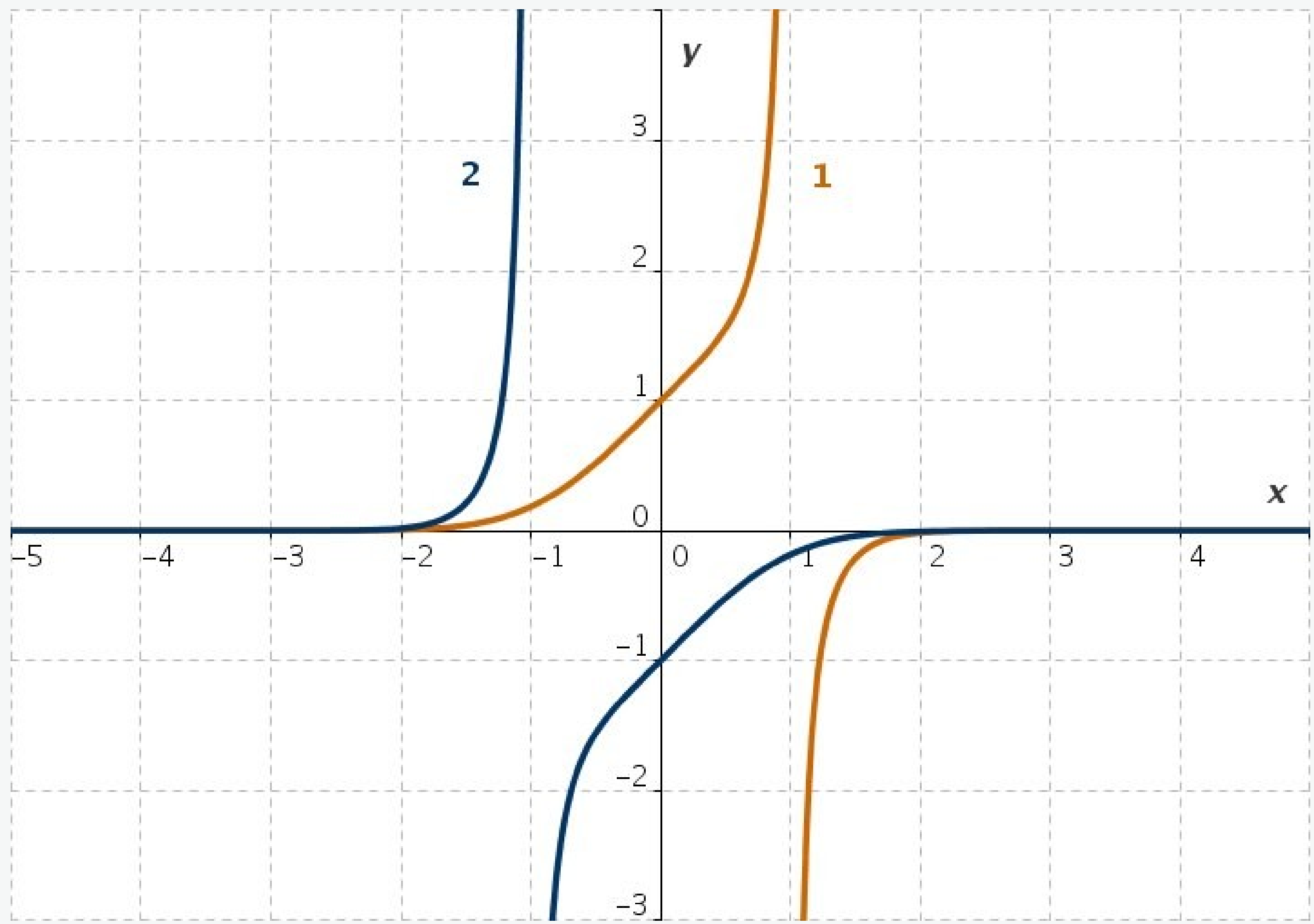

Abb. L3: Integralkurven der DGL, die den Anfangswertbedingungen y (0) = 1 (C = 1, rote Kurve) und y (0) = - 1 (C = -1, blaue Kurve) entsprechen

Wir vergleichen die DGL $\quad 3\,y' + y = \dfrac{1}{y^2} = y^{-2}$

mit der Bernoulli-Differenzialgleichung $\quad y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n$

$$n = -2\,, \quad u(x) = y(x)^{1-n} = y^3(x) \quad \Rightarrow \quad u' = 3\,y^2\,y'$$

$$3\,y' + y = y^{-2} \quad (\times \ y^2) \quad \Rightarrow \quad 3\,y^2\,y' + y^3 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$u' + u = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = 1 - u \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u-1} = -\int dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|u-1| = -x + \ln|C|, \quad \ln\left|\frac{u-1}{C}\right| = -x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{u-1}{C} = e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad u = y^3 = C\,e^{-x} + 1$$

Allgemeine Lösung: $\quad y^3 = C\,e^{-x} + 1$

$$x(y) = \ln\left|\frac{C}{y^3 - 1}\right|$$

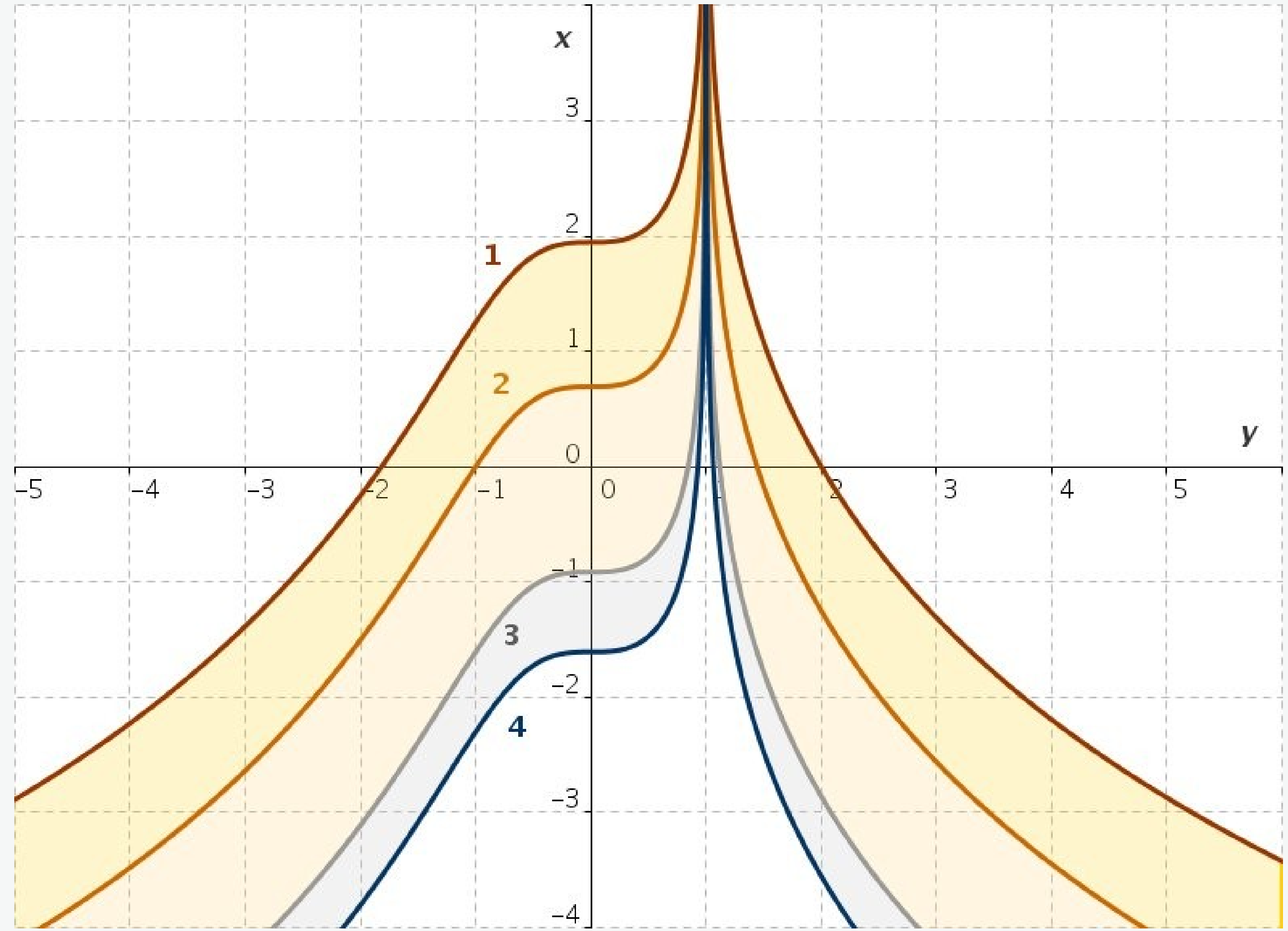

Abb. L4-1: Integralkurven der DGL, die den folgenden Werten der Integrationskonstante C in der Lösung $x = y(x)$ entsprechen: 1: $C = 7$, 2: $C = 2$, 3: $C = 0.4$, 4: $C = 0.2$

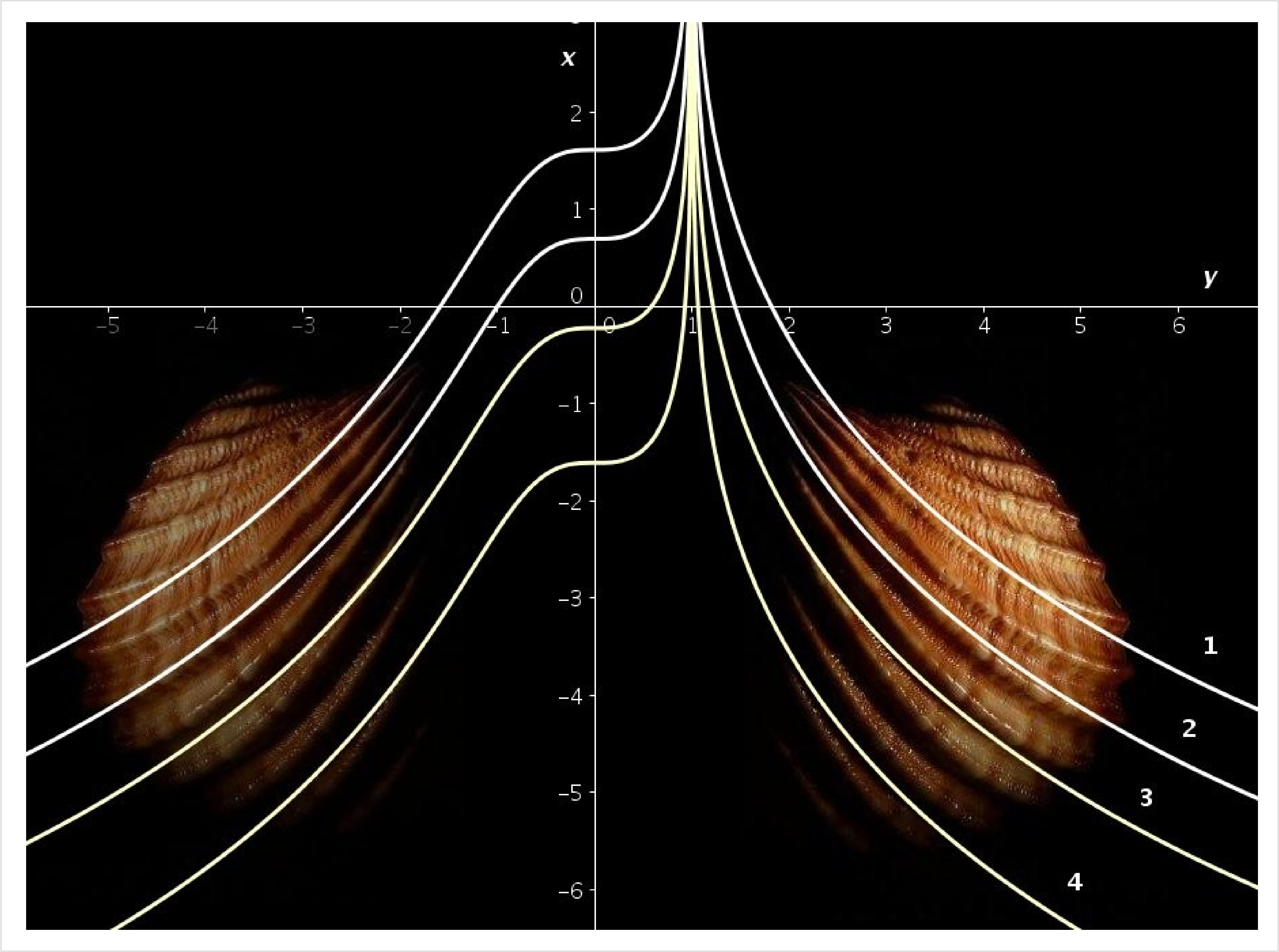

Abb. L4-2: Integralkurven der DGL, die den folgenden Werten der Integrationskonstante C in der Lösung x = y (x) entsprechen: 1: C = 5, 2: C = 2, 3: C = 0.8, 4: C = 0.2

$$x\,y' + 2\,y = -\,x^3 \cos x \cdot y^2\,, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$x\,y' + 2\,y = -\,x^3 \cos x \cdot y^2 \qquad \left(\times\ \frac{1}{x\,y^2}\right), \qquad \frac{y'}{y^2} + \frac{2}{x\,y} = -\,x^2 \cos x$$

$$n = 2: \qquad u(x) = y(x)^{1-n} = \frac{1}{y(x)} \qquad \Rightarrow \qquad u' = -\,\frac{y'}{y^2}$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{x\,y} = -\,x^2 \cos x \qquad \to \qquad u' - \frac{2}{x}\,u = x^2 \cos x$$

Homogene lineare DGL 1. Ordnung:

$$u' - \frac{2}{x}\,u = 0, \qquad \int \frac{du}{u} = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = 2\,\ln|x| + \ln|C| = \ln|C\,x^2|$$

$$u = C\,x^2, \qquad C \quad \to \quad C(x), \qquad u = C(x)\,x^2$$

Jetzt setzen wir die Lösung der homogenen linearen DGL

$$u = C(x)\,x^2$$

in die inhomogene lineare DGL $u' - \frac{2}{x}\,u = x^2 \cos x$ ein

$$u' = C'(x)\,x^2 + 2\,x\,C(x)$$

$$C(x) = \sin x + C_1$$

$$u(x) = (\sin x + C_1)\;x^2$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = \dfrac{1}{(\sin x + C_1)\;x^2}$

Spezielle Lösung:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad y(x) = \frac{1}{\left(\sin x + \dfrac{4}{\pi^2} - 1\right)\,x^2}$$

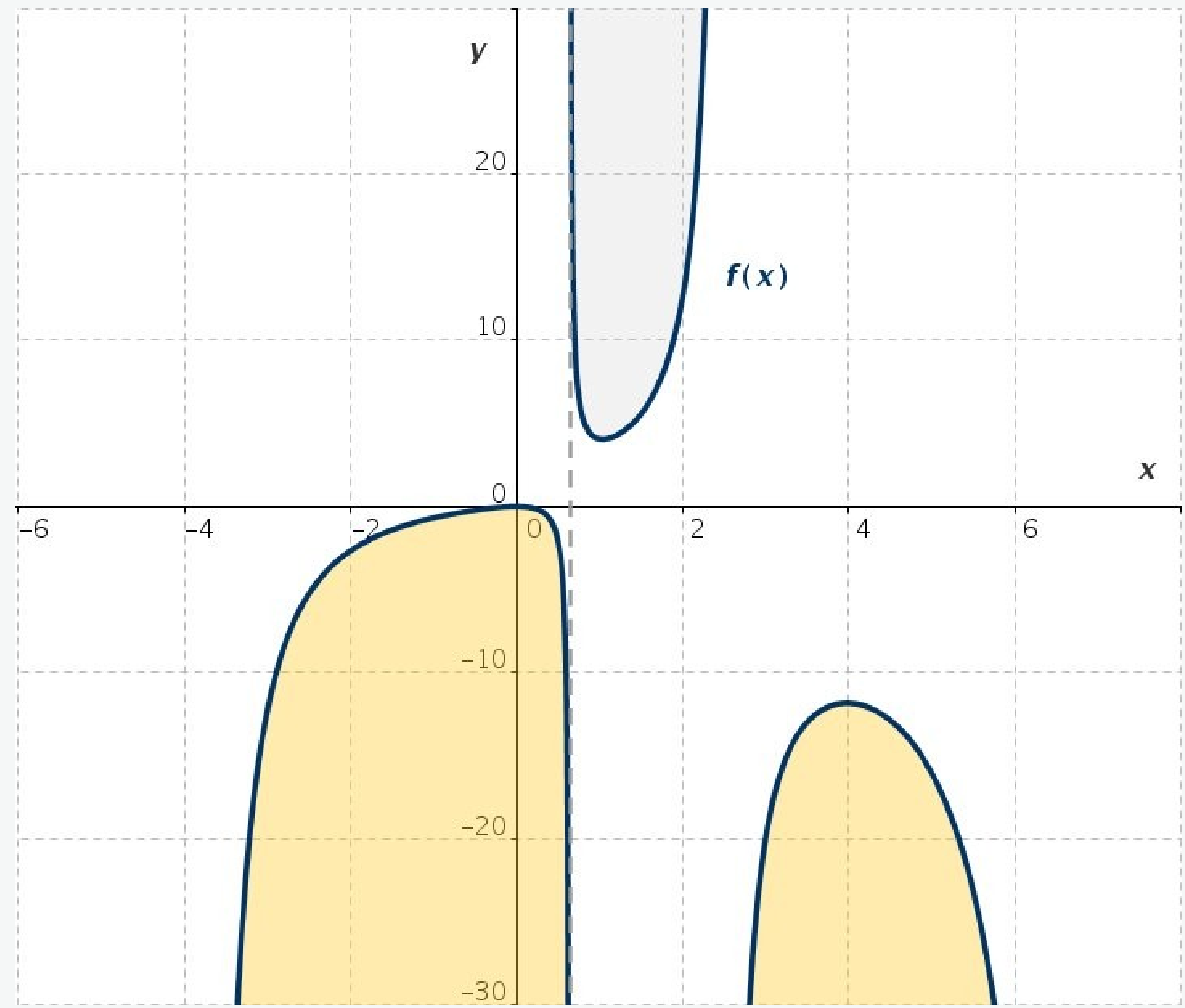

Abb. L5-1: Integralkurve der DGL, die der Anfangswertbedingung $y\ (\pi/2) = 1$ entsprecht

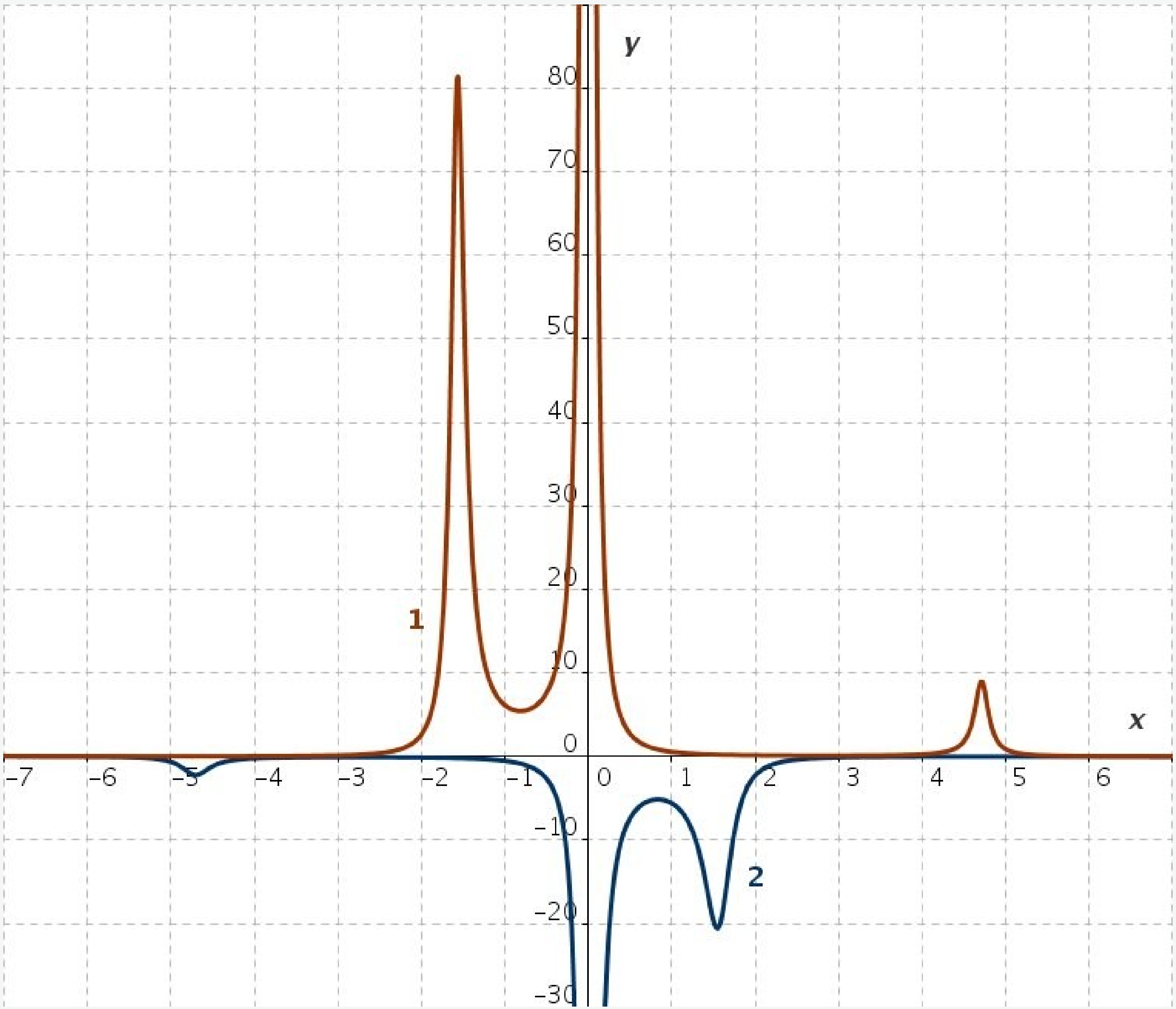

Abb. L5-2: Integralkurven der DGL, die den Werten 1) C = 1.005 und 2) C = -1.02 der Integrationskonstante entsprechen

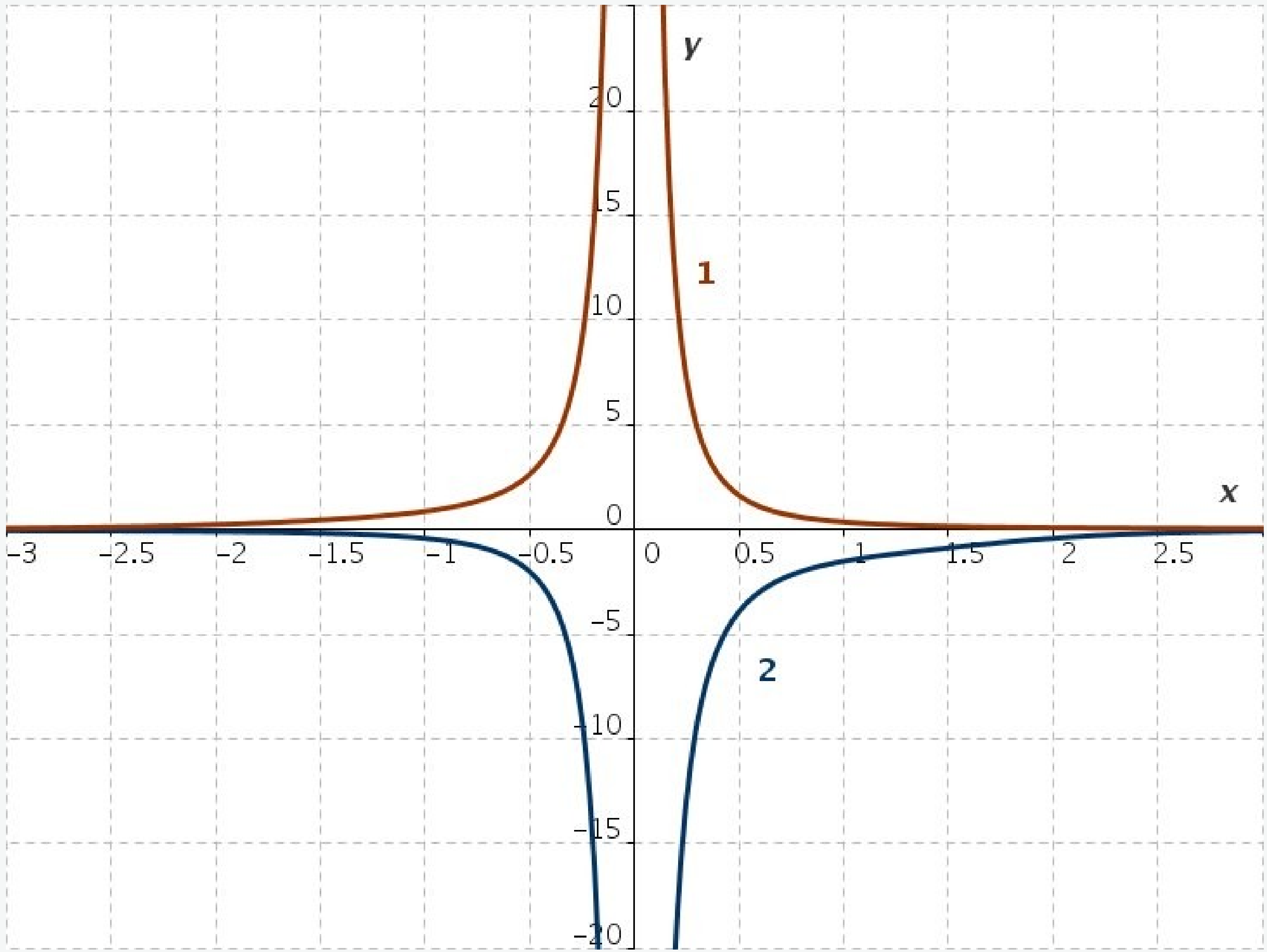

Abb. L5-2: Integralkurven der DGL, die den Werten 1) C = 2 und 2) C = -1.5 der Integrationskonstante entsprechen