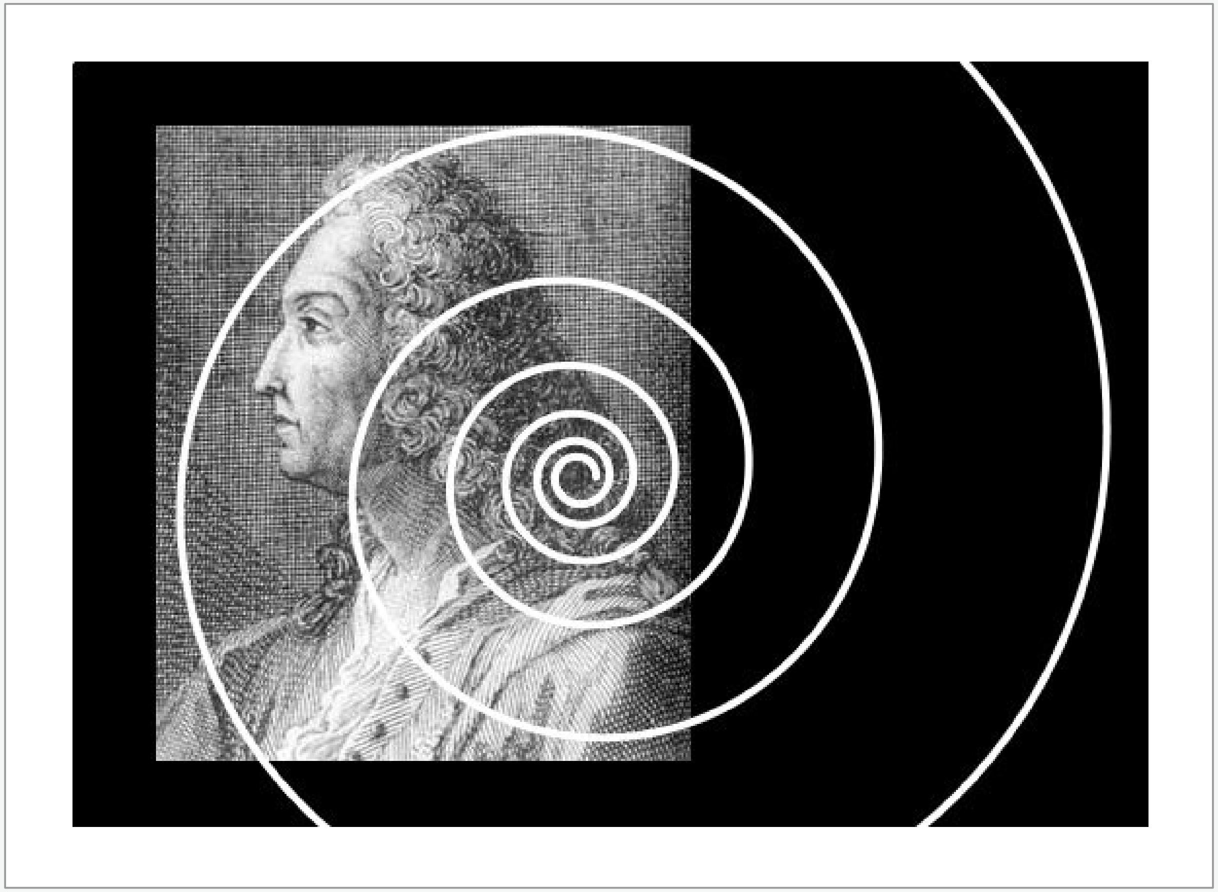
http://www.flickr.com/photos/fpsurgeon/2380990355/

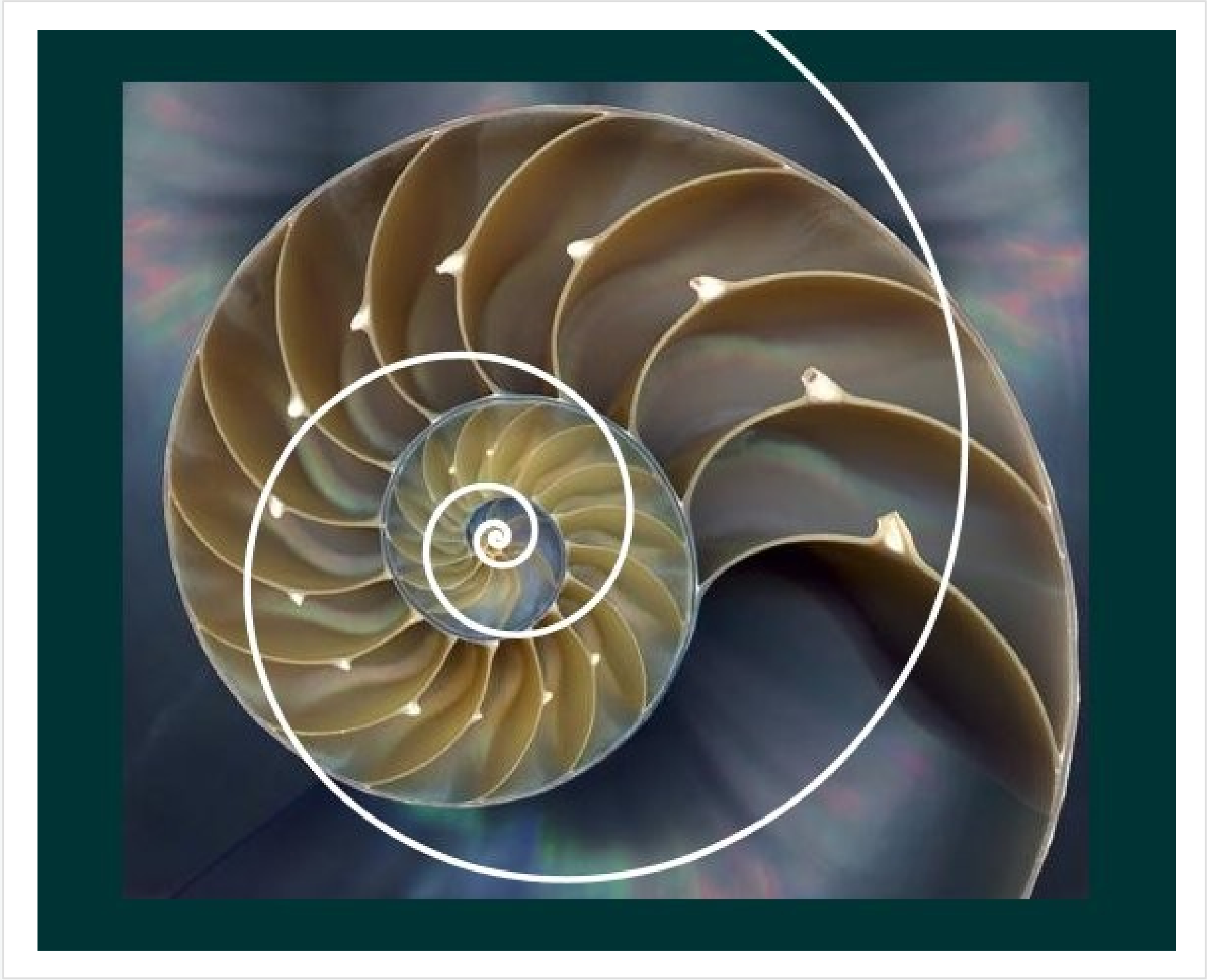
Jakob Bernoulli

Bernoulli-Differentialgleichung



Jakob Bernoulli (1655-1705), ein Schweizer Mathematiker und Physiker

Jakob Bernoulli hat wesentlich zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie sowie zur Variationsrechnung und zur Untersuchung von Potenzreihen beigetragen. Weiterhin hat er zusammen mit seinem Bruder Johann Bernoulli die Infinitesimalrechnung von Leibniz bearbeitet und verbreitet.



http://photomural.files.wordpress.com/2008/02/nautilus.jpg

Für Jakob Bernoulli waren Spiralen reinste Magie, er nannte sie "spira mirabilis" - Wunderspirale. Auf die Studie über die logarithmische Spirale war er so stolz, dass er die Figur in seinen Grabstein mit der Inschrift *"Eadem mutata resurgo"* (Als die Verwandelte stehe ich wieder auf) einmeißeln ließ.

Als Bernoulli-Differentialgleichung wird die DGL

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$$

bezeichnet. $p(x)$ und $q(x)$ sind in einem Intervall I stetige Funktionen. Für $n = 1$ erhält man eine homogene lineare DGL 1. Ordnung, für $n = 0$ eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung.

Wir schließen mit der Bedingung an die Konstante $n \neq 0, 1$ die bisher bekannten Fälle aus. Die Bernoulli-Differentialgleichung ist dann eine nicht lineare DGL 1. Ordnung.

Es werden nur Lösungen mit $y(x) > 0$ betrachtet.

Mit welcher Substitution könnte man die Bernoulli-Differenzialgleichung auf eine lineare DGL zurückführen ?

Wir fassen die beiden Potenzen von y zusammen, was durch folgende Multiplikation gelingt

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n \quad \Big| \quad y^{-n}$$

und zur $(1-n)$ Potenz von y führt

$$y'\,y^{-n} + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

Damit wird die anzuwendende Substitution plausibel:

$$u(x) = y(x)^{1-n} \quad (y \neq 0), \qquad u' = (1-n)\;y^{-n}\;y'$$

$$\frac{u'}{1-n} + p(x)\,u = q(x) \quad - \text{ lineare DGL 1. Ordnung}$$

Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung:

Die Substitution

$$u(x) = y(x)^{1-n} \qquad (x \in J)$$

liefert, dass y genau dann eine Lösung von

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n$$

ist, wenn u die lineare DGL

$$\frac{u'}{1-n} + p(x)\,u = q(x), \quad u(x) > 0 \quad (n \neq 0,\ 1)$$

löst.

http://www.hnf.de/images/Nautilus_6433.jpg

Lösen Sie folgende Bernoulli-Differenzialgleichung

$$y' = \frac{y}{x} - y^2$$

$$y' = \frac{y}{x} - y^2 \qquad \left(\times \ \frac{1}{y^2} \right)$$

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{y} - 1, \qquad u = \frac{1}{y}, \qquad u' = -\frac{1}{y^2}\,y'$$

$$u' + \frac{u}{x} = 1, \qquad x\,u' + u = x \quad \Rightarrow \quad (x\,u)' = x$$

$$\int d\,(x\,u) = \int x\ dx \quad \Rightarrow \quad x\,u = \frac{x^2}{2} + C$$

$$u = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}, \qquad y = \frac{2\,x}{x^2 + C_1} \qquad (C_1 = 2\,C)$$

Im Folgenden werden einige Integralkurven dargestellt.

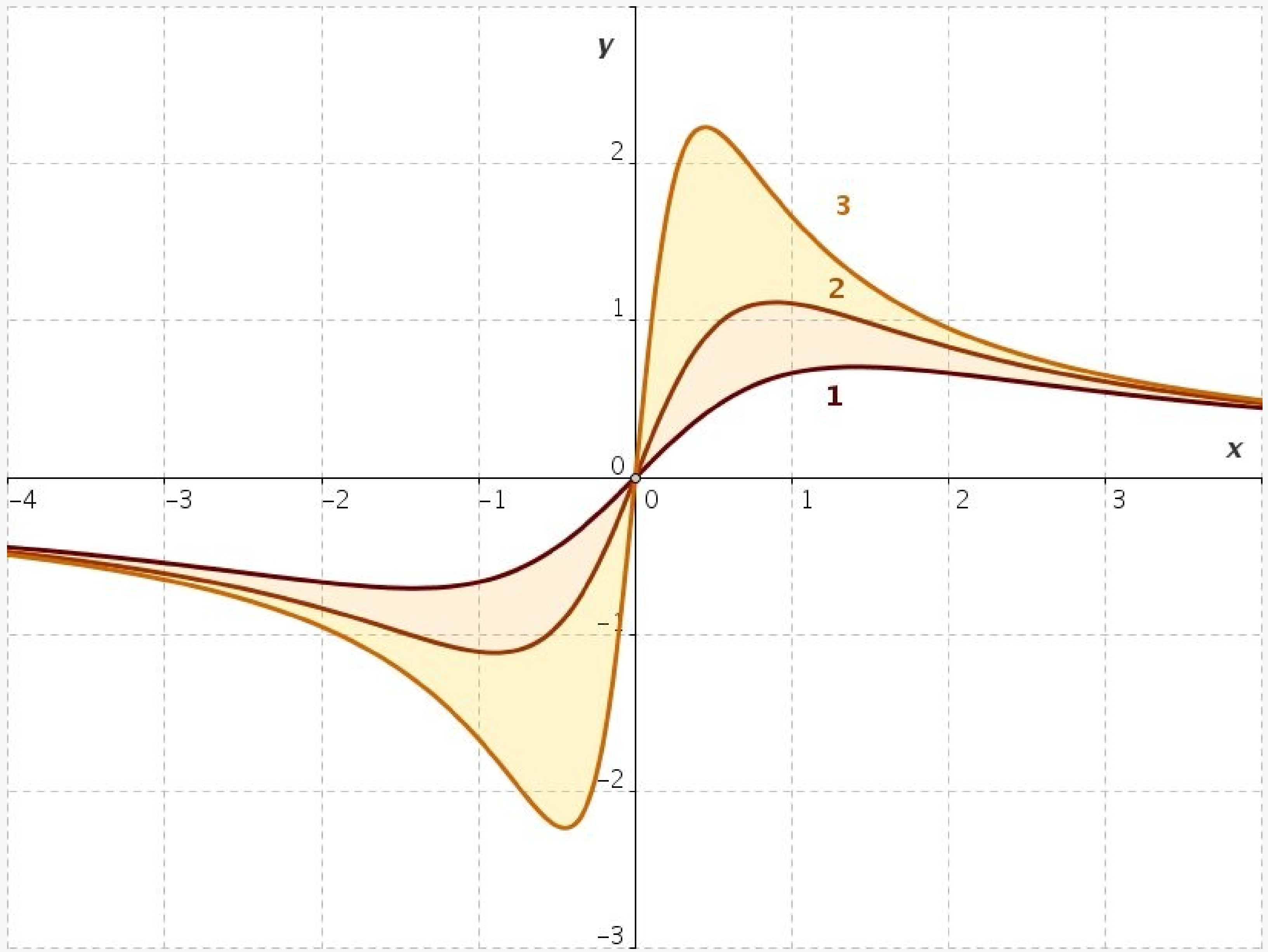


Abb. L1-1: Integralkurven y =2 x / (x² + C), die folgenden Werten der Integrationskonstante C entsprichen: 1) C = 2, 2) C = 0.8, 3) C = 0.2

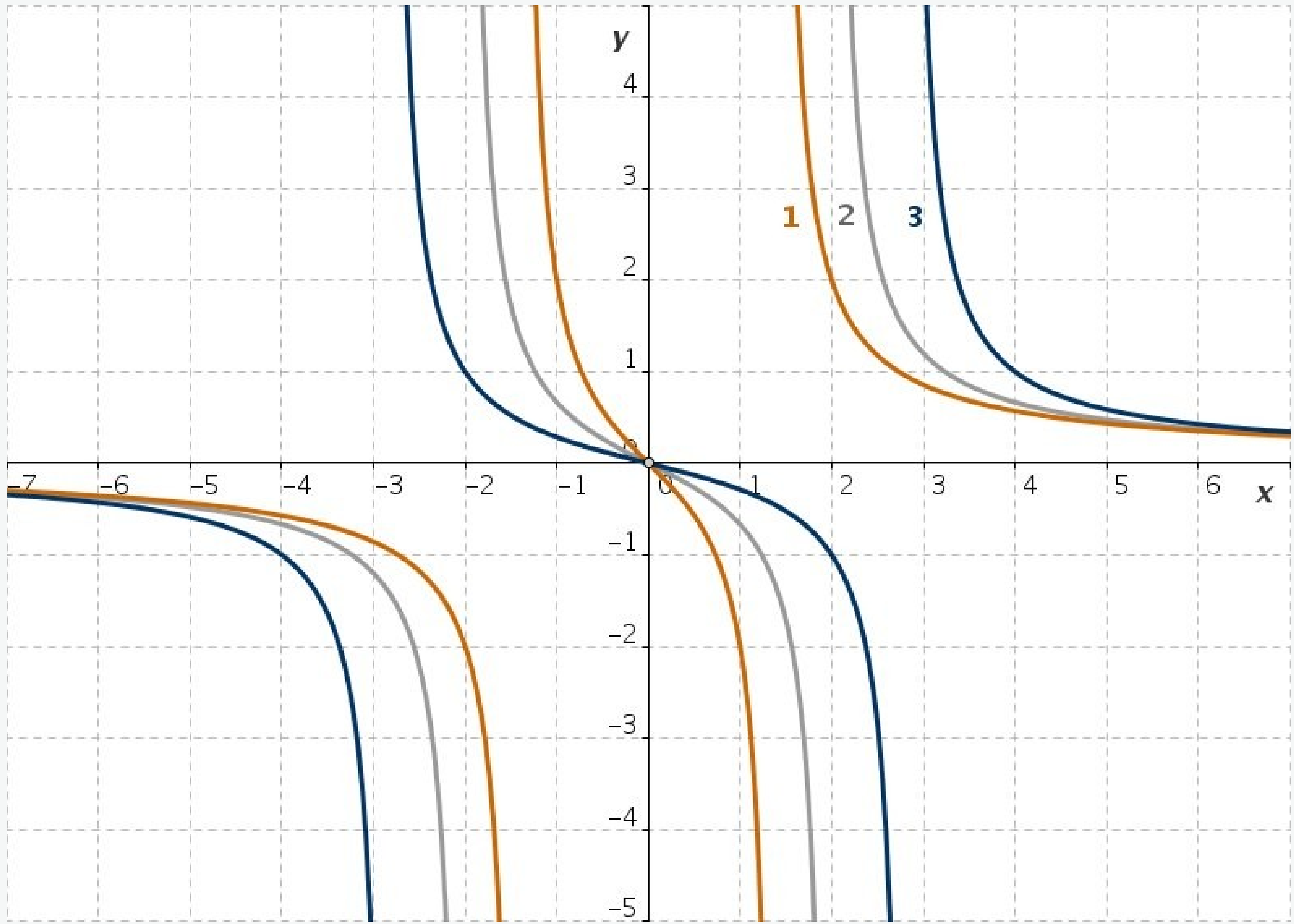


Abb. L1-2: Integralkurven $y = 2x / (x^2 + C)$, die folgenden Werten der Integrationskonstante C entsprichen: 1) $C = -2$, 2) $C = -4$, 3) $C = -8$