



*Die ganze Welt ist Harmonie und Zahl.
Pythagoras*

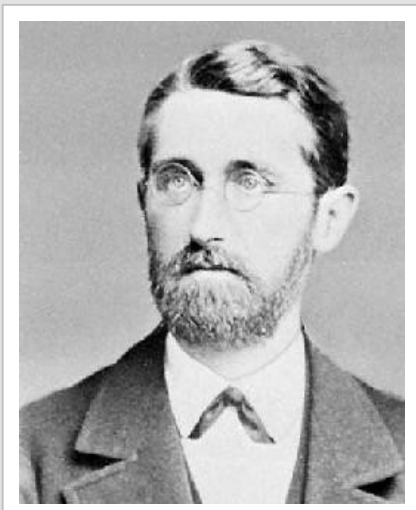
<http://www.firstlutheranchurch-burbank.org/school/images/piano.jpg>

Was sind die Zahlen?

“Aber”, mögen Sie sagen, “nichts davon erschüttert meinen Glauben, dass $2 + 2 = 4$ ergibt”. Sie haben recht, außer in unwesentlichen Fällen ... und nur in unwesentlichen Fällen zweifeln Sie daran, ob ein gewisses Tier ein Hund ist oder eine gewisse Länge weniger als ein Meter ist. Zwei muss zwei von irgendwas sein, und die Aussage “ $2 + 2 = 4$ ” ist wertlos, wenn sie nicht angewendet werden kann. Zwei Hunde plus zwei Hunde sind sicherlich vier Hunde, aber es mögen Fälle vorkommen, wo Sie zweifeln, ob zwei davon wirklich Hunde sind. “Na gut, aber auf jeden Fall sind es vier Tiere”, mögen Sie einwenden. Aber es gibt Mikroorganismen, bei denen es fraglich ist, ob sie Tiere oder Pflanzen sind. “Na gut, dann eben lebende Organismen”, mögen Sie einwenden. Aber es gibt Dinge, bei denen man zweifelt, ob es lebende Organismen sind oder nicht. Sie mögen mir jetzt antworten wollen: “Zwei Größen plus zwei Größen sind vier Größen”. Wenn Sie mir dann erklärt haben, was Sie unter “Größen” verstehen, werde ich meine Argumente wiederholen.

Russel, aus “Angewandte Mathematik: Body and Soul”

“Was sind und was sollen die Zahlen?”



*Richard Dedekind
(1831-1916)*

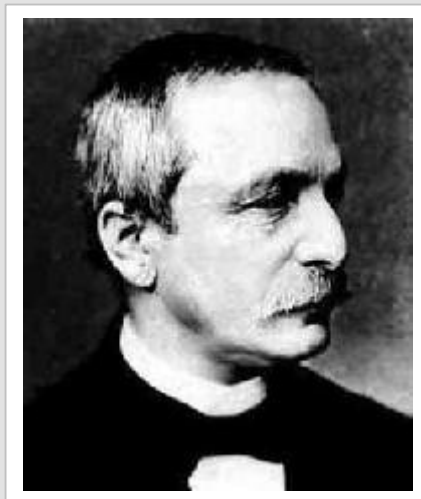
Richard Dedekind war deutscher Mathematiker.

Richard Dedekinds Hauptinteressen lagen auf dem Gebiet der algebraischen Zahlentheorie. Insbesondere wurde er durch seine theoretische Fundierung der reellen (irrationalen) Zahlen mithilfe des sogenannten dedekindschen Schnittes bekannt.

“Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen. Verfolgen wir genau, was wir beim Zählen der Menge tun: wir beziehen Dinge auf Dinge, bilden ein Ding durch ein Ding ab. Ohne diese Fähigkeit ist überhaupt kein Denken möglich ...”

R.Dedekind 1887

“Was sind und was sollen die Zahlen?”



*Leopold Kronecker
(1823-1891)*

“Die natürlichen Zahlen hat Gott gemacht, alles übrige ist Menschenwerk.”

Leopold Kronecker

Die Entwicklungsgeschichte des Zahlenbegriffs dauert an. Unsere heutige Zeit ist ebensowenig im Besitz der letztgültigen Charakterisierung der Zahl wie die früheren Zeitalter.



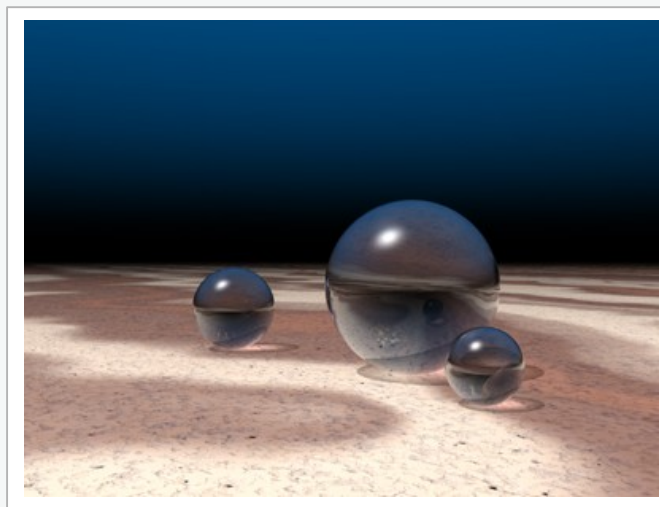
<http://www.bluevisions.ch/zb-bild064-080423triptychon3.jpg>

Zwei grundlegende Tendenzen in der Entwicklung der Mathematik

In der Entwicklung der Mathematik kann man die beiden grundlegenden Tendenzen beobachten: alles als *diskret* oder als *kontinuierlich* zu beschreiben.

Die diskrete Beschreibung der Natur und der Mathematik benutzt einzelne (atomistische) Elemente, wie etwa die Zahlen 1, 2, 3... Wir erkennen diese Elemente individuell.

Die kontinuierliche Beschreibung versucht alle Naturerscheinungen – den Flug, eine Bewegung – zu erklären. Was mit kontinuierlicher Bewegung gemeint ist, glauben wir intuitiv zu wissen. Die Bewegung ist gleichmäßig und ohne Pausen. Für den Begriff der Kontinuität sind die individualistisch auftretenden Zahlen 1, 2, 3, ... nicht das geeignete mathematische Bild.

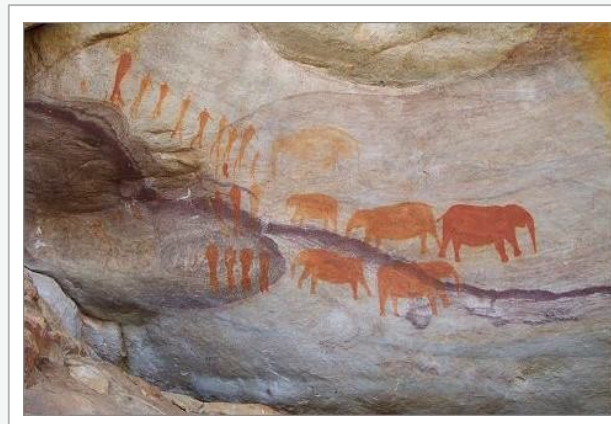


Entwicklung des Zählens

“Wüssten wir mehr über die Geschichte, dann würden wir feststellen, dass sich alle Neuerungen ursprünglich einer großen Weisheit verdanken”

Émile Mâle

Man kann sagen, dass die Entwicklung des Zählens gemeinsam mit der Entwicklung des Denkens vor sich ging. Bis es zum abstrakten Zahlbegriff kam, dauerte es eine sehr lange Zeit. Die Gemeinsamkeit zwischen fünf Fingern und fünf Schafen zu erkennen, war ohne Zweifel einer der genialsten Gedanken des Homo sapiens. Obwohl damit das Zählen und Rechnen nur seinen Anfang nahm, es geht um die Zeit vor 30 000 Jahren, waren alle späteren Erfindungen im Vergleich zu diesem ersten Schritt einfacher.





Anfänge des Zählens kann man schon in den Funden der älteren Steinzeit erkennen, in eingekerbten Knochen und Hölzern. Womöglich dienten die Einschnitte als Zählhilfe: Machte man für jedes Objekt eine Kerbe, konnte man später leicht überprüfen, ob noch alle Schafe oder andere Objekte da waren. Dies war schon ein mathematischer Vorgang.

Die Entwicklung des Zählens:

- Erkennen von unterschiedlichen Anzahlen
- Menge gleichartiger Dinge
- Zeichen für Anzahlen von Mengen
- Zahlbegriff und Zahlssystem

Der Knochen von Ishango.

Größte natürliche Zahl ?



Die Erkenntnis, dass das Zählen durch hinzufügen von 1 immer und immer fortgesetzt werden kann, d.h. die Erkenntnis, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl $n + 1$ gibt, ist ein wichtiger Schritt in der Entwicklung eines Kindes. Bei jeder natürlichen Zahl, die man als größte natürliche Zahl bezeichnen würde, könnte man 1 hinzufügen und behaupten, dass diese Zahl größer sei, und man müsste zugeben, dass es keine größte natürliche Zahl geben kann.

In der Realität scheint es unmöglich, eine natürliche Zahl mit etwa 10^{50} Ziffern im Computer zu speichern, da die Zahl aller Atome im Universum auf eine Zahl dieser Größenordnung geschätzt wird. Man kann sagen, dass es im Prinzip keine größte natürliche Zahl gibt, obwohl wir in der Praxis höchstwahrscheinlich nie mit natürlichen Zahlen größer als 10^{100} zu tun haben.

Größte natürliche Zahl ?



Die Vorstellung, dass es prinzipiell keine größte natürliche Zahl geben kann, ist eng mit dem Begriff der Unendlichkeit verbunden. Die Menge der natürlichen Zahlen ist unendlich groß. Wir können immer weiter zählen und beliebig oft aufhören, um wiederum 1 hinzuzufügen. Die Unendlichkeit bedeutet, dass wir nie an ein Ende kommen. Unendlich viele Schritte bedeutet, dass wir unabhängig von der Zahl der Schritte, die wir schon gemacht haben, die Möglichkeit haben einen weiteren Schritt zu tun.



$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$ – natürliche Zahlen

$\mathbb{N}^* = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$ – positive natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen hat folgende Strukturen und Eigenschaften:

- Addition $27 + 3 = 30$
- Multiplikation $7 \cdot 3 = 21$
- Ordnungsrelation $27 < 30$
 $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$



Die Subtraktion ist auf der Menge der natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar:

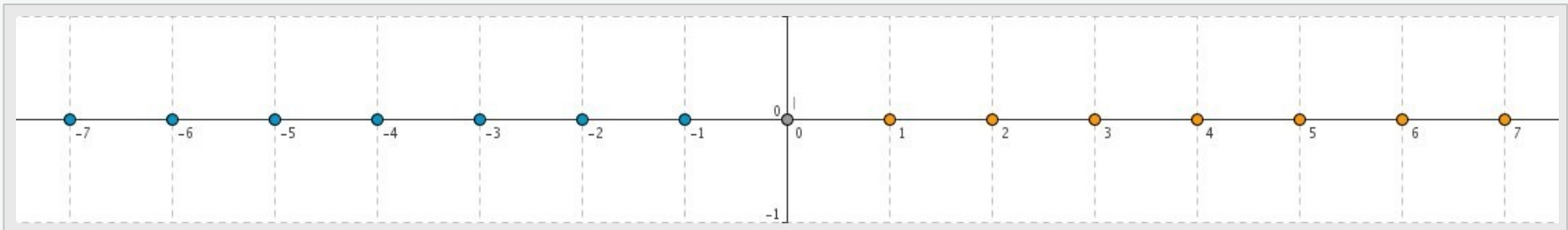
$$27 - 6 = 21 \in \mathbb{N} \quad 6 - 27 = -21 \notin \mathbb{N}$$

Um solche Situationen behandeln zu können, erweitern wir die natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen.

Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots \} - \text{ganze Zahlen}$$

Die ganzen Zahlen können auf einer Zahlengeraden dargestellt werden. Der Zahlenstrahl der natürlichen Zahlen wird nach links erweitert und wir markieren den Punkt links von 0 im Abstand einer Einheit mit -1 usw.



Wir können auch sagen, dass wir die negativen Zahlen $-1, -2, \dots$ aus den natürlichen Zahlen $1, 2, \dots$ durch eine Spiegelung an 0 konstruiert haben, wobei jede natürliche Zahl n zum Spiegelbild $-n$ wird. Somit können wir auch sagen, dass wir die Zahlengerade durch Spiegelung an 0 aus dem Zahlenstrahl konstruiert haben.

Wir definieren den Absolutwert $|p|$ der Zahl p durch

$$|p| = \begin{cases} p, & p \geq 0 \\ -p, & p < 0 \end{cases} \quad (|3|=3, \quad |-3|=3)$$

und den Abstand zweier ganzer Zahlen p und q als $|p - q|$.

Die Menge der ganzen Zahlen hat folgende Strukturen und Eigenschaften:

- Addition
- Multiplikation
- Subtraktion (Existenz von additiven Inversen)

Unterschied von der Menge der natürlichen Zahlen:

Zu jeder ganzen Zahl a gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl b , so dass $a + b = 0$, $b = -a$.
 b nennt man dann das **additive Inverse** von a .



- Ordnungsrelation

Die Division ist auf der Menge der ganzen Zahlen nicht immer ausführbar:

$$6 : 3 = 2 \in \mathbb{Z}, \quad 3 : 6 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Der Grund für die Einführung der rationalen Zahlen ist der, dass wir mit ihnen auch Gleichungen der Form

$$q x = p, \quad x = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0, \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

lösen können. Wir können uns x als ein geordnetes Paar $x = (p, q)$ vorstellen. Solche Zahlen werden auch gebrochene Zahlen, Quotienten genannt.

Die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch ist nicht eindeutig!



$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Man kann Brüche kürzen und erweitern, ohne ihren Wert zu verändern. Eine eindeutige Darstellung als Bruch lässt sich durch die Forderung erreichen, dass Zähler und Nenner teilerfremd sind.

$\frac{p}{1} = p$ – die rationalen Zahlen beinhalten die ganzen Zahlen

Abbrechende Dezimalbrüche : $\frac{3}{5} = 0.6$, $\frac{7}{4} = 1.75$

Periodische Dezimalbrüche : $\frac{1}{3} = 0.333\dots = 0.\bar{3}$, $\frac{19}{9} = 2.111\dots = 2.\bar{1}$

Die Periode wird durch Überstreichen der Ziffernfolge, die sich periodisch wiederholt, gekennzeichnet:

$$3.\bar{7} = 3 + \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \dots, \quad 0.05\bar{31} = \frac{5}{10^2} + \frac{31}{10^4} + \frac{31}{10^6} + \frac{31}{10^8} + \dots$$

Definition:

Jede rationale Zahl lässt sich durch einen abbrechenden oder periodischen Dezimalbruch darstellen.

Umgekehrt lässt sich jeder abbrechende oder periodische Dezimalbruch als Bruch p/q darstellen.

Die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} hat folgende Strukturen und Eigenschaften:

- Addition
- Multiplikation
- Subtraktion (Existenz von additiven Inversen)
- Division (Existenz von multiplikativen Inversen)

Unterschied von der Menge der ganzen Zahlen:

Zu jeder rationalen Zahl a gibt es eine eindeutig bestimmte rationale Zahl b , so dass $a \cdot b = 1$. b nennt man dann das multiplikative Inverse von a

$$a \cdot b = 1, \quad b = a^{-1}$$

- Ordnungsrelation

Jede Größe, die wir durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division rationaler Zahlen erhalten, entspricht wieder einer rationalen Zahl. Mathematisch gesprochen ist die Menge der rationalen Zahlen “abgeschlossen” gegenüber arithmetischen Operationen, da diese Operationen nicht aus der Menge herausführen.

