http://www.palagems.com/Images/mineral_news/featured_fluorite.jpg

Spatprodukt

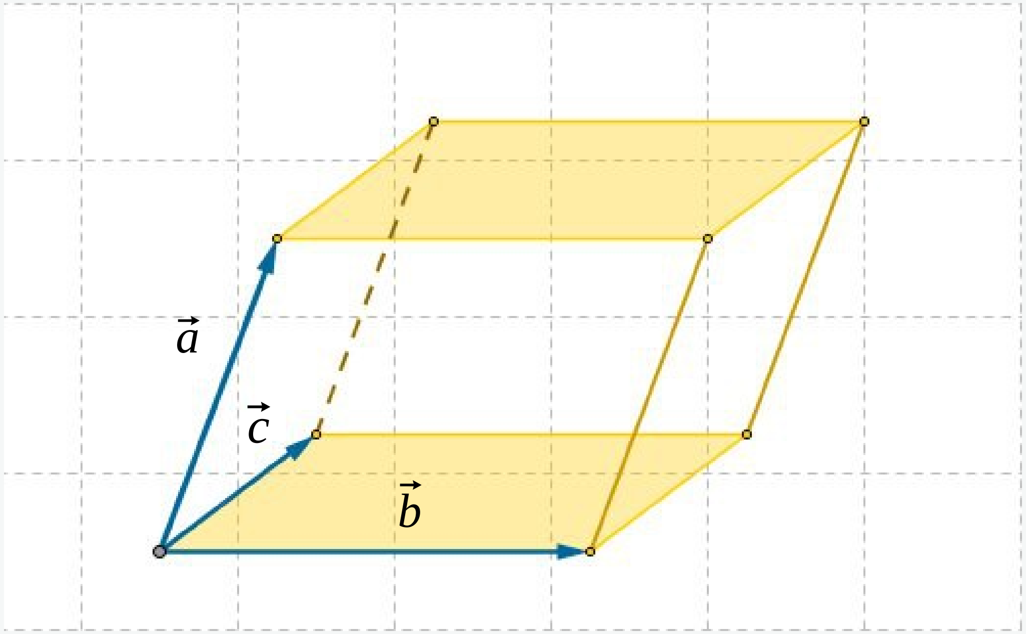
Unter einem Parallelepiped (Synonyme: Spat, Parallelflach) versteht man einen geometrischen Körper, der von sechs paarweise kongruenten in parallelen Ebenen liegenden Parallelogrammen begrenzt wird. Die Bezeichnung Spat rührt vom Kalkspat (Calcit, chemisch: $CaCO_3$) her, dessen Kristalle die Form eines Parallelflachs aufweisen.

1) http://www.clarelibrary.ie/eolas/claremuseum/riches_of_clare/earth/calcite.htm

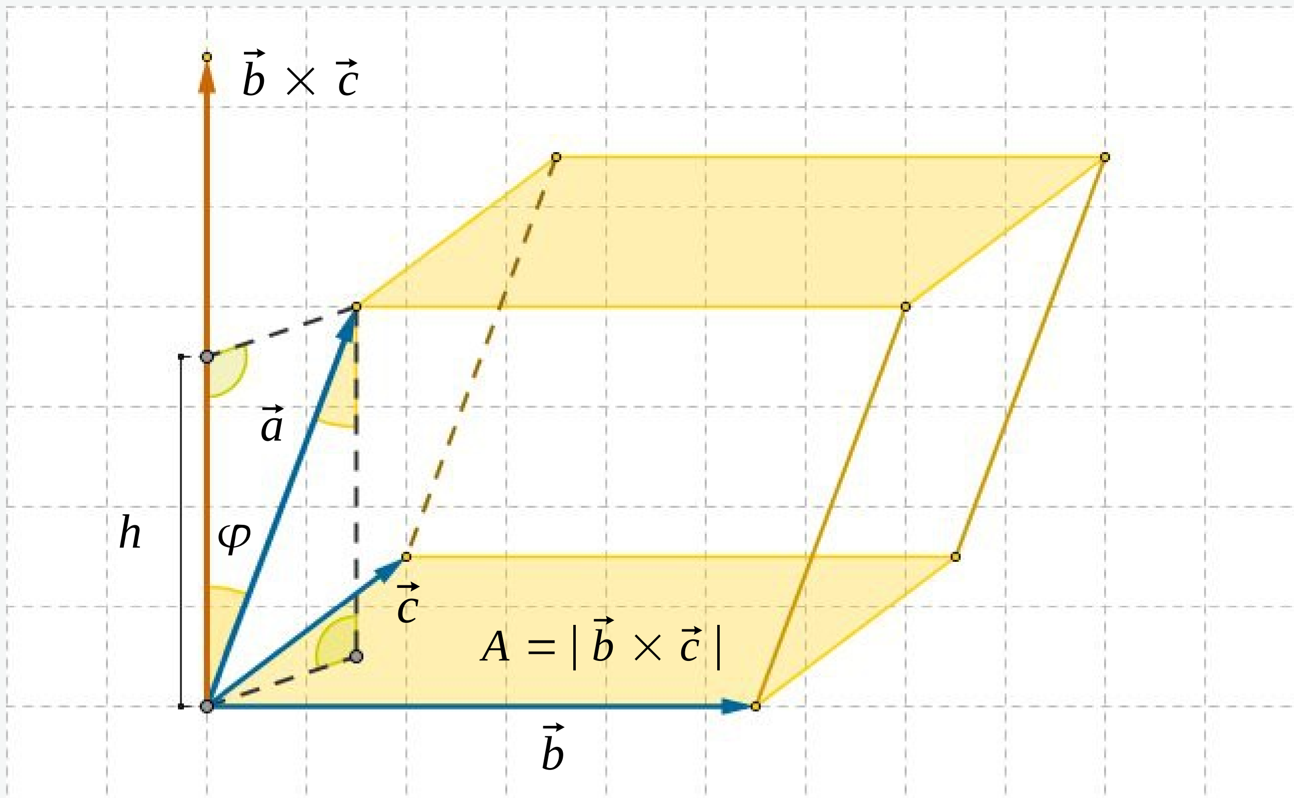
2) http://atlas.nrcan.gc.ca/sites/english/maps/environment/geology/calcite_crystals.jpg

Parallelepiped

Ein Parallelepiped hat zwölf Kanten, von denen je vier parallel verlaufen und untereinander gleich lang sind. Stellt man drei an einem Eckpunkt zusammentreffende Kanten als Vektoren ***a***, ***b*** und ***b*** dar, so ergibt sich das Volumen des Parallelepipeds aus dem Betrag des Spatproduktes (gemischtes Skalar- und Kreuzprodukt).



Dieser Körper ist eindeutig durch drei linear unabhängige Vektoren ***a***, ***b***, ***c*** bestimmt.



$V = A \cdot h$ – Volumen eines Spats

$A = |\vec b \times \vec c|$ – Grundfläche, $h = |\vec a| \cdot \cos\varphi$ – Höhe

$V = A \cdot h = |\vec b \times \vec c| \cdot |\vec a| \cdot \cos\varphi = |\vec a| \cdot |\vec b \times \vec c| \cdot \cos\varphi$

$$\boxed{V_{Spat} = |\vec a \cdot (\vec b \times \vec c)|}$$

Definition: Spatprodukt

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

1. Das Spatprodukt ist eine skalare Größe.

2. Das Spatprodukt wird auch als gemischtes Produkt bezeichnet, da bei seiner Bildung beide Multiplikationsarten (skalare und vektorielle Multiplikationen) auftreten.

3. Das Spatprodukt ist gleich Null $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, wenn

   - einer der drei Vektoren der Nullvektor ist;
   - wenn die drei Vektoren linear abhängig (also komplanar) sind. Diese Beziehung benutzt man, um festzustellen, ob vier Punkte in einer Ebene liegen.

Die Darstellung durch eine dreireihige Determinante

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= a_x (b_y c_z - b_z c_y) + a_y (b_z c_x - b_x c_z) +$$

$$+ a_z (b_x c_y - b_y c_x)$$

Aufgabe 1: Berechnen Sie das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$d)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Spatprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Welches Volumen besitzt der von den drei Vektoren aufgespannte Spat?

$$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben sind die Vektoren ***a***, ***b*** und ***c***. Bestimmen Sie λ so, dass das Spatprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ den Wert a hat

$a\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \lambda-1 \\ 4 \\ \lambda-4 \end{pmatrix}, \quad a = 14$$

$$b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \lambda-1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a = 4$$

$$c)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \lambda-1 \\ 2 \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$a_1 = -8, \qquad a_2 = -16$$

Lösung 1:

$a)\ 0, \quad b)\ -5, \quad c)\ 0, \quad \vec{b} = 2\,\vec{a}\,, \quad d)\ 12, \quad e)\ 0, \quad \vec{c} = -3\,\vec{a}$

Lösung 2:

$a)\ -1, \quad b)\ 0, \quad \vec{b} = -2\,\vec{a} \quad c)\ 2, \quad d)\ 2$

Lösung 3:

$$a)\ \ \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \qquad V_{Spat} = |\,\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\,| = 4$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -4, \qquad (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b} = 4$$

$b)\ 2, \quad c)\ 8, \quad d)\ 12, \quad e)\ 0, \quad \vec{a} = 2\,\vec{b}$

Spatprodukt: Lösung 4

$$a)\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -3\,\lambda^2 + 13\,\lambda + 2$$

$$-3\,\lambda^2 + 13\,\lambda + 2 = 14 \quad \Rightarrow \quad 3\,\lambda^2 - 13\,\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda_{1,\,2} = \frac{1}{6}\left(13 \pm \sqrt{169 - 144}\right) = \frac{13 \pm 5}{6}$$

$$\lambda_1 = 3\,, \qquad \lambda_2 = \frac{4}{3}$$

$$b)\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -2 - 2\,\lambda = 4, \qquad \lambda = -3$$

$$c)\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -4\,\lambda^2$$

$$a_1 = -8: \quad -4\,\lambda^2 = -8, \qquad \lambda_{1,\,2} = \pm\sqrt{2}$$

$$a_1 = -16: \quad -4\,\lambda^2 = -16, \qquad \lambda_{1,\,2} = \pm 2$$

Gegeben sind vier Vektoren ***a, b, c*** und ***d***. Bestimmen Sie welche der folgenden Ausdrücken erklärt sind. Geben Sie in diesen Fällen an, ob das Ergebnis ein Vektor oder ein Skalar ist.

a) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d})$, b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d})$

c) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d})$, d) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

e) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d})$, f) $((\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}) \cdot \vec{d}$

g) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d})$, h) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{c} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{a}$

i) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$, j) $\vec{a} \times \vec{b} + (\vec{c} \cdot \vec{d})$

k) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$, l) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d})$

m) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{d}$, n) $\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{c} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{a}$

Vektoren sind: *a), c), e), f), k), l)*

Skalaren sind: *b), g), i)*

keinen Sinn haben: *d), h), j), m) n)*