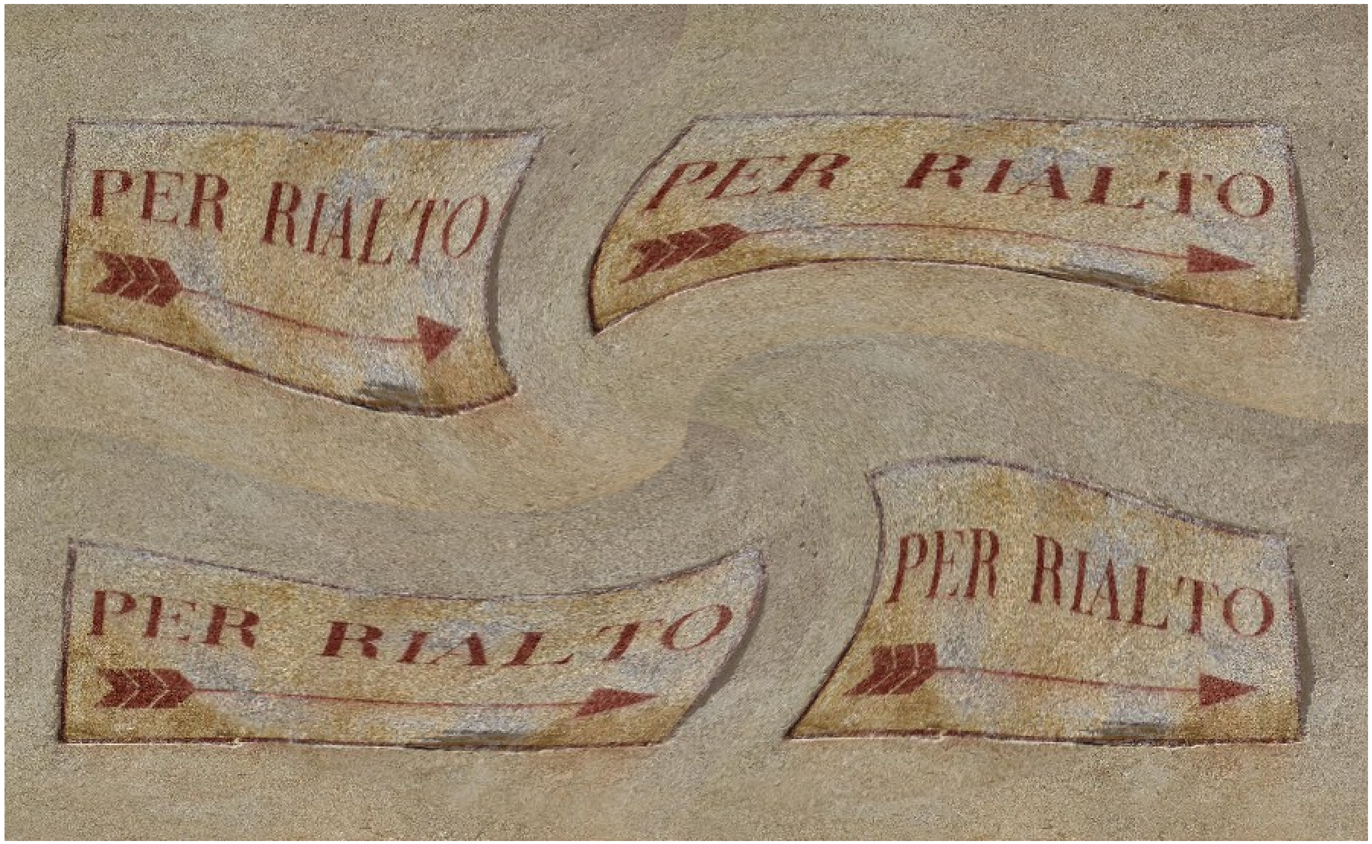

Skalarprodukt: Aufgaben

Aufgabe 1:

Die Einheitsvektoren ***a***, ***b*** und ***c*** erfüllen die Bedingung

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

Bestimmen Sie $\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a}$

Aufgabe 2:

Welche Bedingung sollten die Vektoren ***a*** und ***b*** erfüllen, sodass der Vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ orthogonal zu Vektor $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ ist.

Aufgabe 3:

Die Vektoren ***a*** und ***b*** sind gegeben:

$a)\quad \vec{a} = (1,\ 0,\ -2), \qquad \vec{b} = (-2,\ 1,\ -2)$

$b)\quad \vec{a} = (4,\ -2,\ -4), \qquad \vec{b} = (6,\ -3,\ 2)$

Bestimmen Sie:

$1)\ \vec{a}\cdot\vec{b}, \qquad 2)\ \sqrt{\vec{a}^{\,2}}, \qquad 3)\ \sqrt{\vec{b}^{\,2}}$

$4)\ (2\,\vec{a} - 3\,\vec{b})\cdot(\vec{a} + 2\,\vec{b}), \qquad 5)\ (\vec{a} + \vec{b})^2, \qquad 6)\ (\vec{a} - \vec{b})^2$

Skalarprodukt: Aufgaben

Aufgabe 4:

Die Punkte A, B und C sind gegeben

$a)$ $A = (3,\ -3,\ 4)$, $B = (4,\ -4,\ 2)$, $C = (2,\ -2,\ 5)$

$b)$ $A = (-1,\ -4,\ 2)$, $B = (-2,\ -6,\ 0)$, $C = (-3,\ -5,\ 2)$

Bestimmen Sie:

$$\sqrt{\vec{AB}^{\,2}}, \quad \sqrt{\vec{AC}^{\,2}}, \quad (2\,\vec{AB} - \vec{CB})\cdot(2\,\vec{BC} + \vec{BA})$$

$$(\vec{AB}\cdot\vec{AC})\ \vec{BC}, \quad \vec{AB}\ (\vec{AC}\cdot\vec{BC})$$

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie den Parameter λ so, dass der Vektor a die Länge *3* hat

$a)$ $\vec{a} = (\lambda,\ 2,\ 1)$, $b)$ $\vec{a} = (1,\ \lambda,\ -\lambda)$

$c)$ $\vec{a} = (1 - \lambda,\ 2,\ 1 + \lambda)$

$d)$ $\vec{a} = \vec{AB}$, $A = (\lambda,\ 0,\ 1)$, $B = (1,\ 2,\ 2)$

Skalarprodukt: Aufgaben

Aufgabe 6:

Die Vektoren ***u*** und ***v*** schließen den Winkel φ ein:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3}, \quad |\vec{v}| = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Bestimmen Sie den Winkel α zwischen den Vektoren

$$\vec{p} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{q} = \vec{u} - \vec{v}$$

Lösung 1:

$$\vec a + \vec b + \vec c = 0, \qquad |\vec a| = |\vec b| = |\vec c| = 1$$

$$(\vec a + \vec b + \vec c)^2 = (\vec a + \vec b)^2 + 2(\vec a + \vec b)\vec c + \vec c^{\,2} =$$

$$= \vec a^{\,2} + 2\vec a\,\vec b + \vec b^{\,2} + 2\vec a\,\vec c + 2\vec b\,\vec c + \vec c^{\,2} =$$

$$= 3 + 2(\vec a\,\vec b + \vec a\,\vec c + \vec b\,\vec c) = 0, \qquad \vec a\,\vec c = \vec c\,\vec a$$

$$\vec a\,\vec b + \vec b\,\vec c + \vec c\,\vec a = -\frac{3}{2}$$

Lösung 2:

$$(\vec a + \vec b) \perp (\vec a - \vec b) \quad \Rightarrow \quad (\vec a + \vec b)\cdot(\vec a - \vec b) = 0$$

$$(\vec a + \vec b)\cdot(\vec a - \vec b) = \vec a^{\,2} - \vec b^{\,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec a| = |\vec b|$$

$a\,)\quad \vec{a} = (1,\ 0,\ -2)\,, \qquad \vec{b} = (-2,\ 1,\ -2)$

$1\,)\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 2, \qquad 2\,)\quad \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{5}\,, \qquad 3\,)\quad \sqrt{\vec{b}^{\,2}} = 3$

$4\,)\quad (2\,\vec{a} - 3\,\vec{b})\cdot(\vec{a} + 2\,\vec{b}) = -42$

$5\,)\quad (\vec{a} + \vec{b})^{2} = 18, \qquad 6\,)\quad (\vec{a} - \vec{b})^{2} = 10$

$b\,)\quad \vec{a} = (4,\ -2,\ -4)\,, \qquad \vec{b} = (6,\ -3,\ 2)$

$1\,)\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 22, \qquad 2\,)\quad \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = 6, \qquad 3\,)\quad \sqrt{\vec{b}^{\,2}} = 7$

$4\,)\quad (2\,\vec{a} - 3\,\vec{b})\cdot(\vec{a} + 2\,\vec{b}) = -200$

$5\,)\quad (\vec{a} + \vec{b})^{2} = 129, \qquad 6\,)\quad (\vec{a} - \vec{b})^{2} = 41$

$$A = (3,\ -3,\ 4)\,, \qquad B = (4,\ -4,\ 2)\,, \qquad C = (2,\ -2,\ 5)$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A) = (1,\ -1,\ -2)$$

$$\vec{BC} = (x_C - x_B,\ y_C - y_B,\ z_C - z_B) = (-2,\ 2,\ 3)$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A,\ y_C - y_A,\ z_C - z_A) = (-1,\ 1,\ 1)$$

$$\sqrt{\vec{AB}^{\,2}} = \sqrt{6}\,, \qquad \sqrt{\vec{AC}^{\,2}} = \sqrt{3}$$

$$(2\,\vec{AB} - \vec{CB})\cdot(2\,\vec{BC} + \vec{BA}) = (2\,\vec{AB} + \vec{BC})\cdot(2\,\vec{BC} - \vec{AB}) = -8$$

$$\vec{AB} = -\vec{BA}\,, \qquad \vec{BC} = -\vec{CB}\,, \qquad \vec{AC} = -\vec{CA}$$

$$(\vec{AB}\cdot\vec{AC})\ \vec{BC} = -4\,\vec{BC} = (8,\ -8,\ -12)$$

$$\vec{AB}\ (\vec{AC}\cdot\vec{BC}) = 7\,\vec{AB} = (7,\ -7,\ -14)$$

$$A = (-1,\ -4,\ 2)\,, \qquad B = (-2,\ -6,\ 0)\,, \qquad C = (-3,\ -5,\ 2)$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A) = (-1,\ -2,\ -2)$$

$$\vec{BC} = (x_C - x_B,\ y_C - y_B,\ z_C - z_B) = (-1,\ 1,\ 2)$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A,\ y_C - y_A,\ z_C - z_A) = (-2,\ -1,\ 0)$$

$$\sqrt{\vec{AB}^{\,2}} = 3, \qquad \sqrt{\vec{AC}^{\,2}} = \sqrt{5}$$

$$(2\,\vec{AB} - \vec{CB})\cdot(2\,\vec{BC} + \vec{BA}) = (2\,\vec{AB} + \vec{BC})\cdot(2\,\vec{BC} - \vec{AB}) = -21$$

$$(\vec{AB} \cdot \vec{AC})\ \vec{BC} = 4\,\vec{BC} = (-4,\ 4,\ 8)$$

$$\vec{AB}\ (\vec{AC} \cdot \vec{BC}) = \vec{AB} = (-1,\ -2,\ -2)$$

a) $\vec{a} = (\lambda, 2, 1), \quad |\vec{a}| = \sqrt{\lambda^2 + 5} = 3, \quad \lambda^2 + 5 = 9$

$\lambda^2 = 4, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2$

b) $\vec{a} = (1, \lambda, -\lambda), \quad |\vec{a}| = \sqrt{1 + 2\lambda^2} = 3, \quad 1 + 2\lambda^2 = 9$

$\lambda^2 = 4, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2$

c) $\vec{a} = (1 - \lambda, 2, 1 + \lambda), \quad |\vec{a}| = \sqrt{4 + (\lambda - 1)^2 + (1 + \lambda)^2} = 3$

$\lambda^2 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$

d) $\vec{a} = \vec{AB}, \quad A = (\lambda, 0, 1), \quad B = (1, 2, 2)$

$\vec{a} = (1 - \lambda, 2, 1)$

$|\vec{a}|^2 = 5 + (1 - \lambda)^2 = 9, \quad (1 - \lambda)^2 = 4, \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$

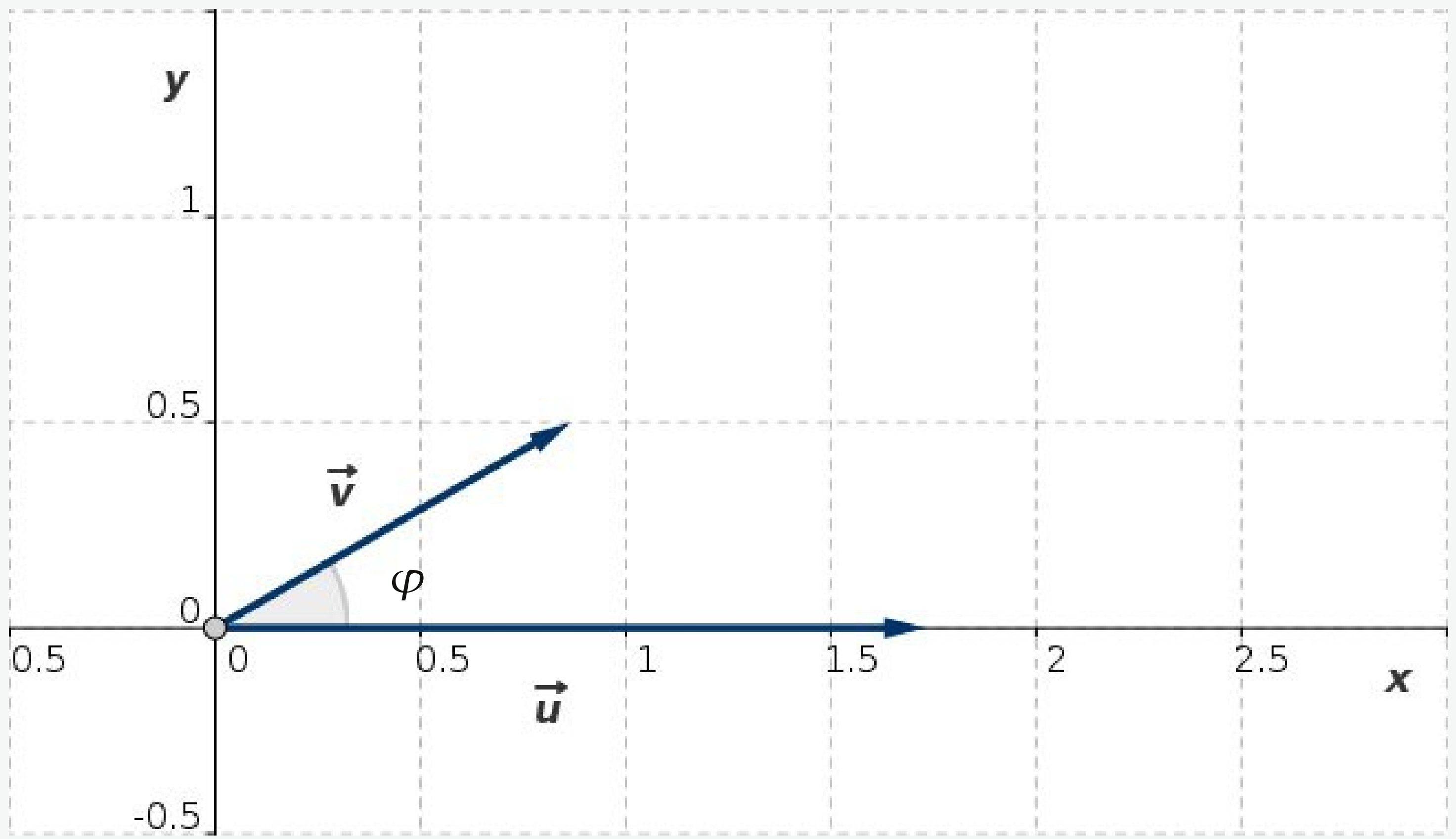

Abb. L6a: Die Bedingung der Aufgabe 3

$$|\,\vec{u}\,| = u = \sqrt{3}\,, \quad |\,\vec{v}\,| = v = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ sind Diagonalen des durch die Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ aufgespannten Parallelogramms.

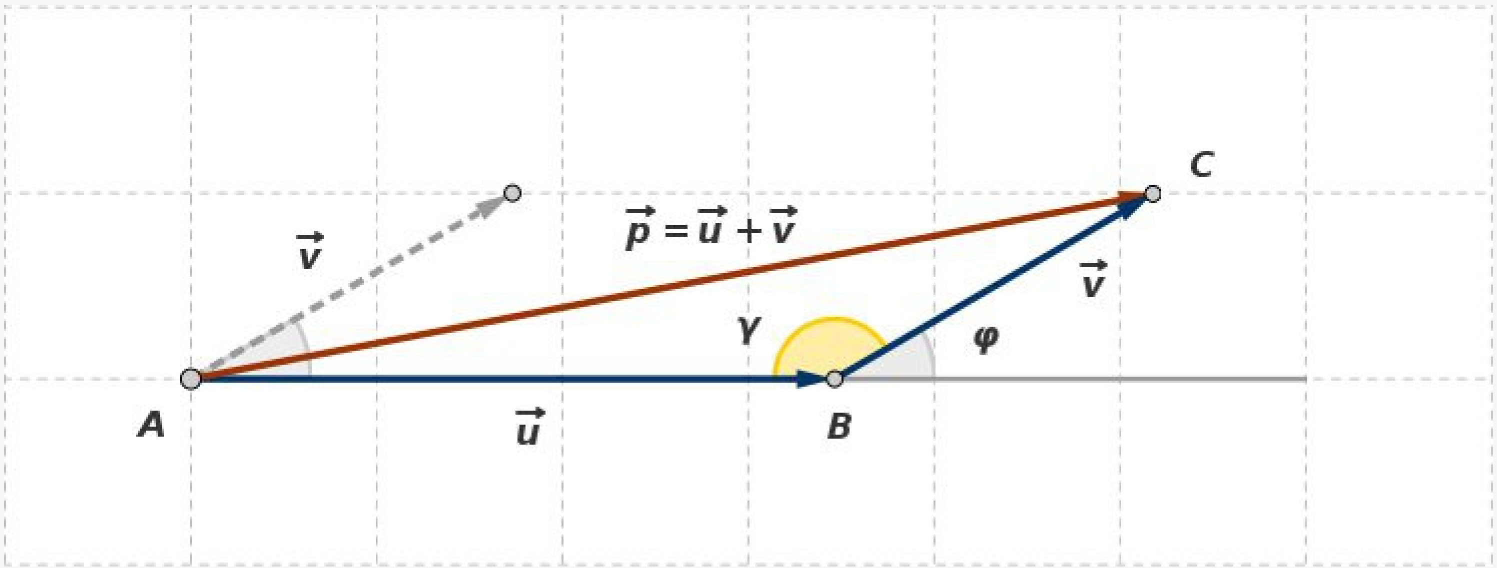

Abb. L6b: Zur Bestimmung des Betrags des Vektors ***p***

$$|\,\vec{p}\,| = AC\,, \qquad |\,\vec{u}\,| = AB\,, \qquad |\,\vec{v}\,| = BC\,, \qquad \gamma = 180^\circ - \varphi$$

$$p^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC \cos(180^\circ - \varphi) =$$

$$= u^2 + v^2 + 2\,u \cdot v \cos\varphi = 3 + 1 + 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 7$$

$$|\,\vec{p}\,| = p = \sqrt{7}$$

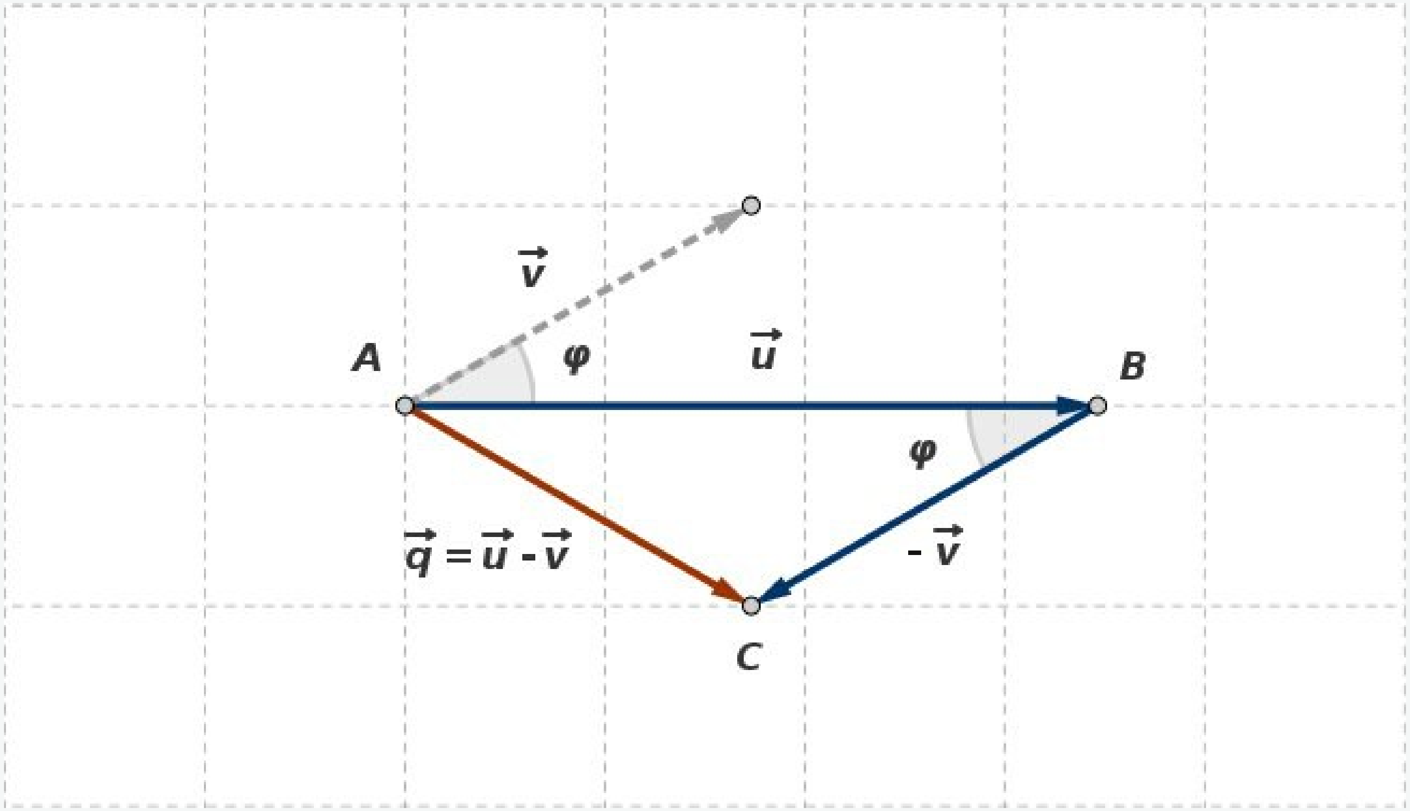

*Abb. L6c: Zur Bestimmung des Betrags des Vektors **q***

$$q^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC \cos\varphi =$$

$$= u^2 + v^2 - 2\,u \cdot v \cos\varphi = 3 + 1 - 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 4 - 3 = 1$$

$$|\,\vec{q}\,| = 1$$

$$\vec{p} = \vec{u} + \vec{v}\,, \quad \vec{q} = \vec{u} - \vec{v}\,, \quad |\,\vec{u}\,| = \sqrt{3}\,, \quad |\,\vec{v}\,| = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\,\vec{p}\,| \cdot |\,\vec{q}\,| \cos\alpha\,, \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\,\vec{p}\,| \cdot |\,\vec{q}\,|}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = (\sqrt{3})^2 - 1 = 2$$

$$|\,\vec{p}\,| = \sqrt{7}\,, \qquad |\,\vec{q}\,| = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\,\vec{p}\,| \cdot |\,\vec{q}\,|} = \frac{2}{\sqrt{7}}\,, \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$$