Vektorrechnung im dreidimensionalen Raum

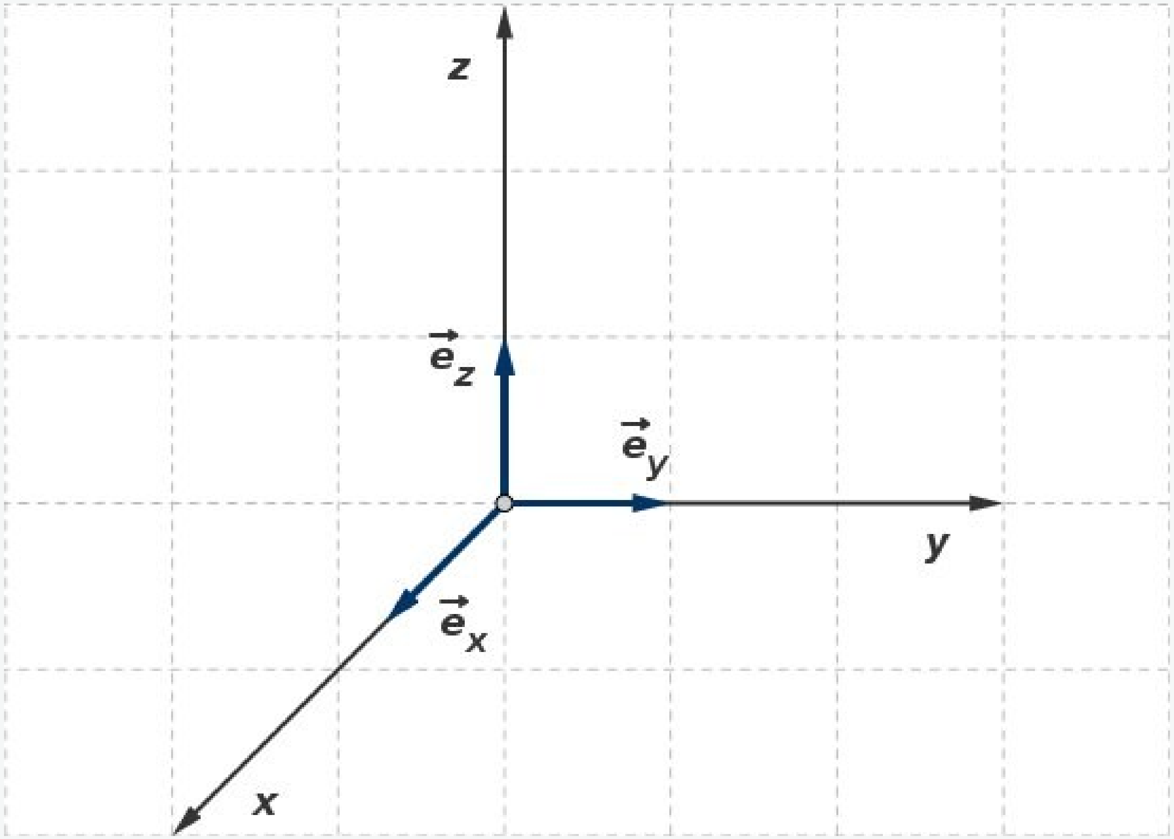
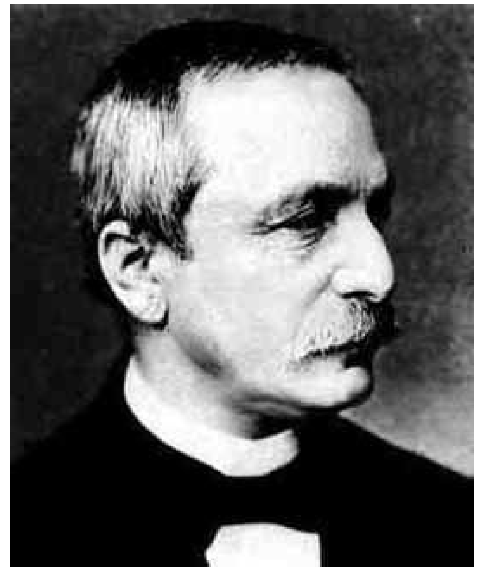


Abb. 1-1: 3D kartesisches Koordinatensystem, Basisvektoren

Kanonische Einheitsvektoren (Basisvektoren):

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Leopold Kronecker (1823-1891)

Die Einheitsvektoren bilden eine orthonormierte Basis:

$$|\vec{e}_x|^2 = |\vec{e}_y|^2 = |\vec{e}_z|^2 = 1, \qquad \vec{e}_x \perp \vec{e}_y \perp \vec{e}_z$$

Orthonormalität: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

Kronecker-Symbol:

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}}$$

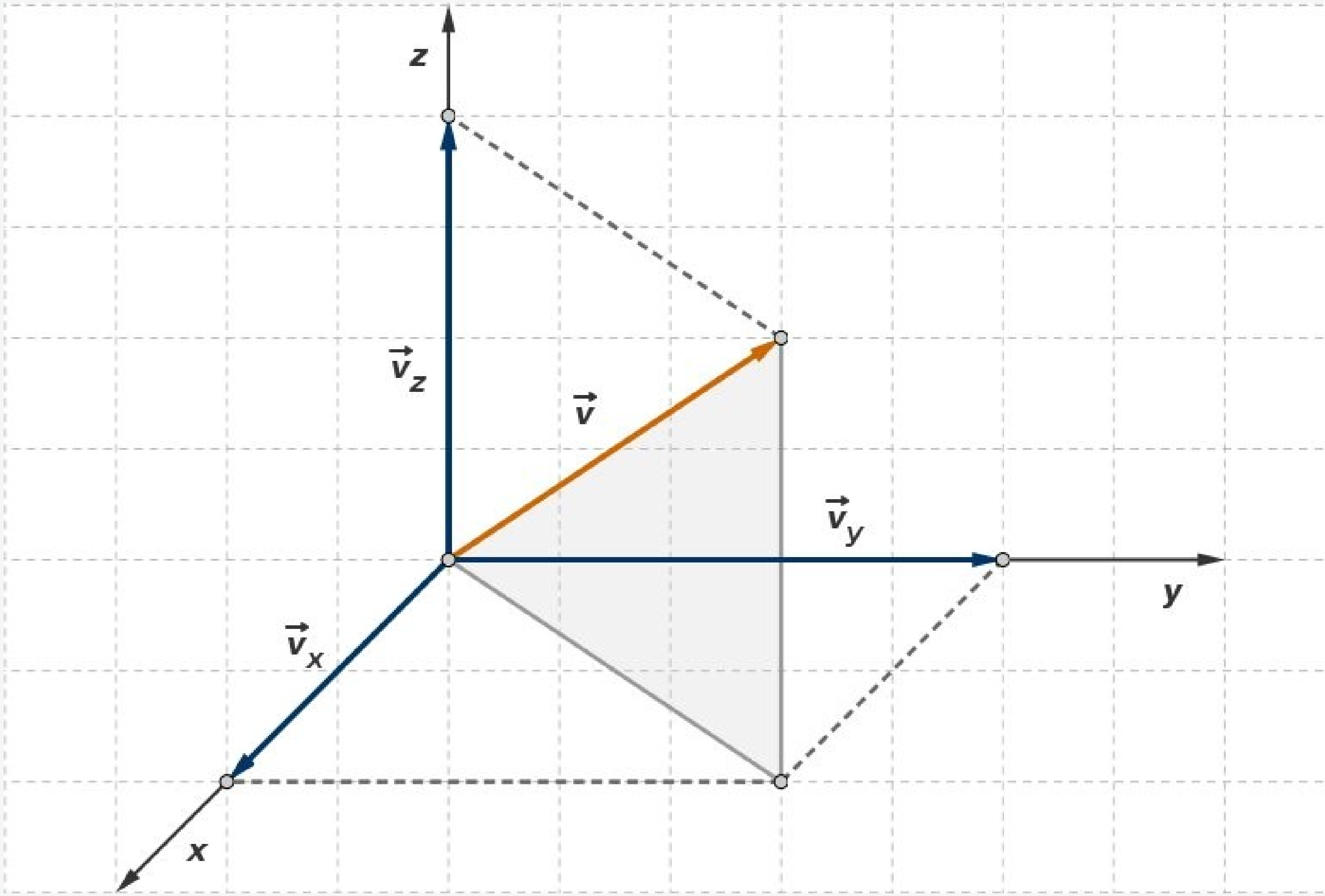


Abb. 1-1: Zerlegung eines Vektors ***v*** *in Komponenten*

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Komponentendarstellung eines Vektors:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Vektorkomponenten des Vektors *v*:

$$\vec{v}_x = v_x \vec{e}_x, \qquad \vec{v}_y = v_y \vec{e}_y, \qquad \vec{v}_z = v_z \vec{e}_z$$

Vektorkoordinaten des Vektors *v*:

$$v_x, \quad v_y, \quad v_z$$

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1), \qquad P_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1)\,\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\,\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\,\vec{e}_z =$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$|\,\vec{u}\,| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

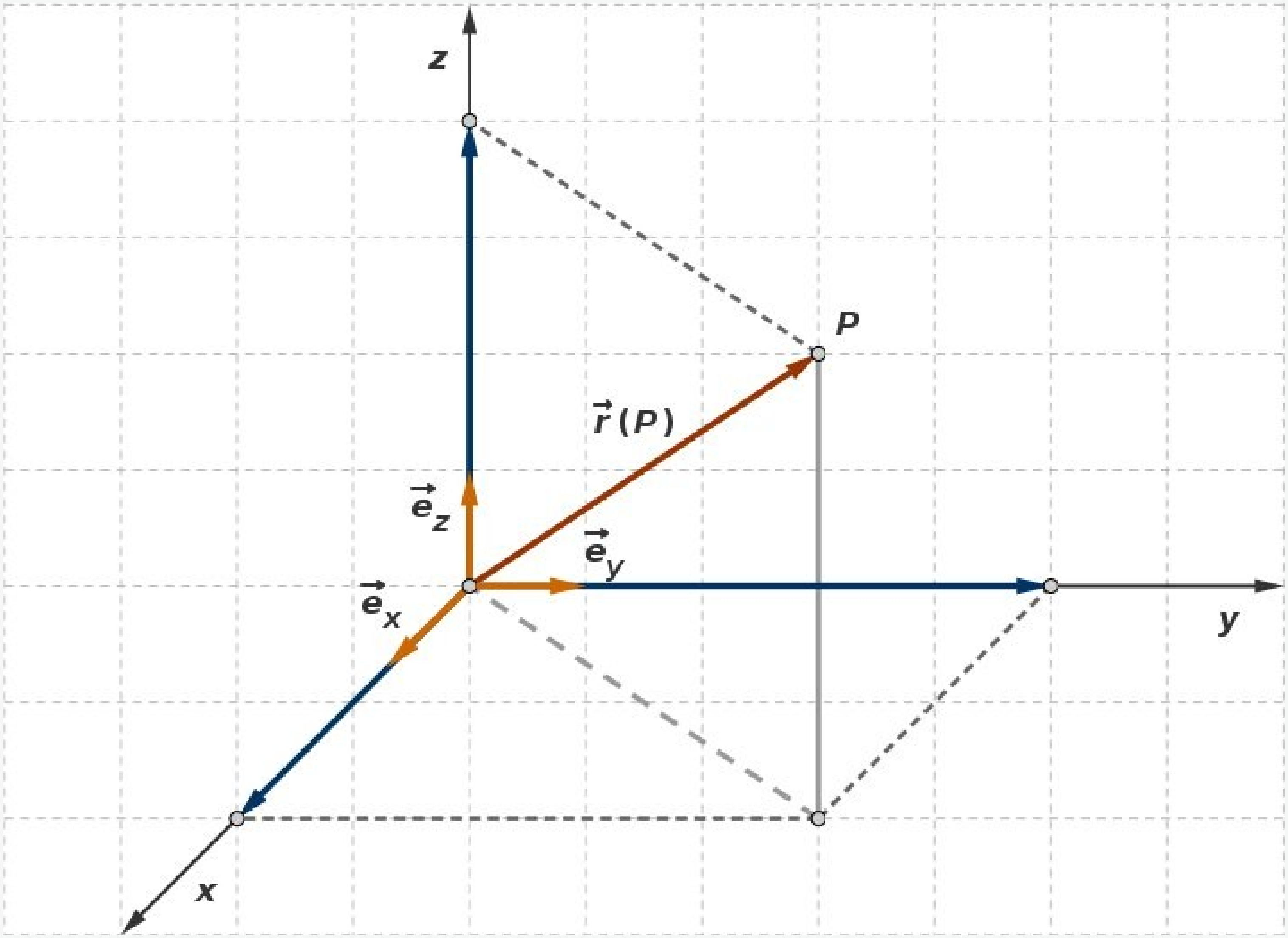


Abb. 1-2: Zerlegung eines Vektors **r***(P) in Komponenten*

$$P = (x\,,\,y\,,\,z)$$

Ortsvektor des Punktes P:

$$\vec{r}\,(P) = x\;\vec{e}_x + y\;\vec{e}_y + z\;\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nullvektor: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normierung: $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{|\,\vec{r}\,|}$

Betrag: $|\,\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Einen gegebenen, vom Nullvektor verschiedenen Vektor ***u*** kann man normieren, indem man ihn durch seinen Betrag dividiert:

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\,\vec{u}\,|}$$

Dieser Vektor ist der Einheitsvektor. Er zeigt in dieselbe Richtung wie ***u***. Das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren gleich dem Kosinus des Winkels zwischen den beiden Vektoren.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = a\ b \cdot \cos\varphi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x,\ a_y,\ a_z) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Der von diesen Vektoren eingeschlossene Winkel

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b} \quad (\vec{a},\ \vec{b} \neq 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 = a^2 \quad \Rightarrow$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Berechnen Sie das Skalarprodukt folgender Vektoren

$$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad d)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}, \qquad f)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -34 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe 2:</u> Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten so, dass das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ den Wert k hat

$$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad k = -10$$

$$b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k = 2$$

$$c)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ b_2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad k = 12$$

$$d)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad k = 4$$

Skalarprodukt: Lösungen 1, 2

Lösung 1:

$a)\ -8, \quad b)\ 0, \quad c)\ 6, \quad d)\ 0, \quad e)\ -6, \quad f)\ -1$

Lösung 2:

$a)\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -15 + a_2 = k, \quad k = -10 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 5, \quad b_1 \in \mathbb{R}$

$b)\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 8 + 2a_3 = k, \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -3$

$c)\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -6 + 3a_3 = k, \quad k = 12 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 6, \quad b_2 \in \mathbb{R}$

$d)\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -5 + a_4 b_4 = k, \quad k = 4 \quad \Rightarrow \quad a_4 b_4 = 9, \quad b_3 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die drei Vektoren ein rechtwinkliges Dreieck bilden

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie den Betrag folgender Vektoren

$$\vec{a} = (2, -3, 1), \qquad \vec{b} = (-2, -\sqrt{5}, 1, \sqrt{3})$$

$$\vec{c} = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \qquad \vec{d} = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, -1\right)$$

$$\vec{f} = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}}, 1\right), \qquad \vec{g} = \left(2, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{h} = (1, 2, 5, 3, 4, -3, 0)$$

Lösung 3: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}\,, \qquad \vec{a} \perp \vec{b}$

Lösung 4:

$$\vec{a} = (2,\ -3,\ 1)\,, \qquad |\,\vec{a}\,| = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = (-2,\ -\sqrt{5}\,,\ 1,\ \sqrt{3})\,, \qquad |\,\vec{b}\,| = \sqrt{13}$$

$$\vec{c} = \left(\sqrt{2}\,,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ 1\right), \qquad |\,\vec{c}\,| = \sqrt{\frac{23}{6}} \simeq 1.958$$

$$\vec{d} = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,,\ \sqrt{2+\sqrt{2}}\,,\ -1\right), \qquad |\,\vec{d}\,| = \sqrt{5}$$

$$\vec{f} = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\,,\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\,,\ 1\right), \qquad |\,\vec{f}\,| = \sqrt{5}$$

$$\vec{g} = \left(2,\ \sqrt{2}\,,\ \sqrt{3}\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad |\,\vec{g}\,| = \frac{\sqrt{38}}{2} = \sqrt{\frac{19}{2}} \simeq 3.082$$

$$\vec{h} = (1,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ -3,\ 0)\,, \qquad |\,\vec{h}\,| = 8$$

Aufgabe 5: Berechnen Sie die Beträge folgender Vektoren und geben Sie jeweils die Einheitsvektoren an

$$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{4} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,\beta \\ -2 \\ \sqrt{2}\,\beta \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \gamma} \\ \sqrt{1 + \gamma} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\beta > 0, \qquad -1 < \gamma < 1$$

$$a)\quad |\vec{a}| = \sqrt{38}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}, \qquad |\vec{c}| = \sqrt{6}, \qquad |\vec{d}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_b = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad |\vec{a}| = 2, \qquad |\vec{b}| = 3, \qquad |\vec{c}| = 3$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_b = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{4} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_c = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$c)\quad |\vec{a}| = \sqrt{3+\alpha^2}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{4+5\beta}, \qquad |\vec{c}| = \sqrt{5}$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{3+\alpha^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_b = \frac{1}{\sqrt{4+5\beta}} \begin{pmatrix} \sqrt{3\beta} \\ -2 \\ \sqrt{2\beta} \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_c = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\gamma} \\ \sqrt{1+\gamma} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$