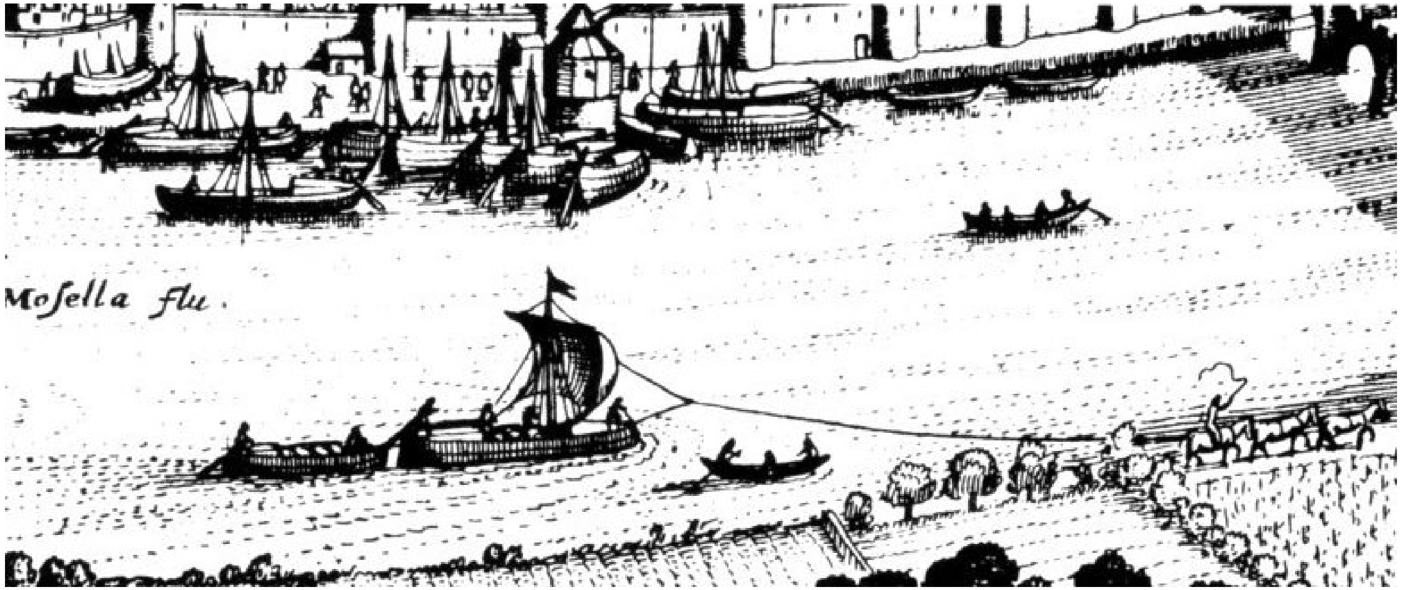
Ilja Repin "Die Wolgatreidler" (1873)

Das Skalarprodukt



http://www.rheinschifffahrtsgeschichte.de/Mainzer%20Pano%20Dateien/Tierer%20Treideln.jpg

“Treideln” heißt eine Methode, mit der früher Schiffe auf Flüssen stromaufwärts bewegt wurden. Auf so genannten Treidelpfaden am Ufer zogen dabei Menschen oder Pferde das Schiff an Seilen. Wie kann man rechnerisch ermitteln, welcher Anteil der aufgewandten Zugkraft der Strömungsrichtung entgegenwirkt?

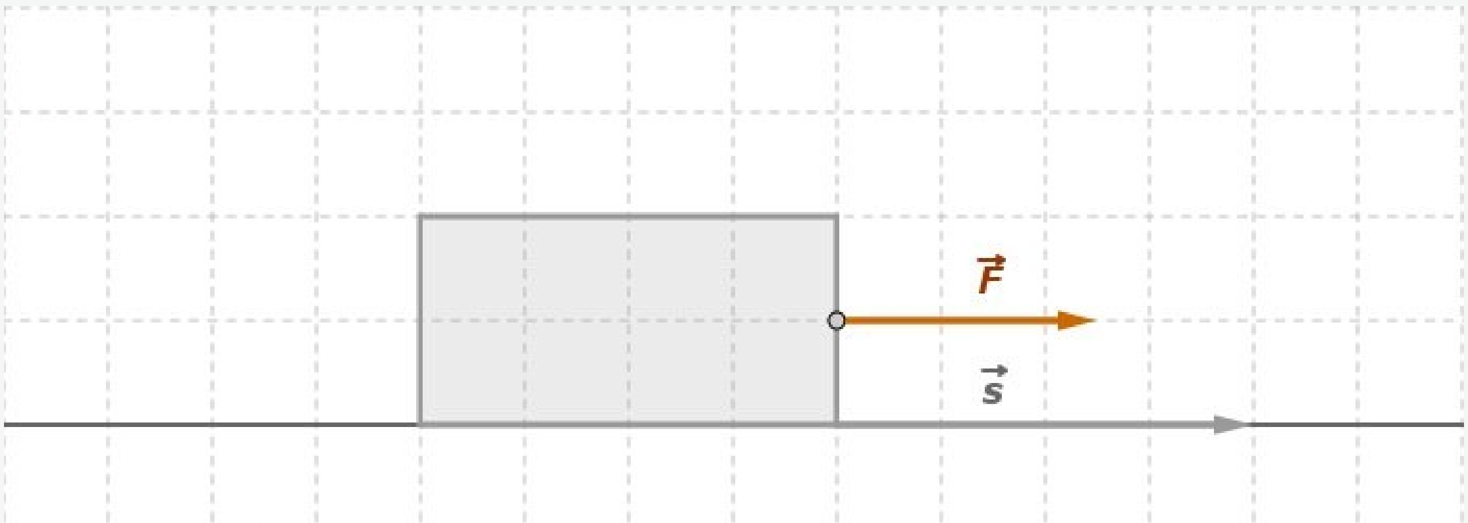


Abb. 1-1: Die Richtungen ***F*** *und* ***s*** *sind gleich*

Der Begriff Arbeit spielt in der Physik eine zentrale Rolle. So wird z.B. die Arbeit W berechnet, die man aufwenden muss, wenn man einen Körper der Masse m längs eines Vektors $\boldsymbol{s}$ (Weg) durch eine konstante Kraft $\boldsymbol{F}$ verschiebt. Stimmen die Richtungen von $\boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{F}$ überein, so gilt

$$W = |\, \vec{F} \,| \cdot |\, \vec{s} \,|$$

*Abb. 1-2: Die Richtungen **F** und **s** sind verschieden*

Sind die Richtungen von $\boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{F}$ verschieden, so kann nur der Anteil von $\boldsymbol{F}$ berücksichtigt werden, der in Richtungen von $\boldsymbol{s}$ wirkt. Wie kann man in diesem allgemeinen Fall W berechnen, wenn

- neben den Beträgen $|\boldsymbol{F}|$ und $|\boldsymbol{s}|$ auch der Winkel zwischen $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{s}$ bekannt ist,
- $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{s}$ nur in vektorieller Darstellung gegeben sind?

Obwohl die Arbeit eine skalare Größe ist, ist sie das Produkt von zwei vektoriellen Größen, der Kraft und des Weges. Deshalb untersuchen wir die Multiplikation von Vektoren.

Da Vektoren sowohl Richtung, als auch Betrag haben, können sie nicht in derselben Weise wie Skalare multipliziert werden. Wir müssen definieren, was die Operation der Multiplikation von Vektoren bedeutet. Dabei betrachten wir drei in der Physik wichtige Möglichkeiten:

- die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar,
- die Multiplikation eines Vektors mit einem zweiten Vektor, bei der das Produkt ein Skalar ergibt,
- die Multiplikation eines Vektors mit einem zweiten Vektor, bei der das Produkt einen weiteren Vektor ergibt.

Im Folgenden definieren wir die zweite Möglichkeit.

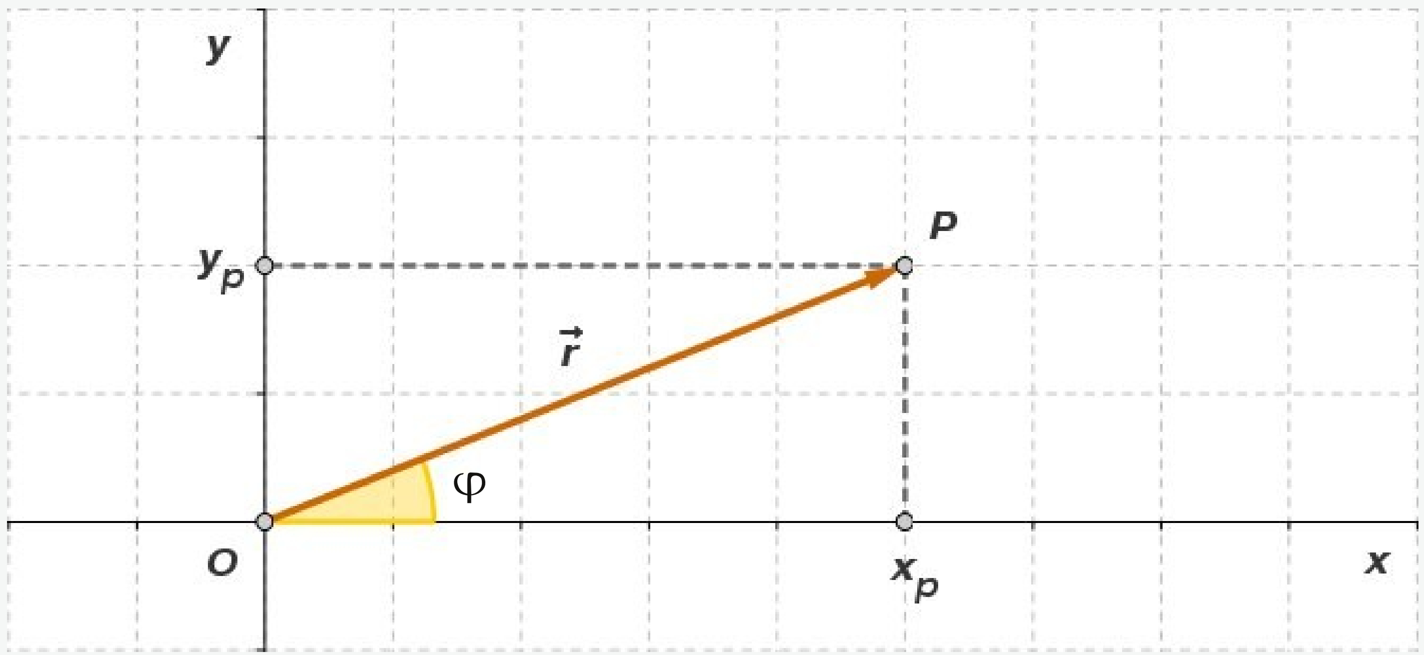


Abb. 2-1: Zur Definition der Polarkoordinaten eines Vektors

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$x_p = |\,\vec{r}\,| \cos\varphi\,, \qquad y_p = |\,\vec{r}\,| \sin\varphi$$

Es ist möglich, einen zweidimensionalen Vektor in Abhängigkeit seiner Länge und des Winkels, den er mit der ersten Koordinatenachse einschließt, darzustellen, d.h.

$$\vec{r} = |\,\vec{r}\,| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

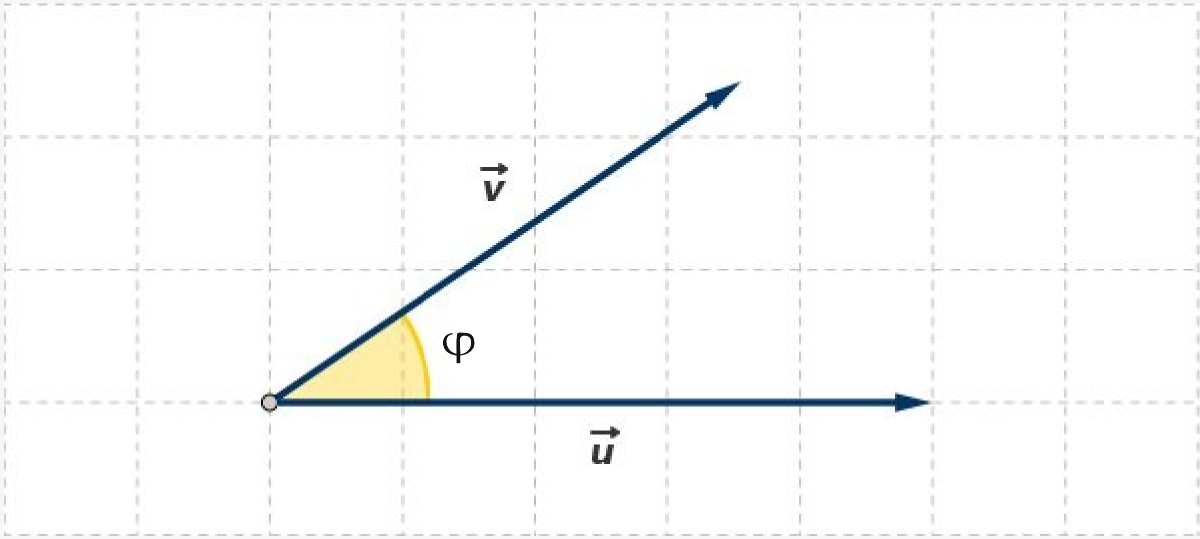


Abb. 2-2: Zum Begriff des Skalarprodukts zweier Vektoren

Definition:

Unter dem Skalarprodukt $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ zweier Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ wird das Produkt aus den Beträgen der beiden Vektoren und dem Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels verstanden

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi = u \ v \cdot \cos\varphi \qquad (0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ)$$

Aufgabe 1:

Zwei Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ sind gegeben, die einen Winkel φ einschließen. Zeichnen Sie die Größe des Skalarprodukts $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ als eine Fläche

$$|\vec{u}| = 3, \quad |\vec{v}| = 2, \quad a)\ \varphi = 30^\circ, \quad b)\ \varphi = 45^\circ, \quad c)\ \varphi = 60^\circ$$

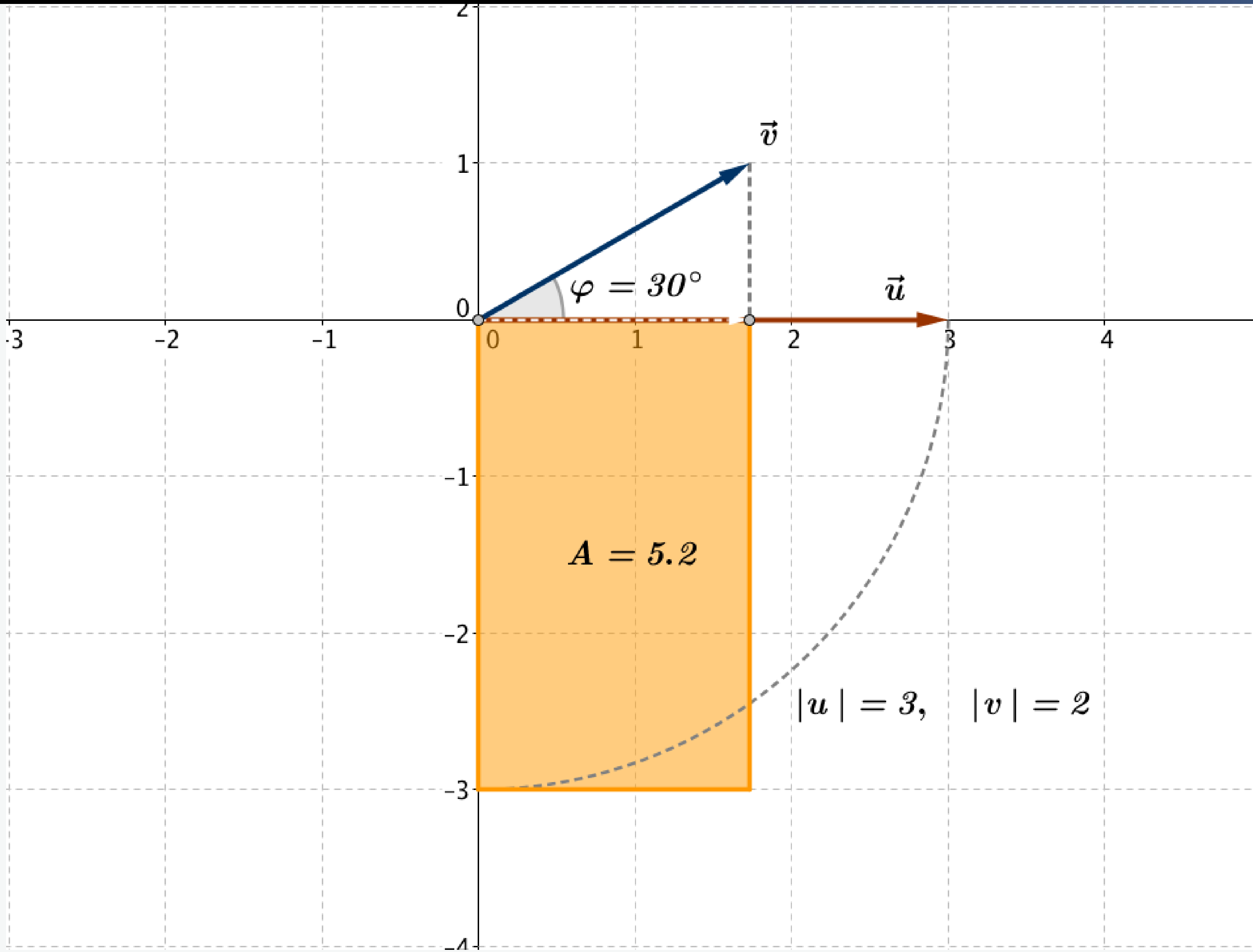


Abb. 2-3a: Die Fläche als Skalarprodukt zweier Vektoren

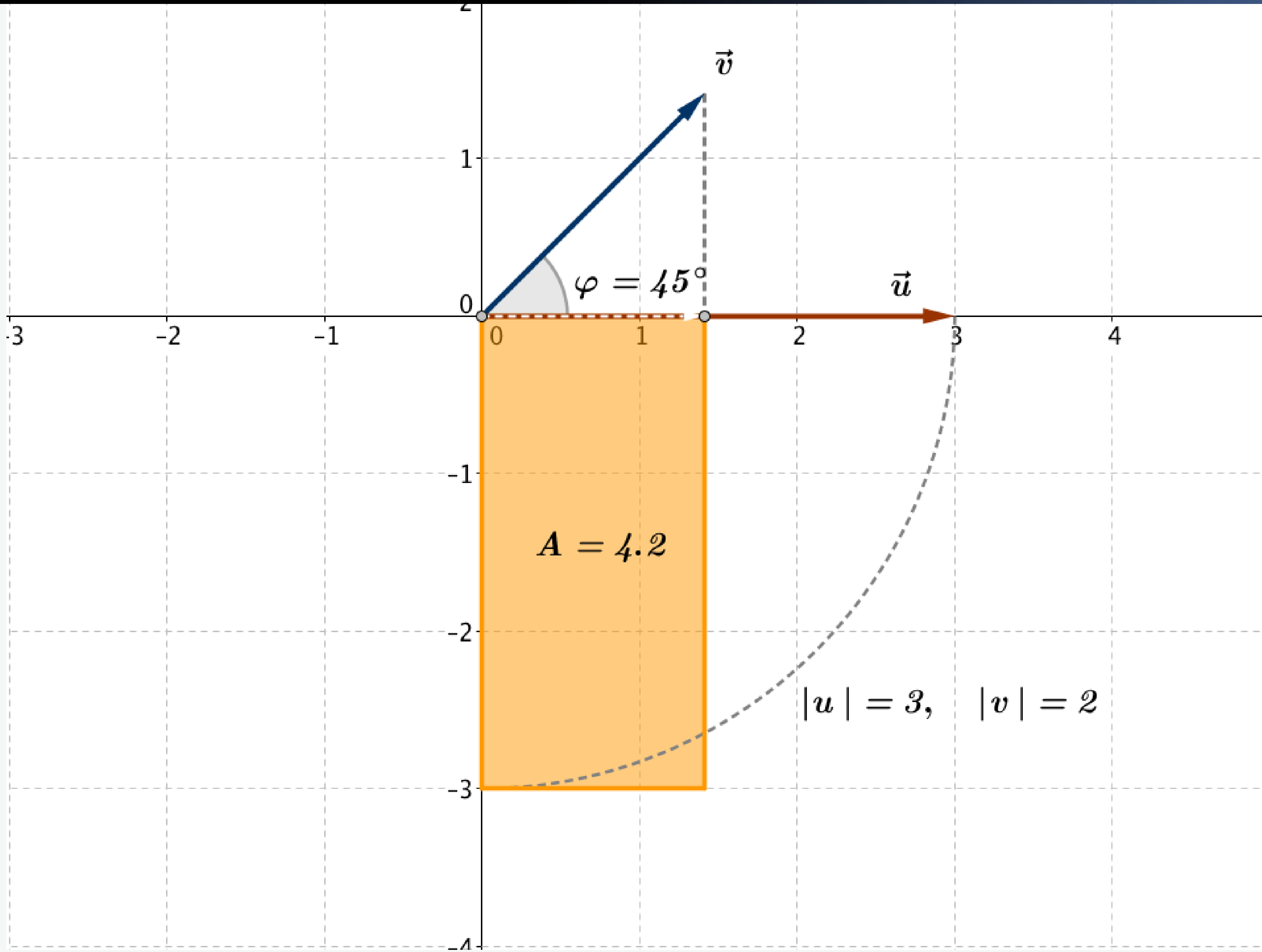


Abb. 2-3b: Die Fläche als Skalarprodukt zweier Vektoren

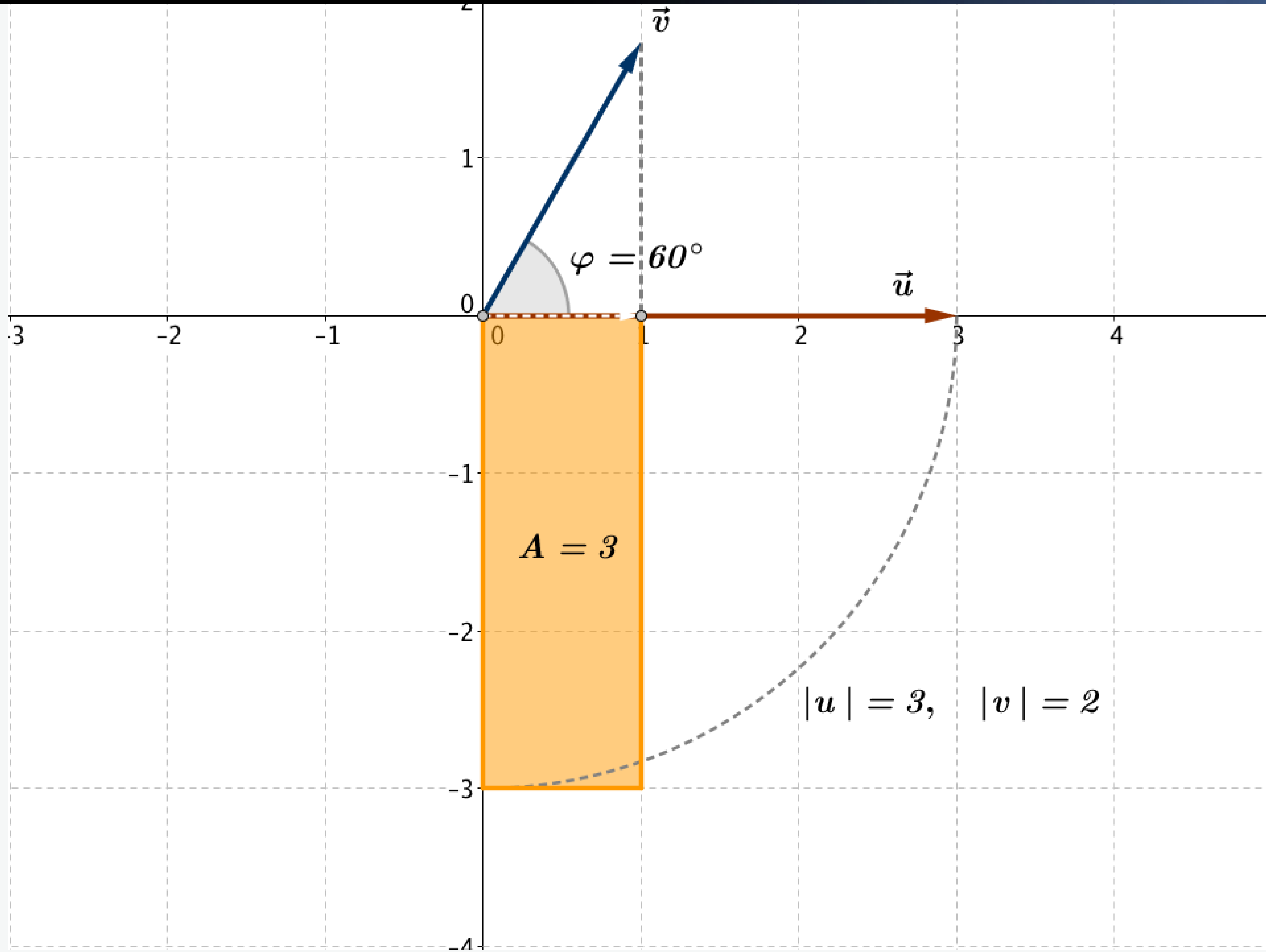


Abb. 2-3c: Die Fläche als Skalarprodukt zweier Vektoren

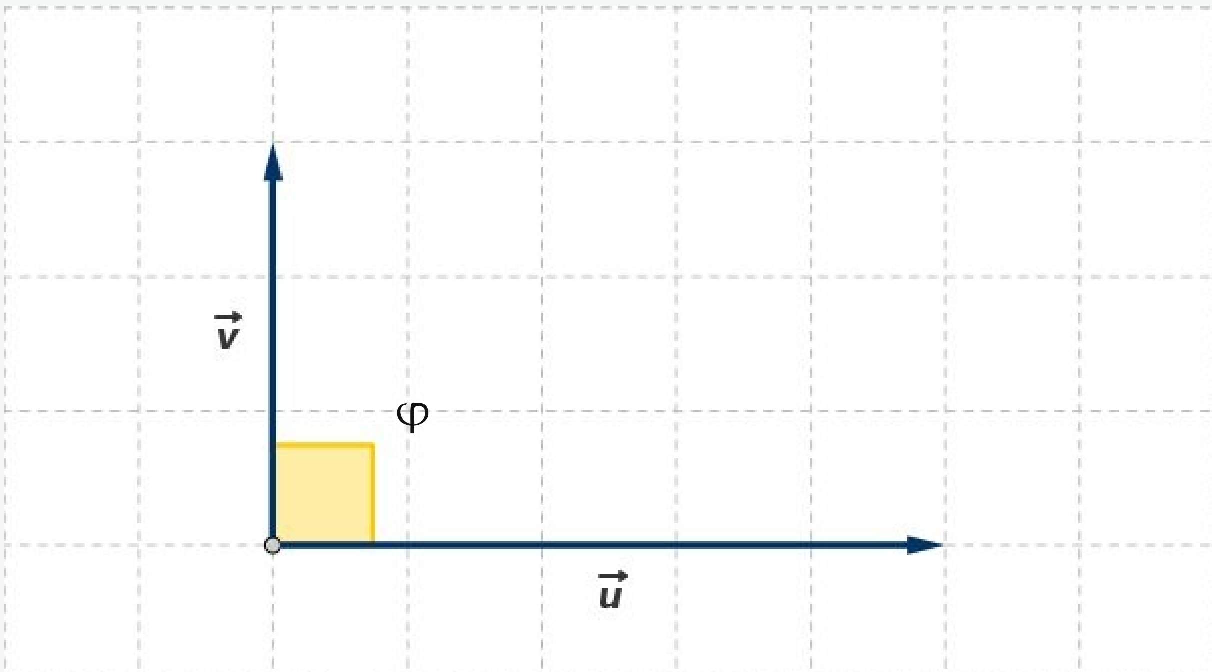
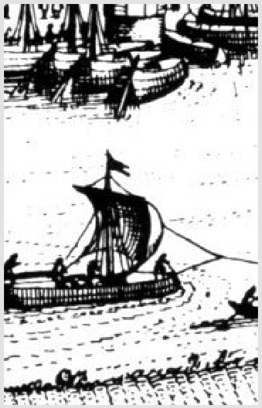


Abb. 2-4: Orthogonale Vektoren

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren ***u*** und ***v*** stehen genau dann aufeinander senkrecht, sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$$



Die Bedingung der Orthogonalität erfüllen z.B. die Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0$$

Das skalare Produkt eines Vektors mit sich selbst ist:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\,\vec{u}\,| \cdot |\,\vec{u}\,| \cdot \cos 0^\circ = |\,\vec{u}\,|^2 = u^2$$

Der Betrag eines Vektors kann aus dem Skalarprodukt berechnet werden:

$$|\,\vec{u}\,| = u = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Für die Einheitsvektoren erhält man:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = |\,\vec{e}_x\,|^2 = 1$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = |\,\vec{e}_y\,|^2 = 1$$

Das skalare Produkt zweier Vektoren

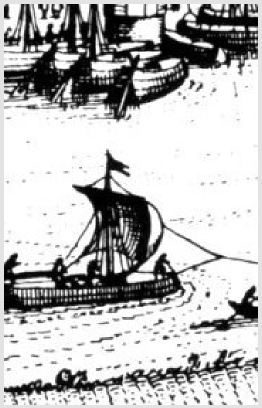
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x\, \vec{e}_x + u_y\, \vec{e}_y) \cdot (v_x\, \vec{e}_x + v_y\, \vec{e}_y) =$$

$$= u_x\, v_x\, (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) + u_x\, v_y\, (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y) + u_y\, v_x\, (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x) + u_y\, v_y\, (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) =$$

$$= u_x\, v_x + u_y\, v_y$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1, \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x,\ u_y) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = u_x\, v_x + u_y\, v_y}$$



Rechengesetze für Skalarbildung:

Kommutativgesetz: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Distributivgesetz: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi = u_x \, v_x + u_y \, v_y$$

Der von diesen Vektoren eingeschlossene Winkel ist

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_x \, v_x + u_y \, v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

Skalarprodukt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$$

Weil in der Definition des Skalarprodukts der Faktor $\cos\,\theta$ in Abhängigkeit vom Winkel positiv, null oder negativ sein kann, gilt dasselbe auch für das Skalarprodukt zweier Vektoren.

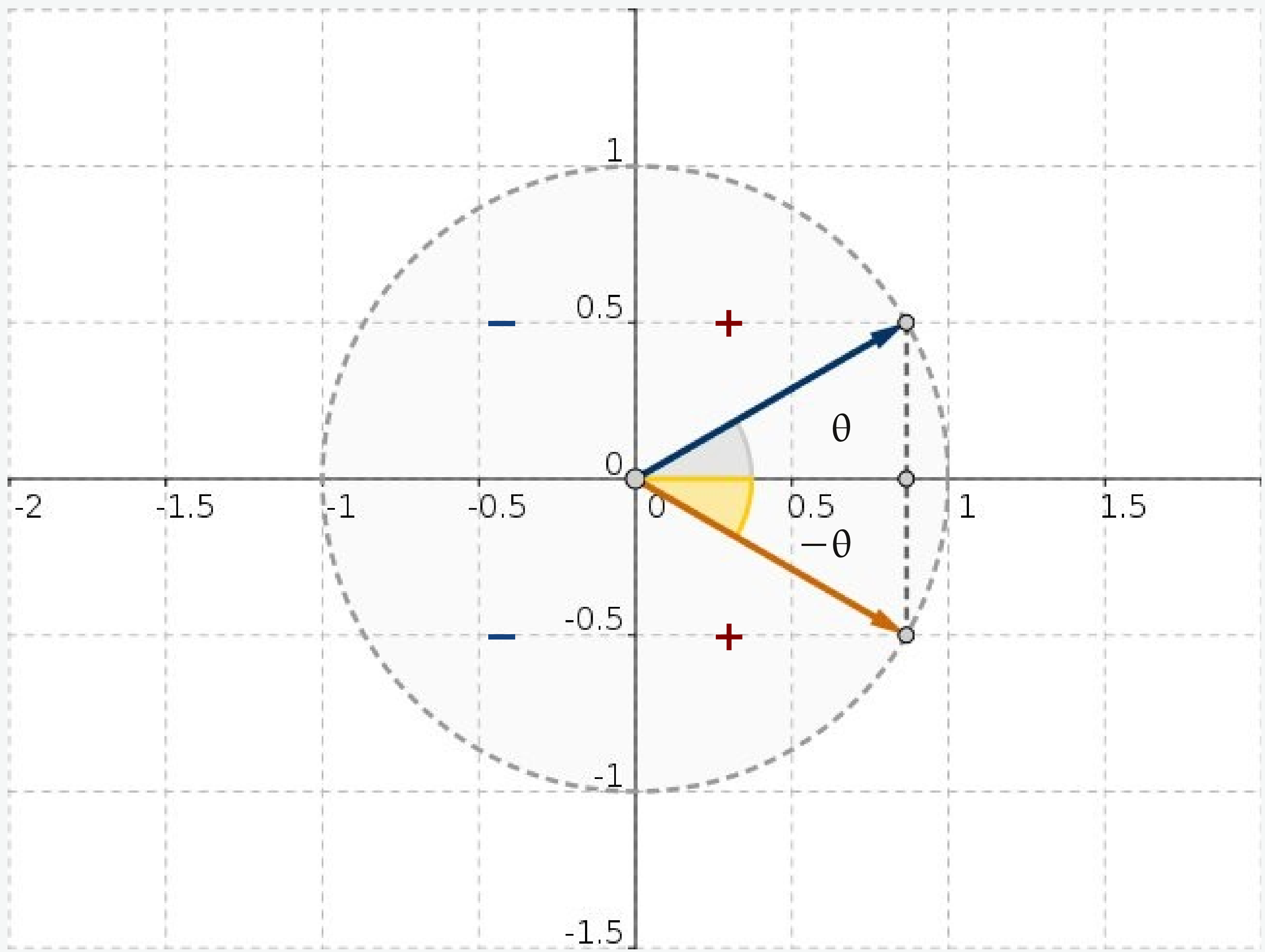


Abb. 3-1: Das Zeichen der Kosinusfunktion in jedem Quadrant

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

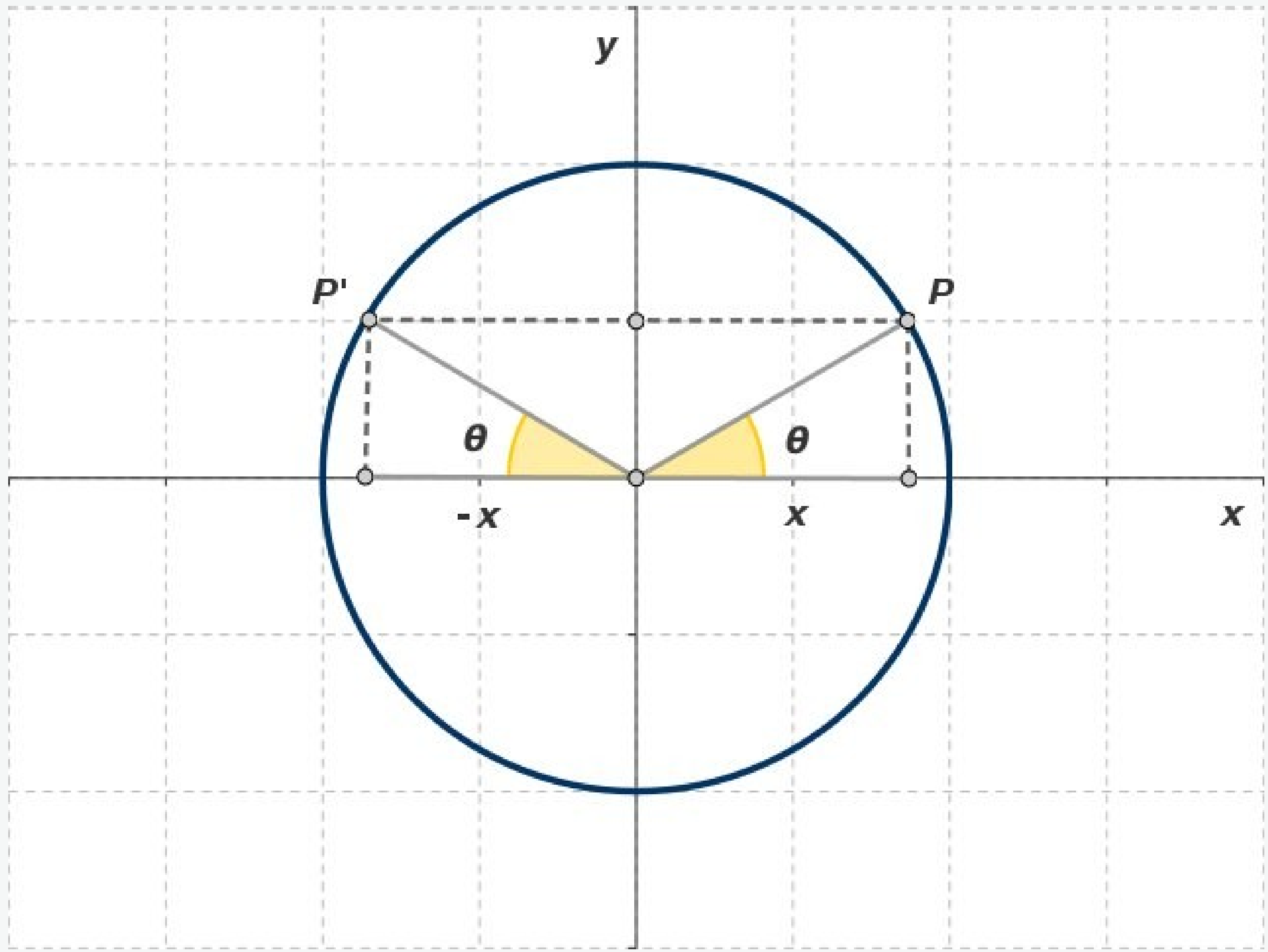


Abb. 3-2: Die Kosinusfunktion

$$\cos\left(180^{\circ} - \theta\right) = -\cos\theta$$

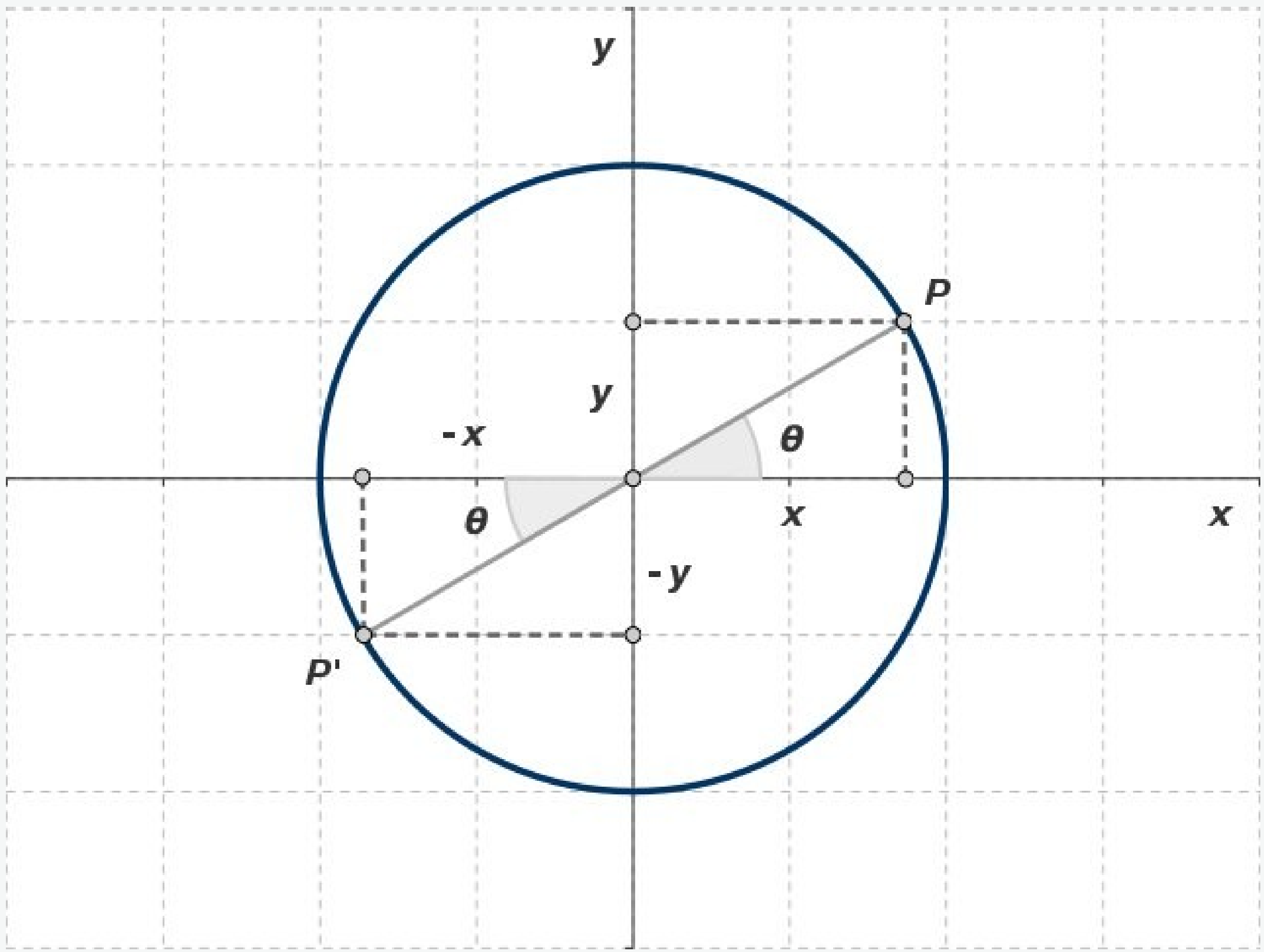


Abb. 3-3: Die Kosinusfunktion

$$\cos\left(180^\circ + \theta\right) = -\cos\theta$$

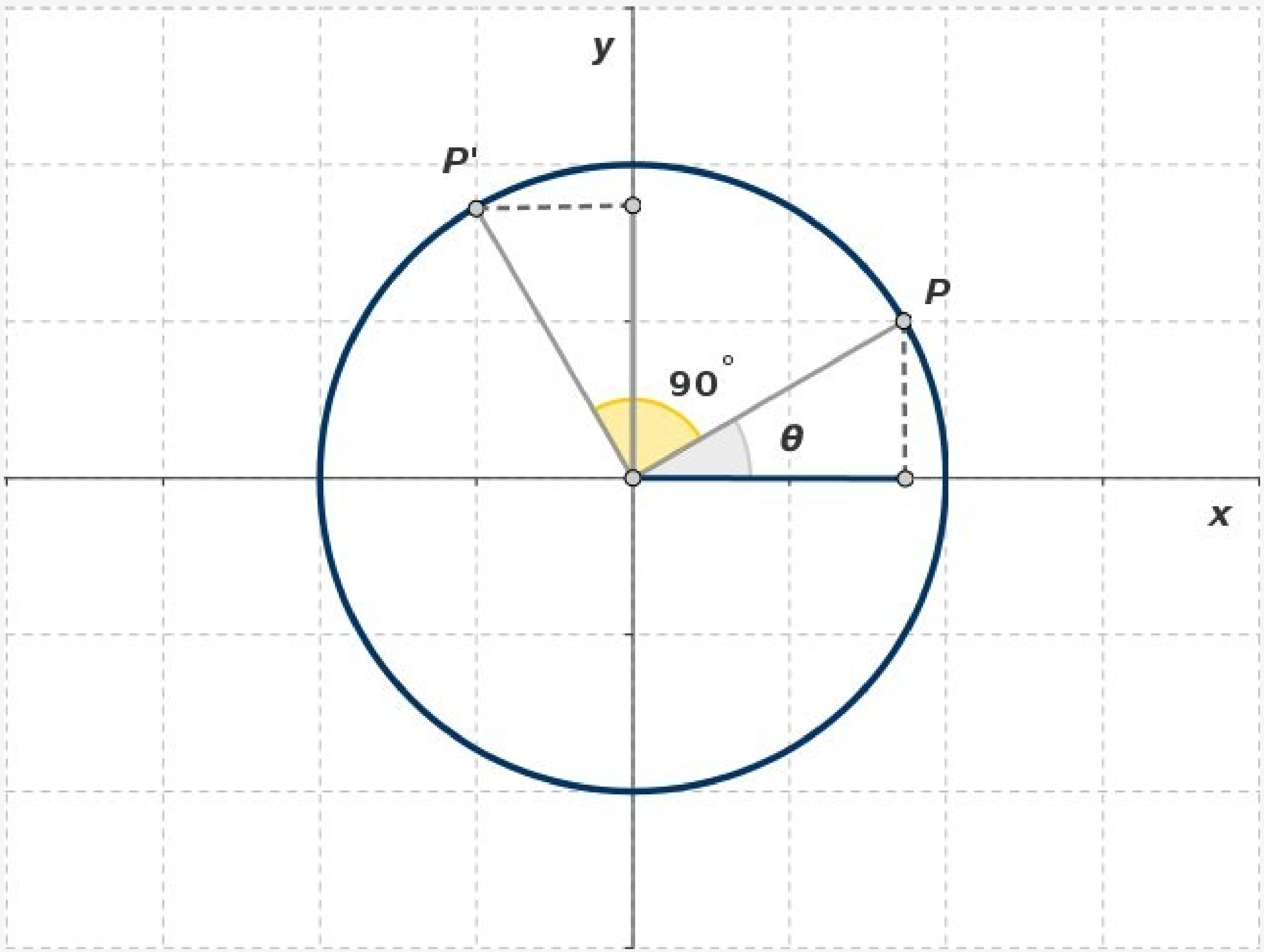
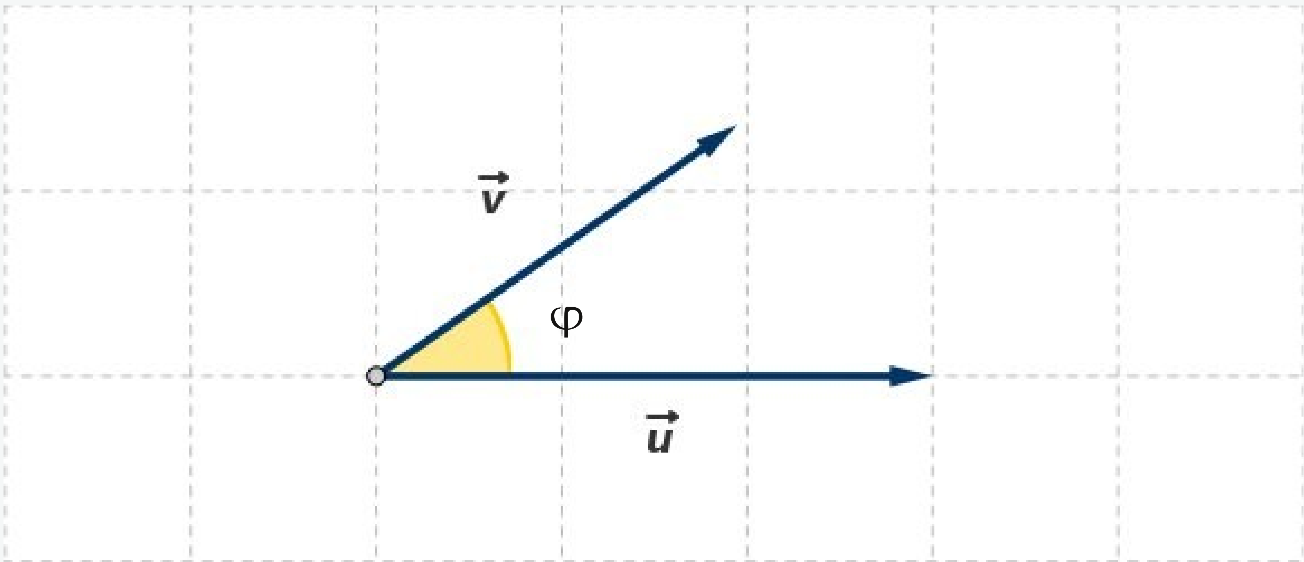


Abb. 3-4: Die Kosinusfunktion

$$\cos\left(90^\circ + \theta\right) = -\sin\theta$$

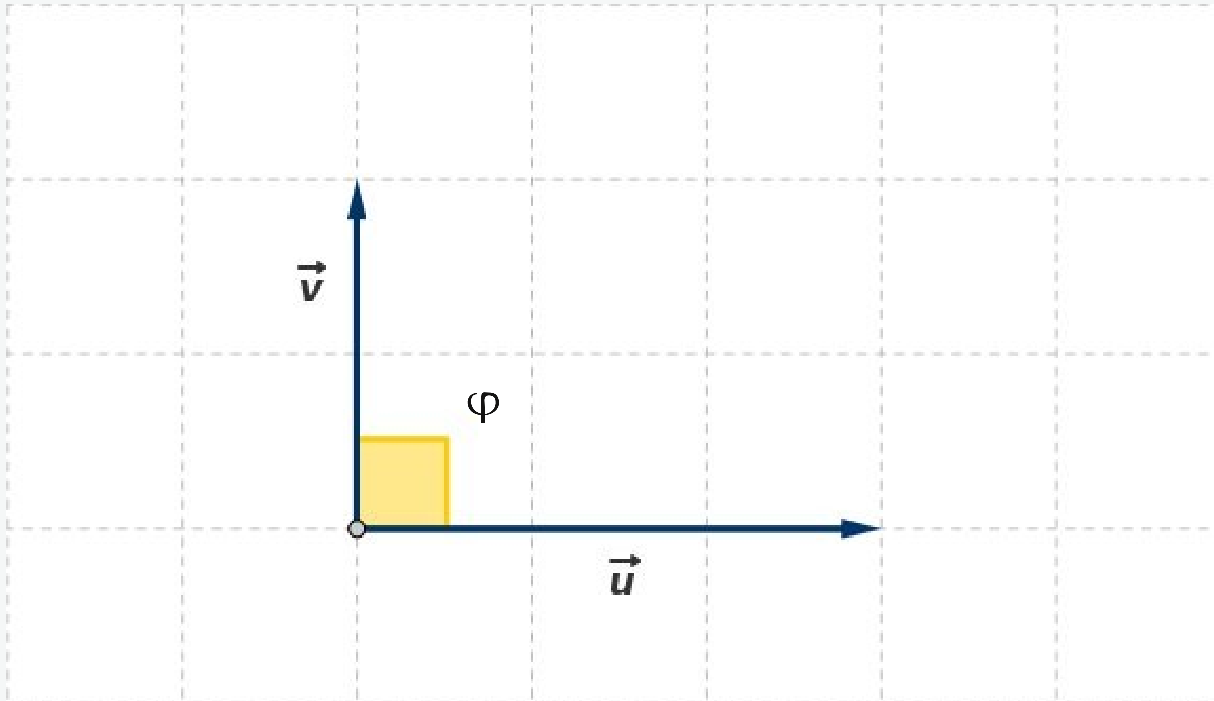
Einige Kosinuswerte im ersten Quadrant

$$\cos 0^\circ = 1\,, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\,, \quad \cos 90^\circ = 0$$

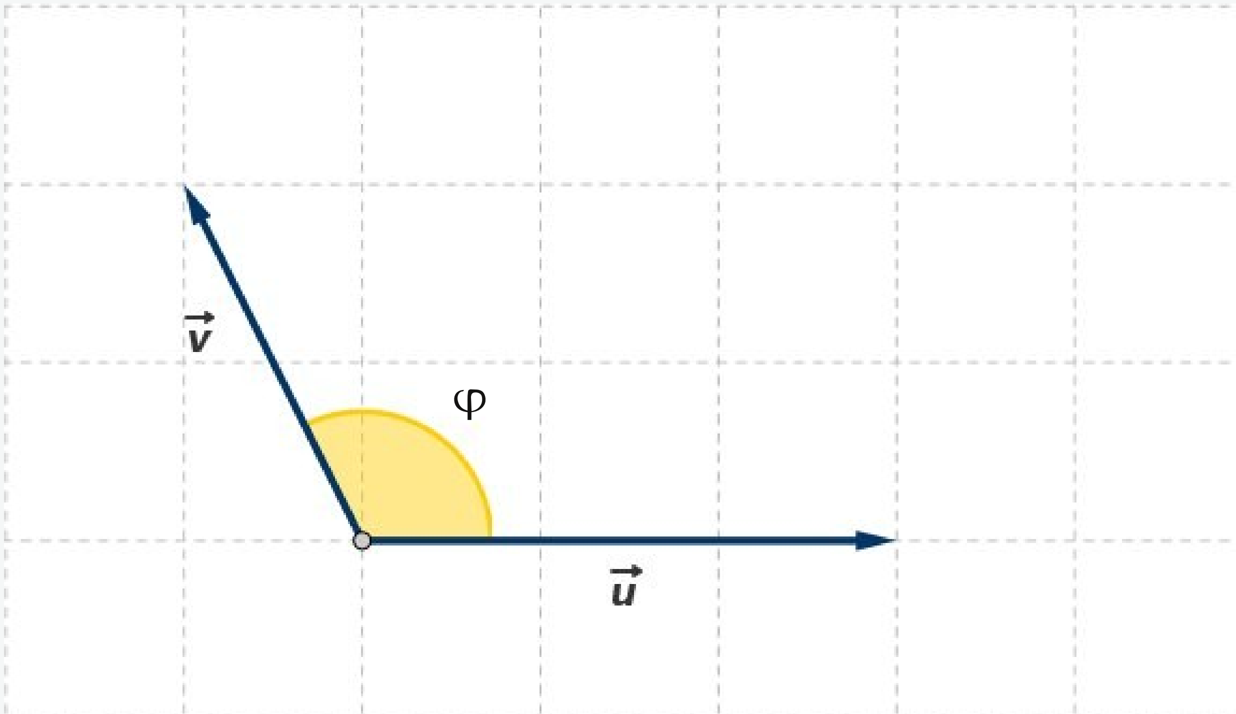


1. $\varphi = 0^\circ\,, \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| > 0$

2. $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ\,, \quad \vec{u}\cdot\vec{v} > 0$

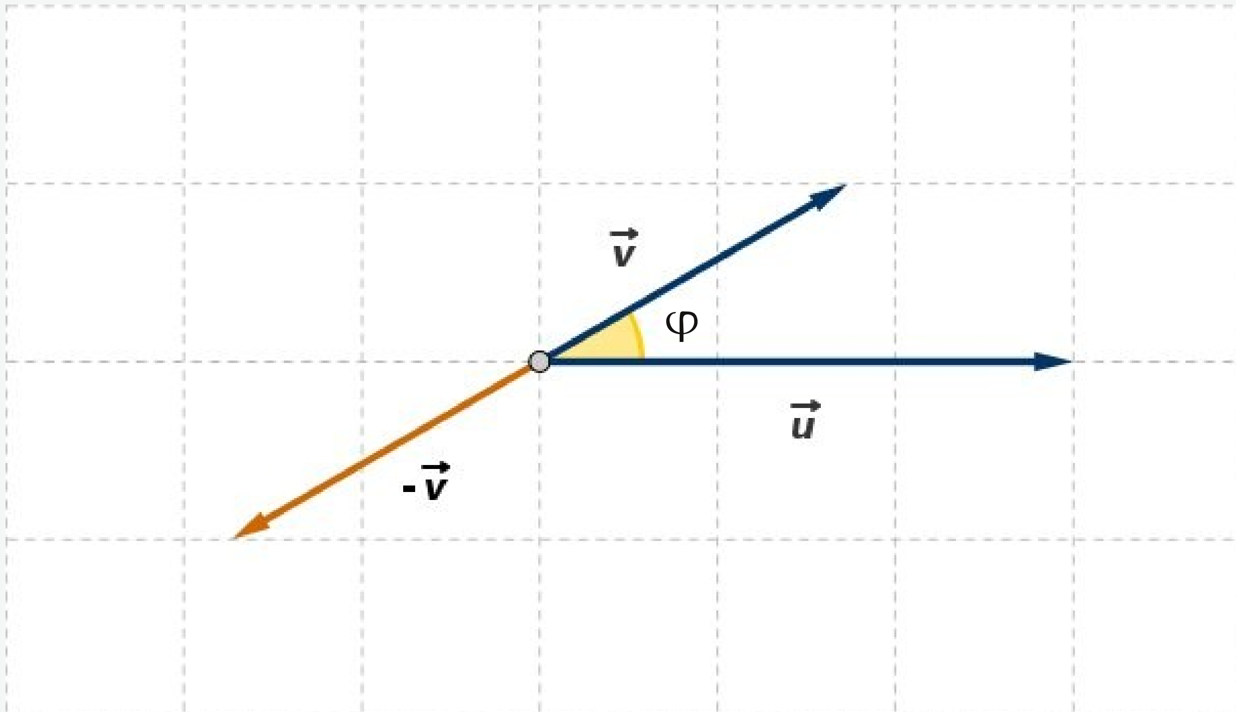


$$3. \quad \varphi = 90^\circ, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



4. $90^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

5. $\varphi = 180^\circ, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| < 0$



Bestimmen Sie die Skalarprodukte ***u· v*** und ***u· (-v)*** für

a) $|\vec{u}| = 2, \quad |\vec{v}| = \sqrt{3}\,, \quad \varphi \leqslant 30^\circ$

b) $|\vec{u}| = 4, \quad |\vec{v}| = 1.2, \quad \varphi \leqslant 60^\circ$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{2}\,, \quad |\vec{v}| = 3\sqrt{3}\,, \quad \varphi \leqslant 120^\circ$