Richtungswinkel von Vektoren

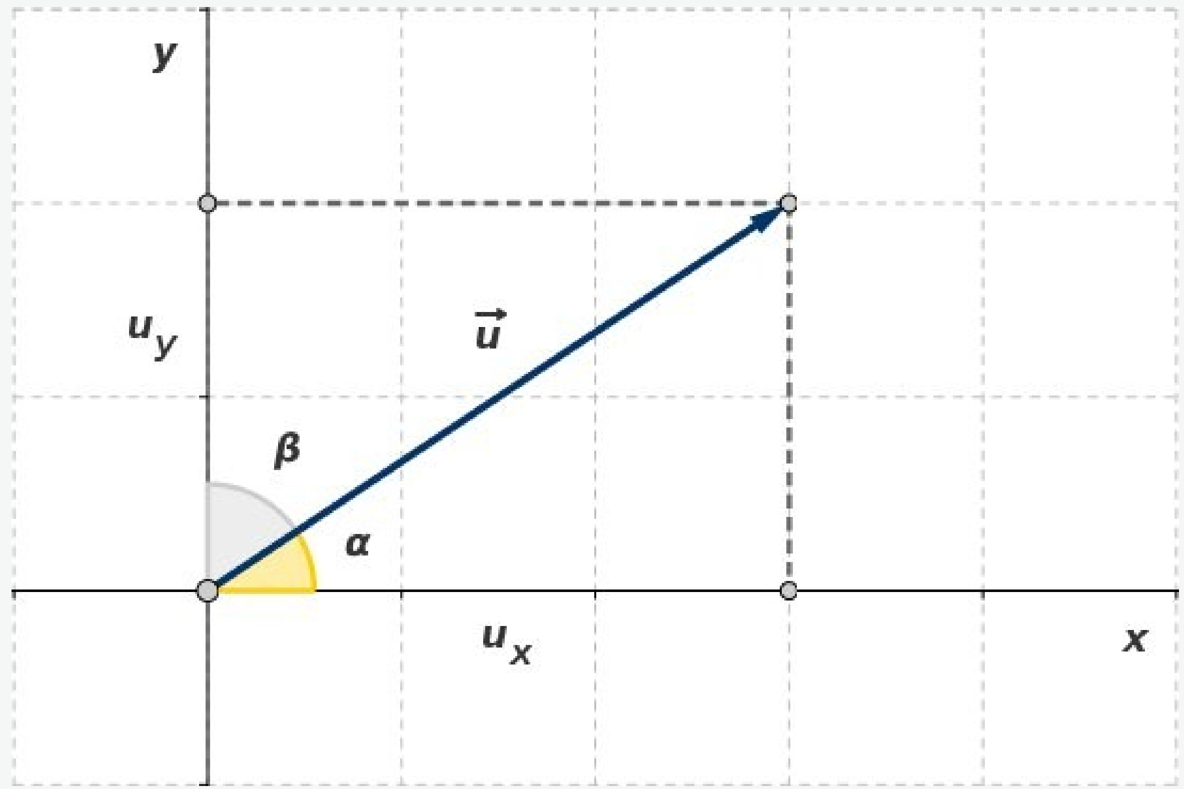

*Abb. 1-1: Der Vektor **u** im 2-D rechtwinkligen Koordinatensystem*

Gegeben ist ein Vektor ***u***. Gesucht sind die Winkel α und β, die ***u*** mit den Koordinatenachsen einschließt

$a)\ \ \vec{u} = (u_x,\ u_y)$, $\quad b)\ \ \vec{u} = (3,\ 2)$, $\quad c)\ \ \vec{u} = (2,\ 2)$

$d)\ \ \vec{u} = (4,\ -1)$, $\quad e)\ \ \vec{u} = (-2,\ 2)$, $\quad f)\ \ \vec{u} = (-2\sqrt{3}\ ,\ 2)$

Richtungswinkeln eines Vektors: Lösung 1a

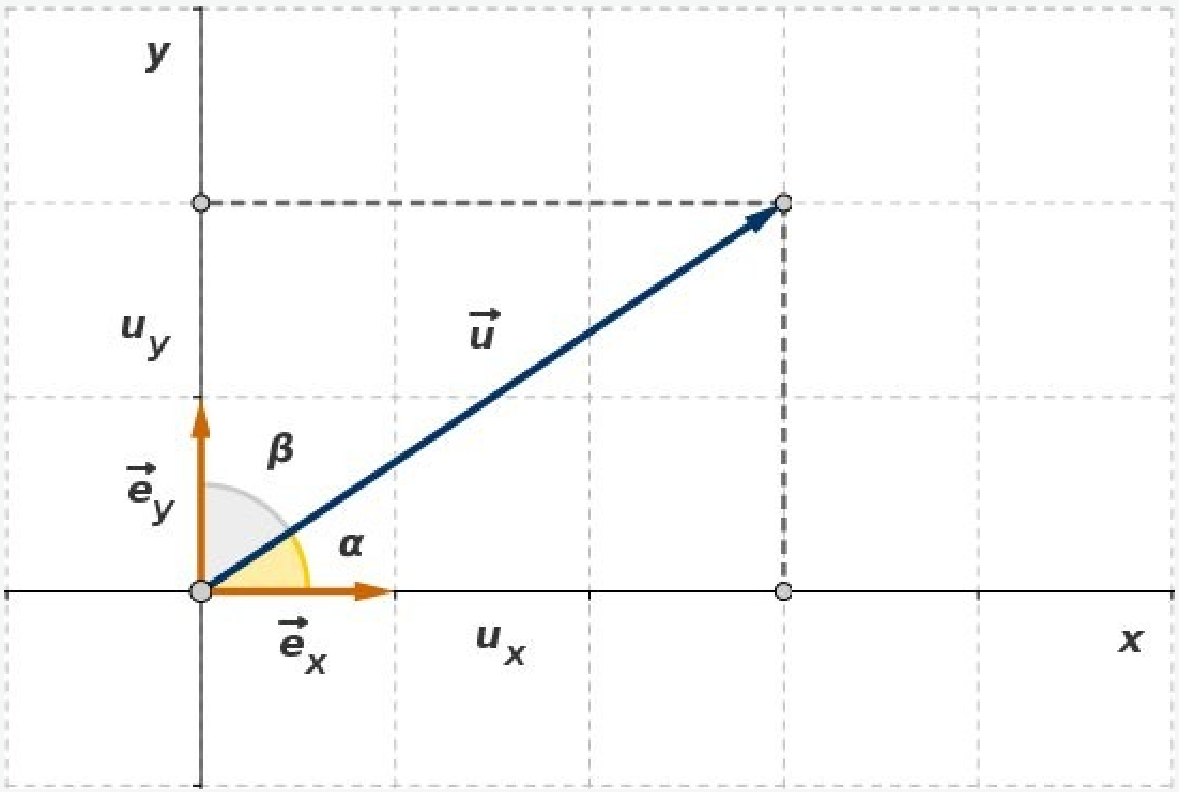

*Abb. 1-2: Der Vektor **u** im 2-D rechtwinkligen Koordinatensystem, die Einheitsvektoren*

$$\vec{u} = (u_x,\ u_y), \quad \vec{e}_x = (1,\ 0), \quad \vec{e}_y = (0,\ 1), \quad |\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{e}_x}{|\vec{u}|\cdot|\vec{e}_x|} = \frac{u_x\cdot 1 + u_y\cdot 0}{|\vec{u}|\cdot 1} = \frac{u_x}{|\vec{u}|}, \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{u_x}{|\vec{u}|}\right)$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{e}_y}{|\vec{u}|\cdot|\vec{e}_y|} = \frac{u_x\cdot 0 + u_y\cdot 1}{|\vec{u}|\cdot 1} = \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \qquad \beta = \arccos\left(\frac{u_y}{|\vec{u}|}\right)$$

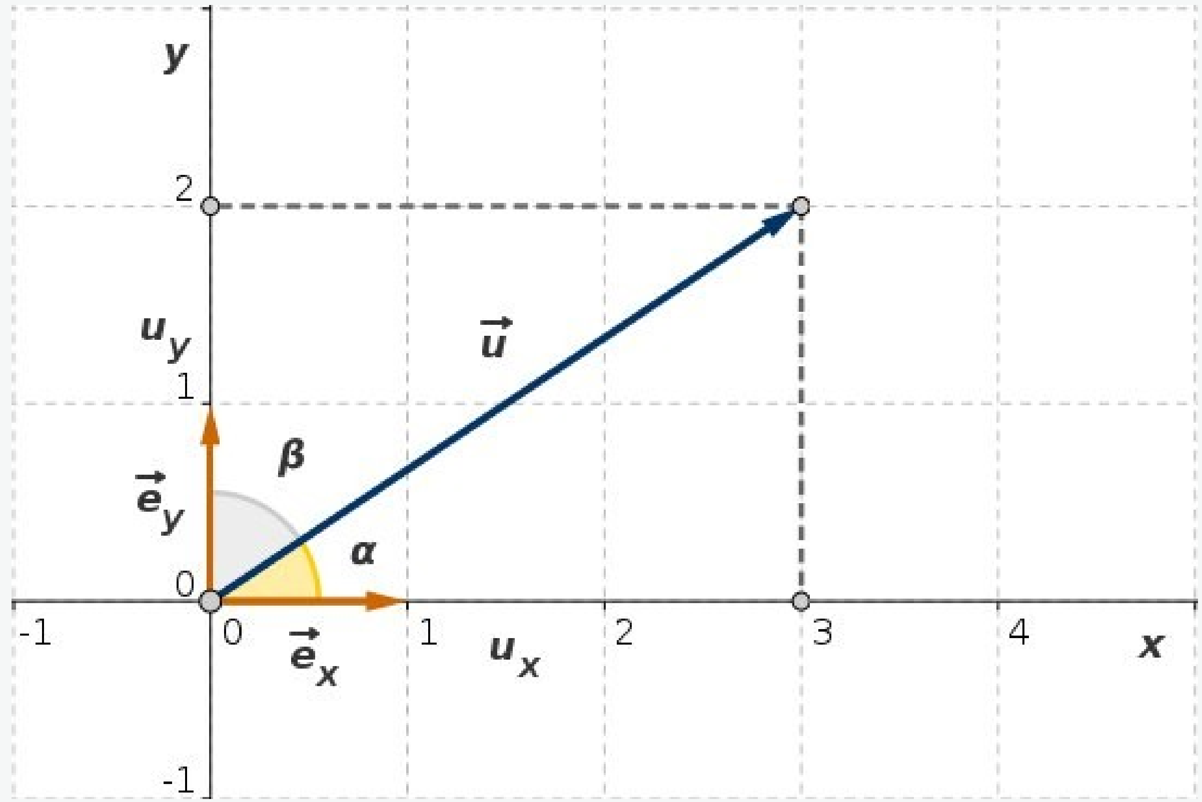

Abb. 1-3: Der Vektor **u** *= (3, 2), die Einheitsvektoren*

$$\vec{u} = (3,\ 2)\,, \qquad \vec{e}_x = (1,\ 0)\,, \qquad \vec{e}_y = (0,\ 1)\,, \qquad |\,\vec{u}\,| = \sqrt{u_x^{\,2} + u_y^{\,2}} = \sqrt{13}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{e}_x}{|\,\vec{u}\,|\cdot|\,\vec{e}_x\,|} = \frac{u_x}{|\,\vec{u}\,|} = \frac{3}{\sqrt{13}}\,, \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = 33.69^{\circ}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{e}_y}{|\,\vec{u}\,|\cdot|\,\vec{e}_y\,|} = \frac{u_y}{|\,\vec{u}\,|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\,, \qquad \beta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 56.31^{\circ}$$

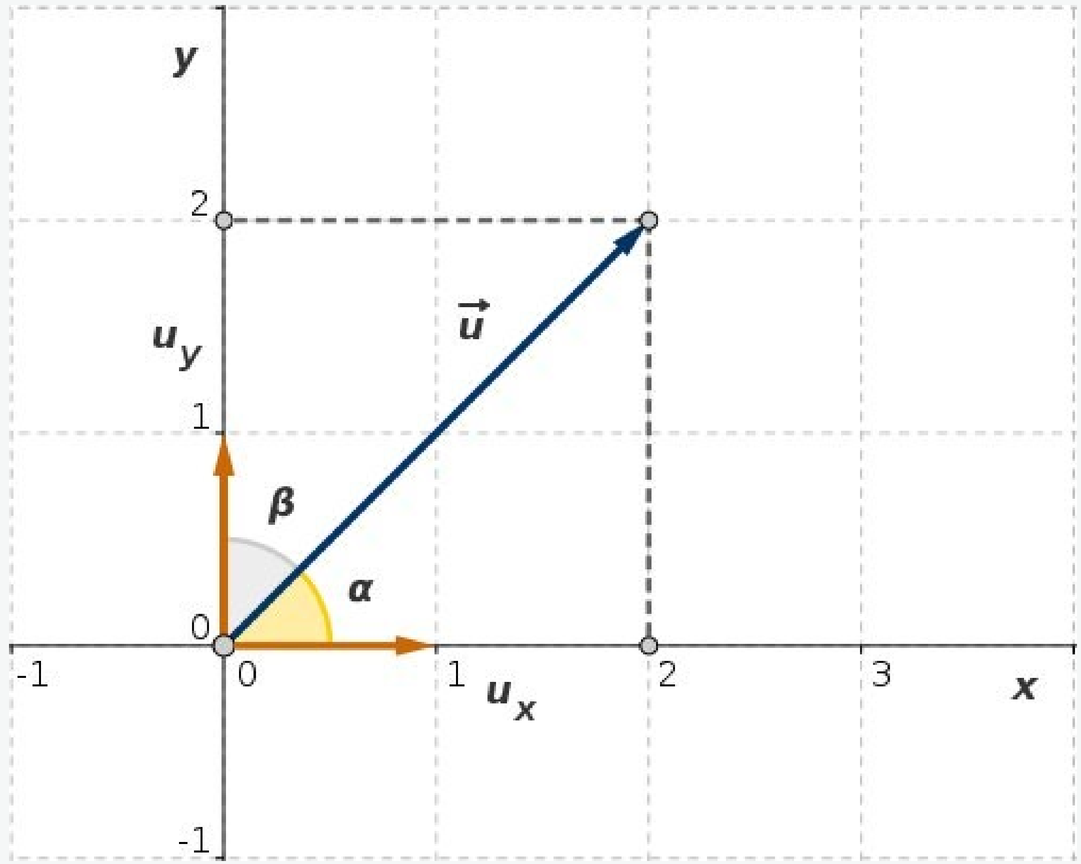

*Abb. 1-4: Der Vektor **u** = (2, 2), die Einheitsvektoren*

$$\vec{u} = (2,\ 2)\,, \qquad \vec{e}_x = (1,\ 0)\,, \qquad \vec{e}_y = (0,\ 1)\,, \qquad |\,\vec{u}\,| = \sqrt{8}$$

$$\cos\alpha = \frac{u_x}{|\,\vec{u}\,|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$u_x = u_y \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha = \frac{\pi}{4}$$

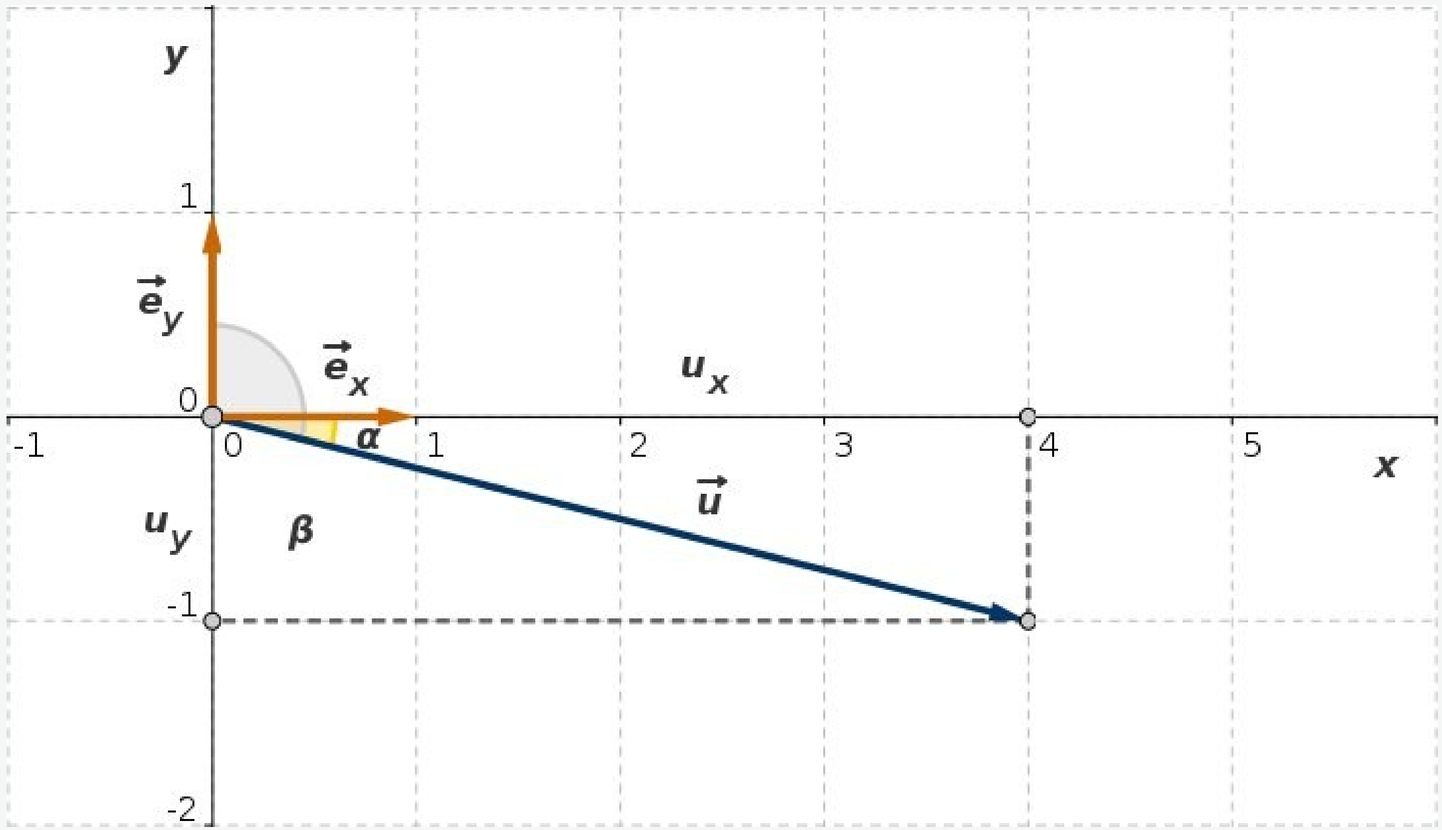

Abb. 1-5: Der Vektor **u** *= (4, -1), die Einheitsvektoren*

$$\vec{u} = (4, -1), \quad \vec{e}_x = (1, 0), \quad \vec{e}_y = (0, 1), \quad |\vec{u}| = \sqrt{17}$$

$$\cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|} = \frac{4}{\sqrt{17}}, \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = 14.04^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|} = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \qquad \beta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = 104.04^\circ$$

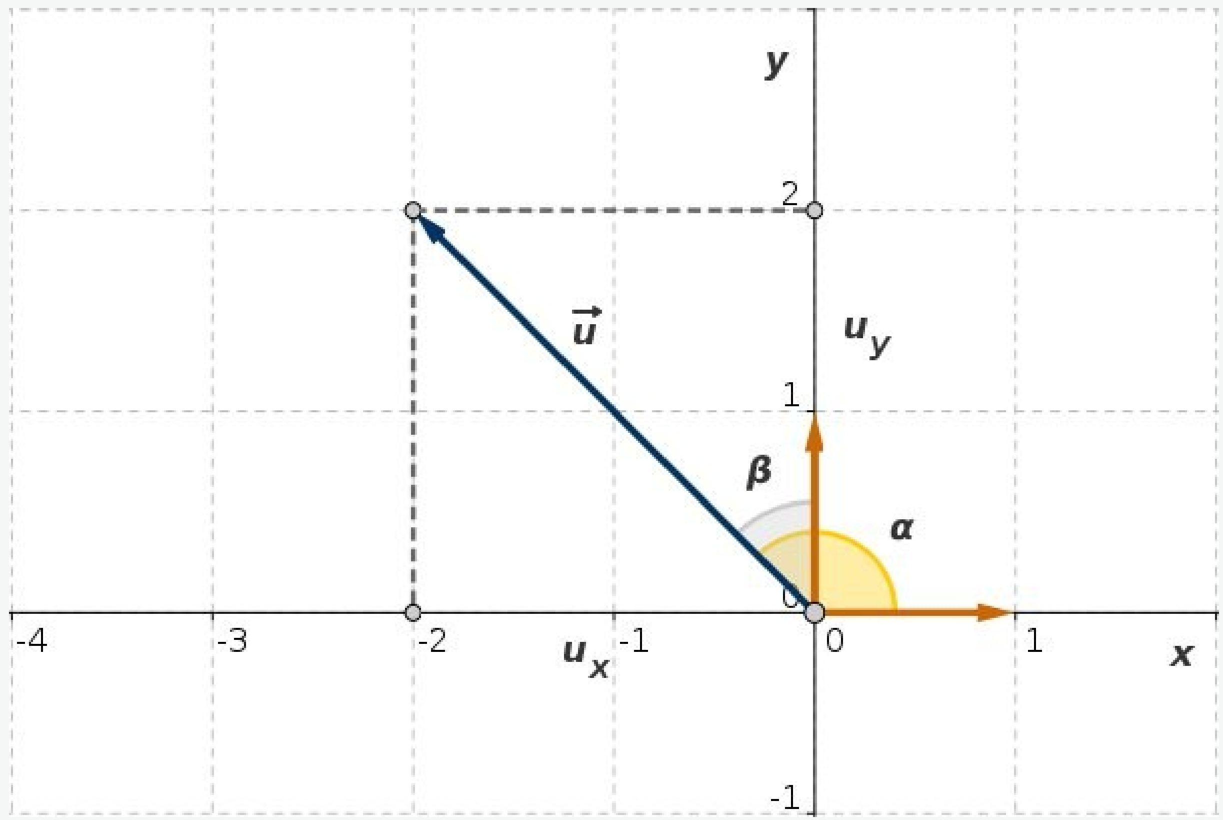

*Abb. 1-6: Der Vektor **u** = (-2, 2), die Einheitsvektoren*

$$\vec{u} = (-2,\ 2)\,, \qquad \vec{e}_x = (1,\ 0)\,, \qquad \vec{e}_y = (0,\ 1)\,, \qquad |\,\vec{u}\,| = \sqrt{8}$$

$$\cos\alpha = \frac{u_x}{|\,\vec{u}\,|} = -\,\frac{2}{\sqrt{8}} = -\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \alpha = \arccos\left(-\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\,\pi}{4}$$

$$\cos\beta = \frac{u_y}{|\,\vec{u}\,|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

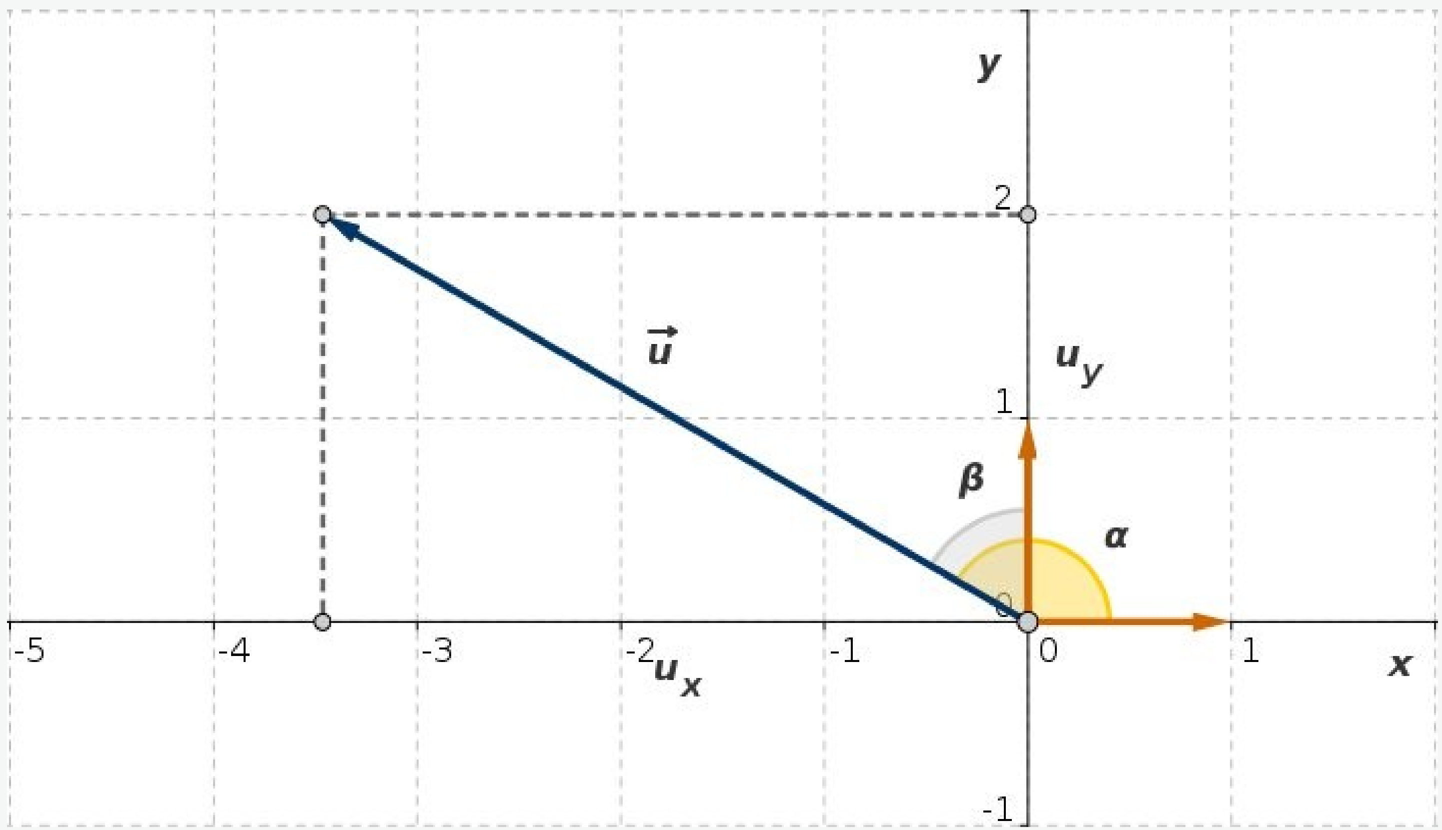

Abb. 1-7: Der Vektor $\mathbf{u} = (-2\sqrt{3}, 2)$, *die Einheitsvektoren*

$$\vec{u} = (-2\sqrt{3}\,,\ 2), \qquad \vec{e}_x = (1,\ 0), \qquad \vec{e}_y = (0,\ 1), \qquad |\vec{u}\,| = 4$$

$$\cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}\,|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \alpha = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\cos\beta = \frac{u_y}{|\vec{u}\,|} = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

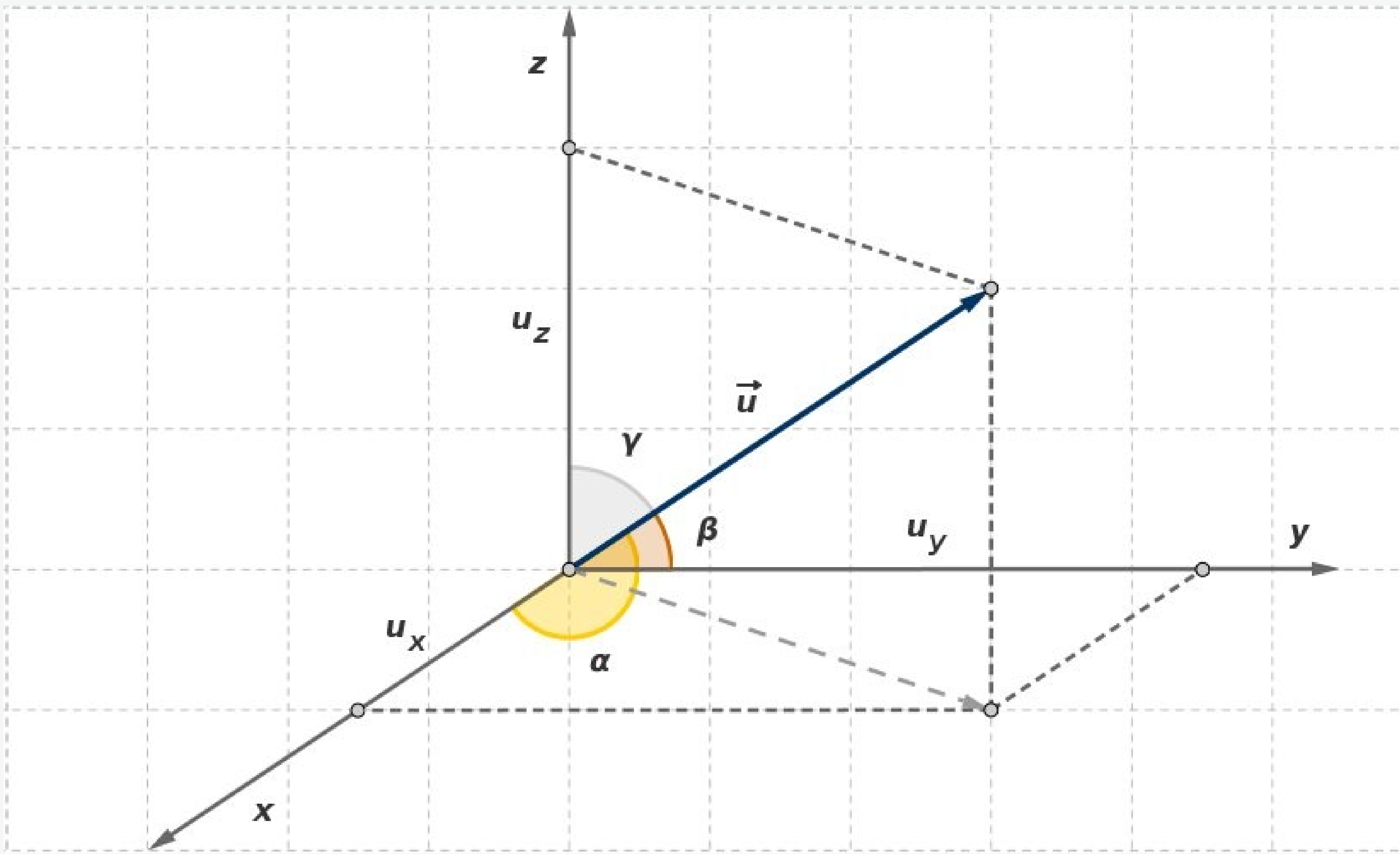

*Abb. 2-1: Der Vektor **u**, seine Richtungswinkeln*

Ein Vektor ist eindeutig durch Betrag und Richtung festgelegt. Die Richtung bestimmen wir z.B. durch die Winkel, die der Vektor mit den drei Basisvektoren bildet.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_x}{|\vec{a}|\cdot|\vec{e}_x|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|\cdot 1} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

α ist der Winkel, den der Vektor mit der x-Achse bildet.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Die Richtungswinkel sind nicht unabhängig voneinander, sondern über die Beziehung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

miteinander verknüpft.

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Winkel, der von den Vektoren ***a*** und ***b*** eingeschlossen wird. Wie groß ist der Winkel, den der Vektor ***a*** mit der x-Achse bildet?

$$a)\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Länge, den Einheitsvektor und die mit den Basisvektoren gebildeten Winkel des Vektors

$$\vec{v} = 2\,\vec{e}_x - \vec{e}_y - 2\,\vec{e}_z$$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Richtungswinkel der folgenden Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Lösung 2a):

$$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{38}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{13}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{45}} \simeq 0.314, \quad \varphi = 71.68^\circ$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_x}{|\vec{a}|\cdot|\vec{e}_x|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{38}} \simeq 0.324, \quad \alpha = 71.07^\circ$$

Lösung 2b):

$$b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{6}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\cos\varphi = 0, \quad \varphi = 90^\circ$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} \simeq 0.816, \quad \alpha = 35.26^\circ$$

Lösung 3:

$$\vec{v} = 2\,\vec{e}_x - \vec{e}_y - 2\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad |\,\vec{v}\,| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\,\vec{v}\,|} = \frac{2}{3}\,\vec{e}_x - \frac{1}{3}\,\vec{e}_y - \frac{2}{3}\,\vec{e}_z$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\,\vec{a}\,|} = \frac{2}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\,\vec{a}\,|} = -\frac{1}{3}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\,\vec{a}\,|} = -\frac{2}{3}$$

$$\alpha = 48.19^\circ, \qquad \beta = 109.47^\circ, \qquad \gamma = 131.81^\circ$$

Lösung 4:

$$\vec{v}_1: \quad \alpha = 39{,}51^\circ, \qquad \beta = 81{,}12^\circ, \qquad \gamma = 51{,}89^\circ$$

$$\vec{v}_2: \quad \alpha = 107{,}64^\circ, \qquad \beta = 59{,}66^\circ, \qquad \gamma = 143{,}91^\circ$$

$$\vec{v}_3: \quad \alpha = 42{,}83^\circ, \qquad \beta = 97{,}66^\circ, \qquad \gamma = 48{,}19^\circ$$