Kreis

http://www.fu-berlin.de/presse/publikationen/fundiert/2009_01/03_cancik-kirschbaum/mappa-mundi.jpg

Die Keilschrift-Tontafel der babylonischen Sicht auf die Welt. Die bewohnte Erde wird als Kreis umgeben von Meer dargestellt.

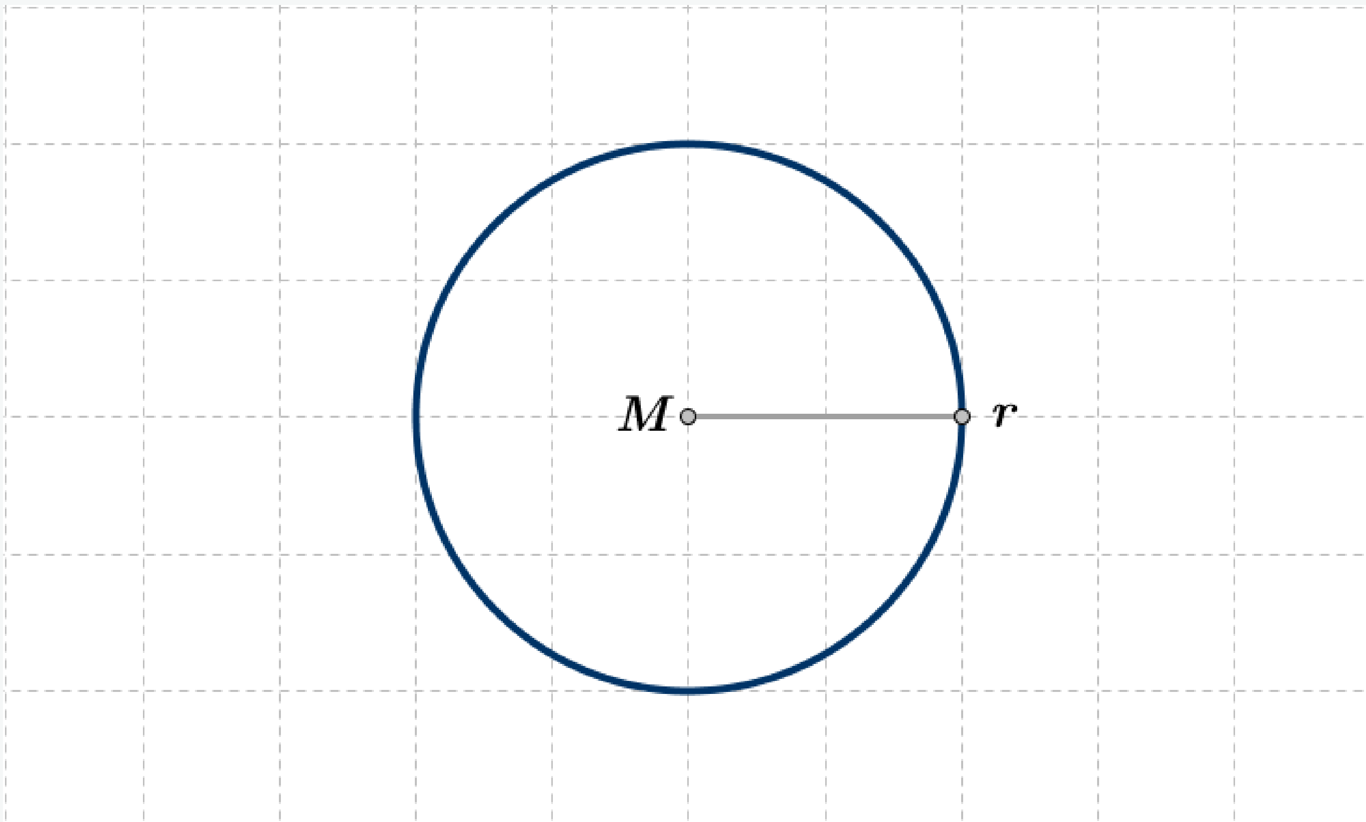

Abb. 1-1: Der Kreis mit einem Mittelpunkt M und einem Radius r

Definition:

Alle Punkte, die von einem Punkt M den gleichen Abstand r haben, liegen auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

Kreisgleichung

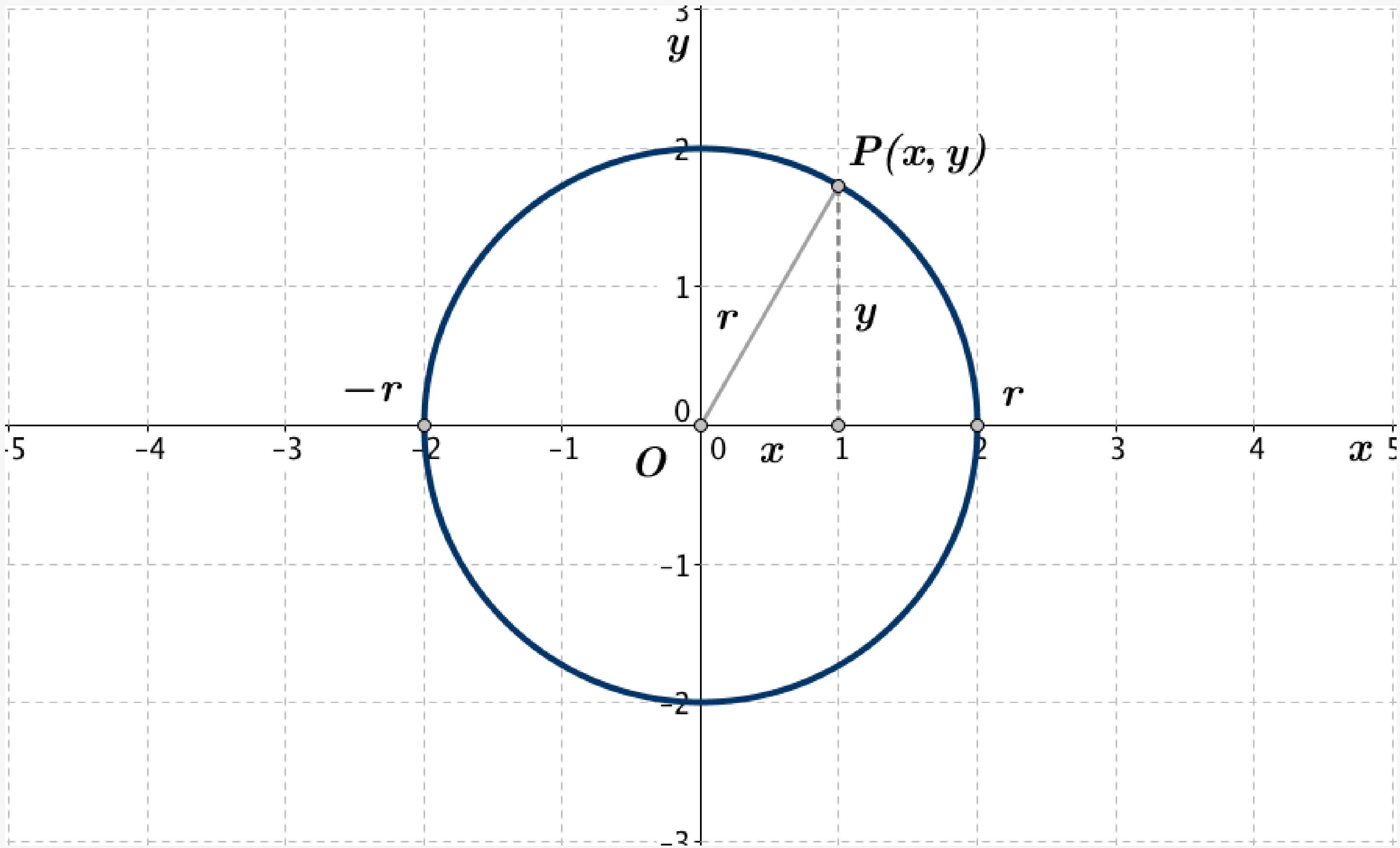

Abb. 1-2: Der Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r im kartesischen Koordinatensystem

Ist k ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r, so gilt für jeden Punkt $P\,(x, y)$ des Kreises nach dem Satz von Pythagoras die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Die allgemeine Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt M und Radius r kann ebenfalls mit dem Satz von Pythagoras hergeleitet werden

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2, \qquad M = (x_M, y_M)$$

$$r = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}$$

Graphische Darstellung folgt.

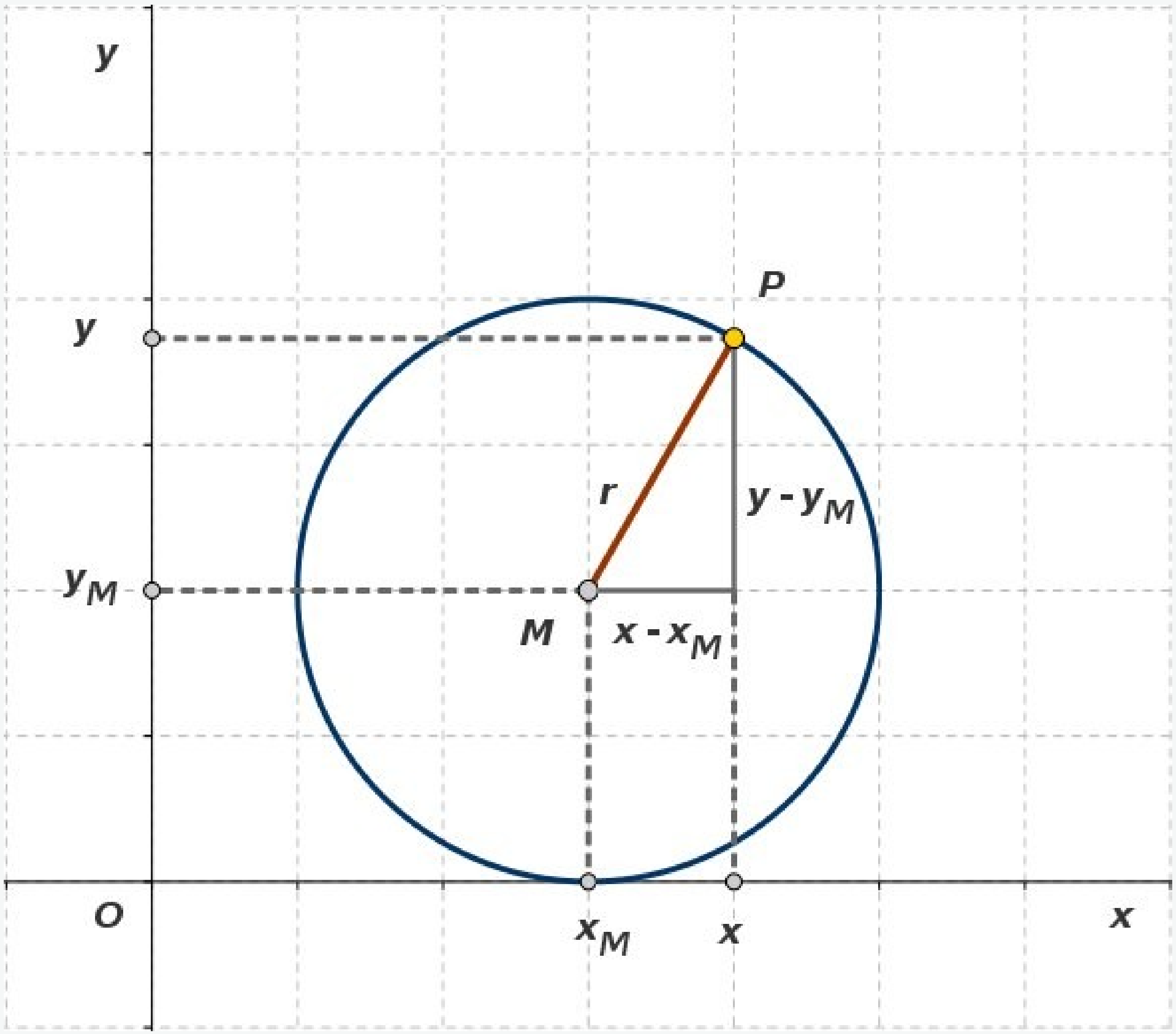

Abb. 2-1: Der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r

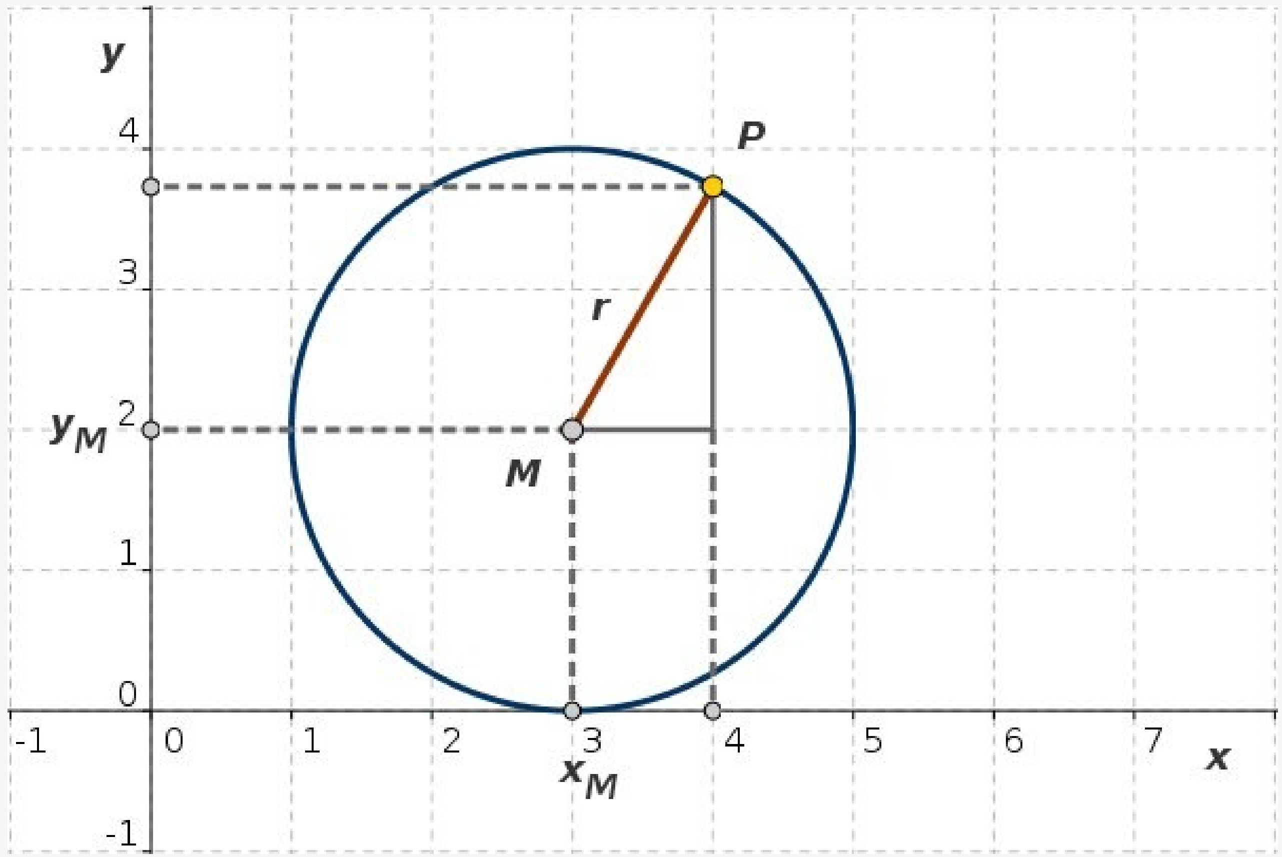

Abb. 2-2: Kreis mit Mittelpunkt M (3, 2) und Radius r = 2

Die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt *M (3, 2)* und Radius *2* lautet

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4, \qquad M = (3, 2)$$

oder

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

Man erkennt nicht sofort, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

einen Kreis beschreibt. Um das entscheiden zu können, benutzt man das bekannte Verfahren der quadratischen Ergänzung

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$$

Um die Unbekante a zu bestimmen, vergleicht man in

$$x^2 - 6x, \qquad x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$$

die Terme $-6x$, $-2ax$, d.h. man löst die Gleichung

$$-6x = -2xa \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Um die Unbekante b zu bestimmen, vergleicht man

$$y^2 - 4y, \qquad y^2 - 2by = (y - b)^2 - b^2$$

die Terme $-4y$, $-2by$, d.h. löst die Gleichung

$$-4y = -2by \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

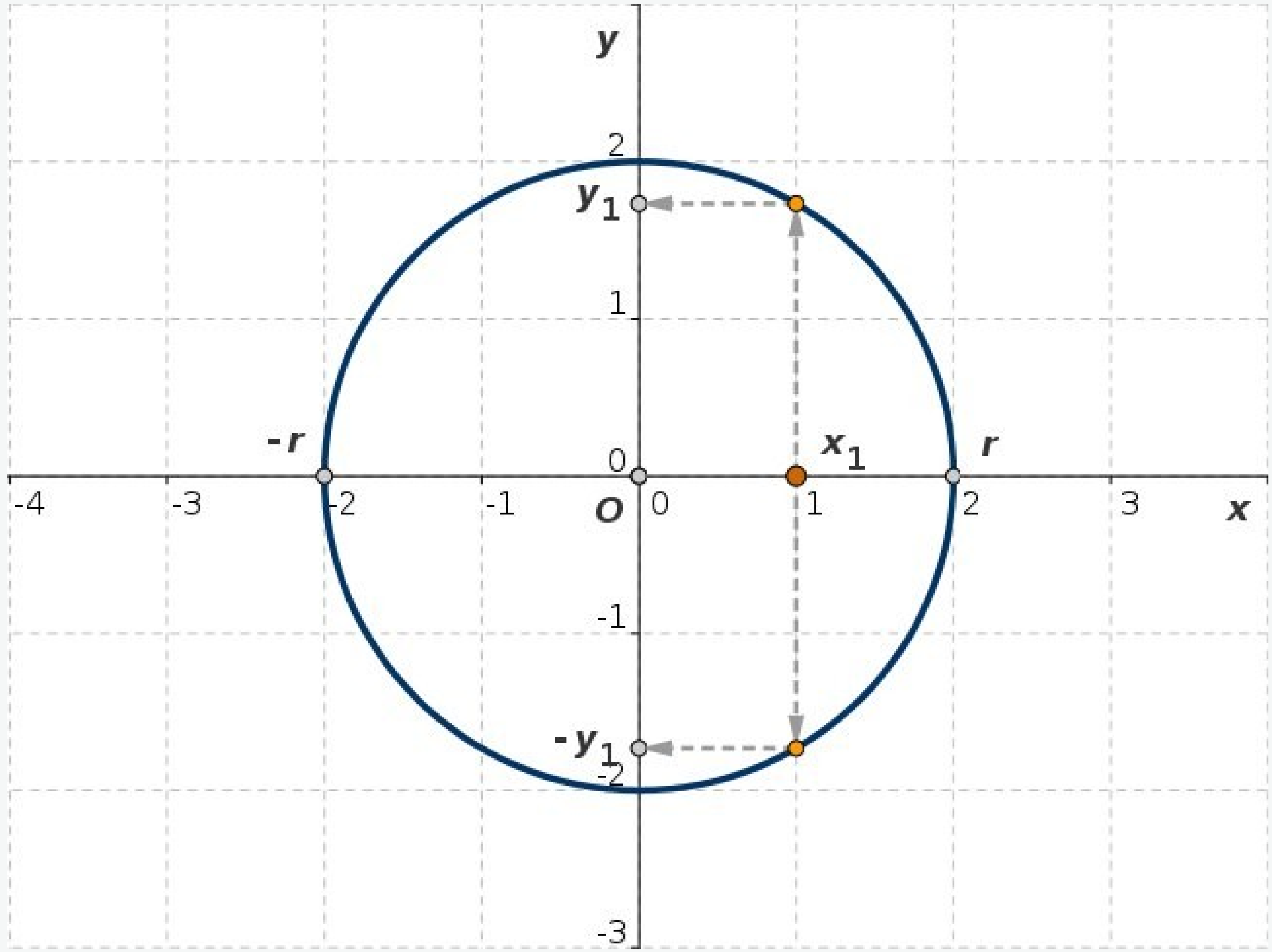

Abb. 3-1: Kreis mit Mittelpunkt O (0, 0) und Radius r = 2

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad D = [-r, r], \qquad W = [-r, r]$$

Die Gleichung des Kreises entspricht einer Relation, weil jedem x aus D mit Ausnahme von $x = r$ und $x = -r$ zwei y-Werte entsprechen.

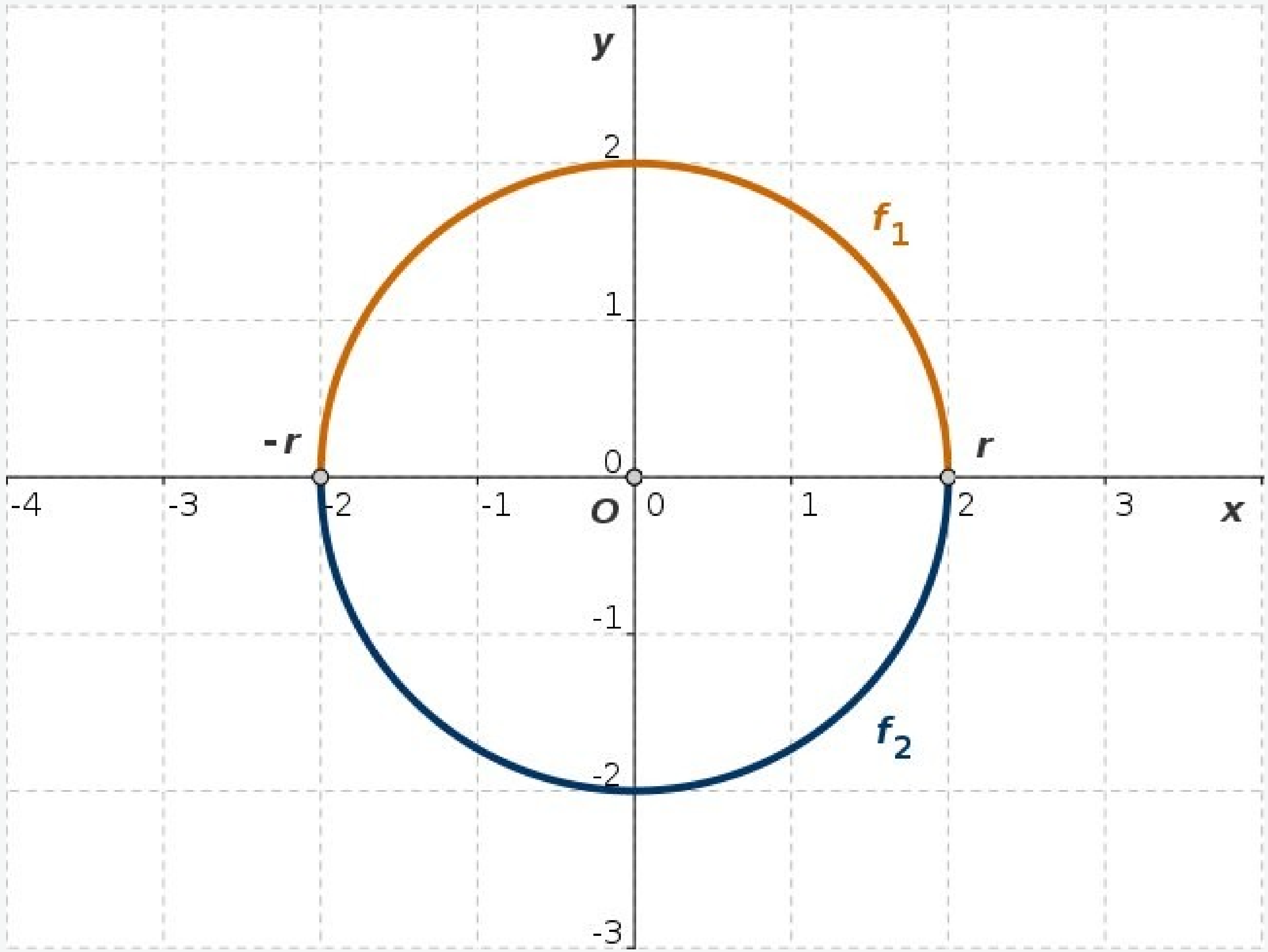

Abb. 3-2: Kreis mit Mittelpunkt O (0, 0) und Radius r = 2

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad y^2 = r^2 - x^2, \qquad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

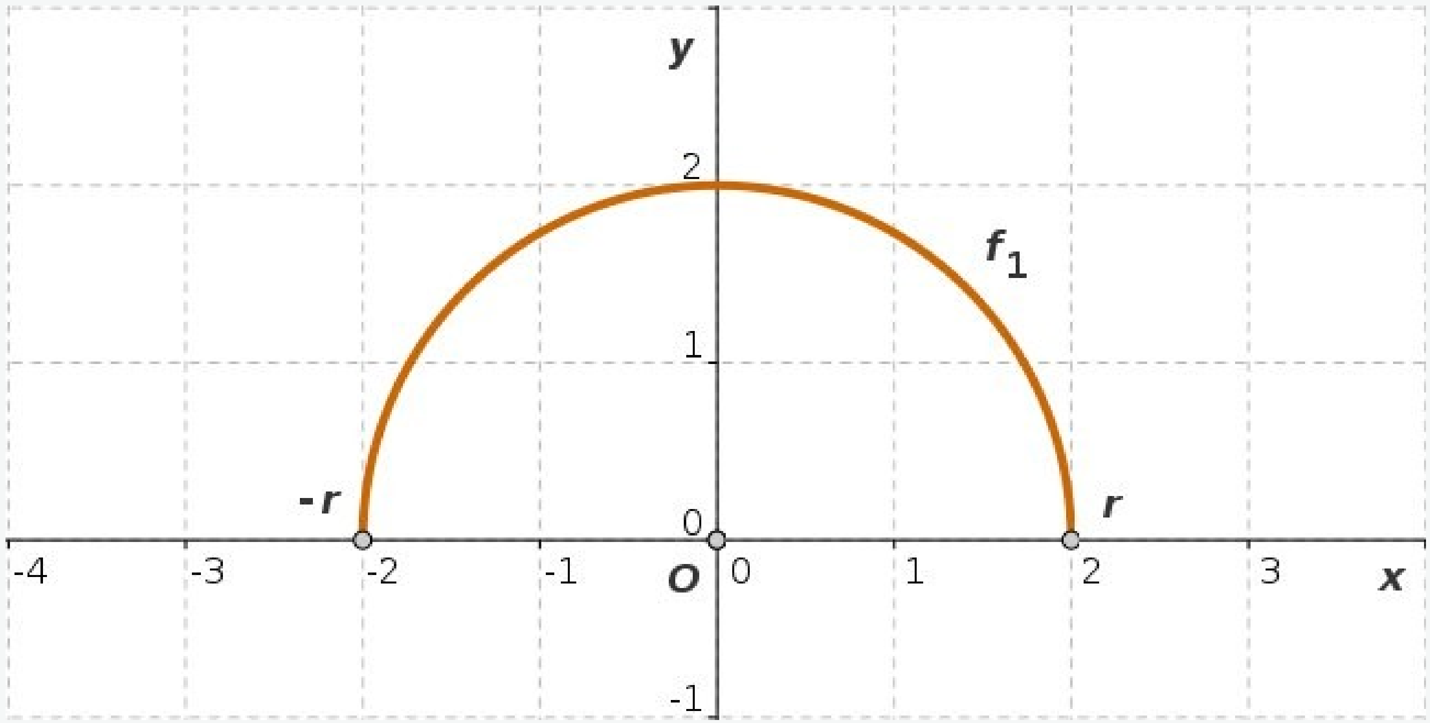

Abb. 3-3a: Halbkreis mit Mittelpunkt O (0, 0) und Radius r = 2

$$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\,, \qquad D(f_1) = [-r\,,\, r]\,, \qquad W(f_1) = [0, r]$$

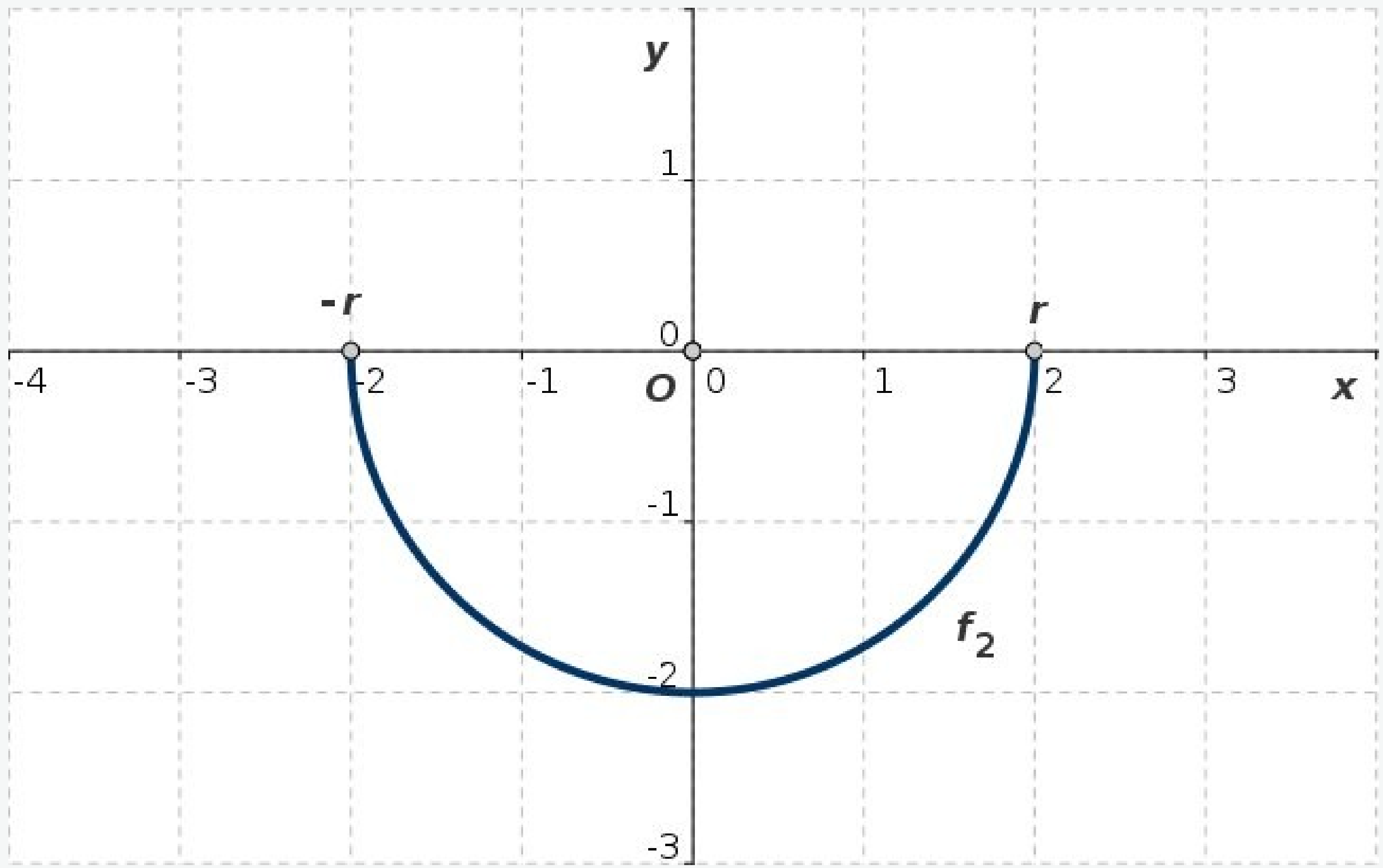

Abb. 3-3b: Halbkreis mit Mittelpunkt O (0, 0) und Radius r = 2

$$f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}\,, \qquad D(f_2) = [-r\,, r]\,, \qquad W(f_2) = [-r\,, 0]$$