http://www.youtube.com/watch?v=IFjS9ZkYDIs

Vektoren, Vektorräume

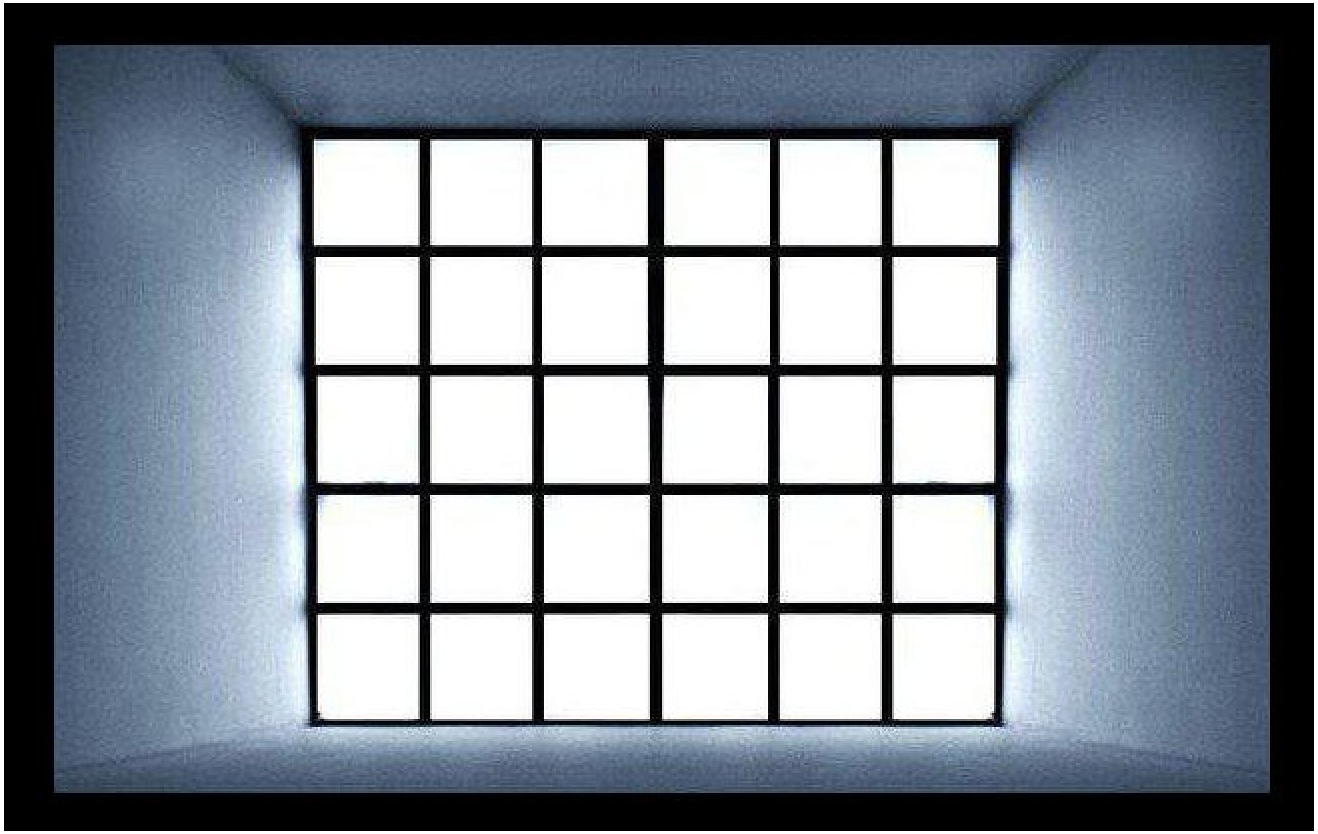

Abb. 1-1: Darstellung einer Matrix

Die Matrix hat 5 Zeilen und 6 Streifen.

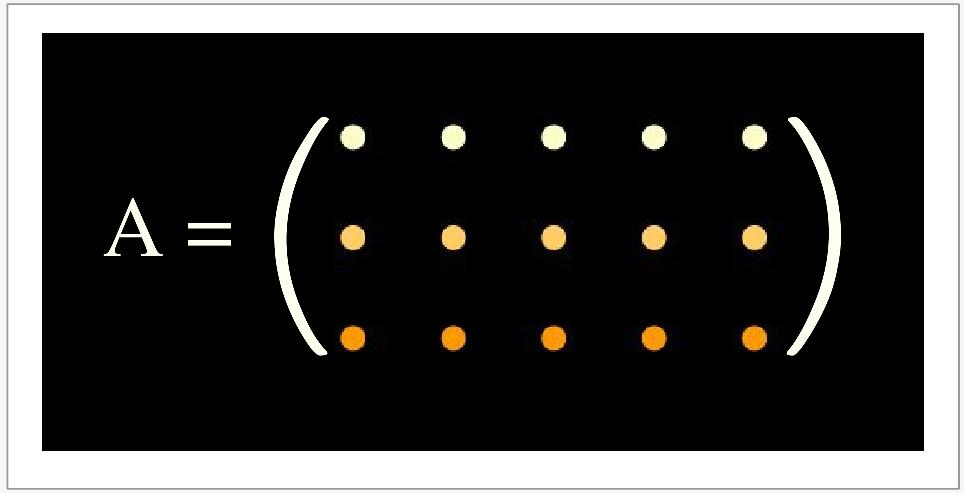

Abb. 1-2: Darstellung einer Matrix

Die Matrix hat 3 Zeilen und 5 Streifen.

Zeilenvektor in einem n-dimensionalen Raum

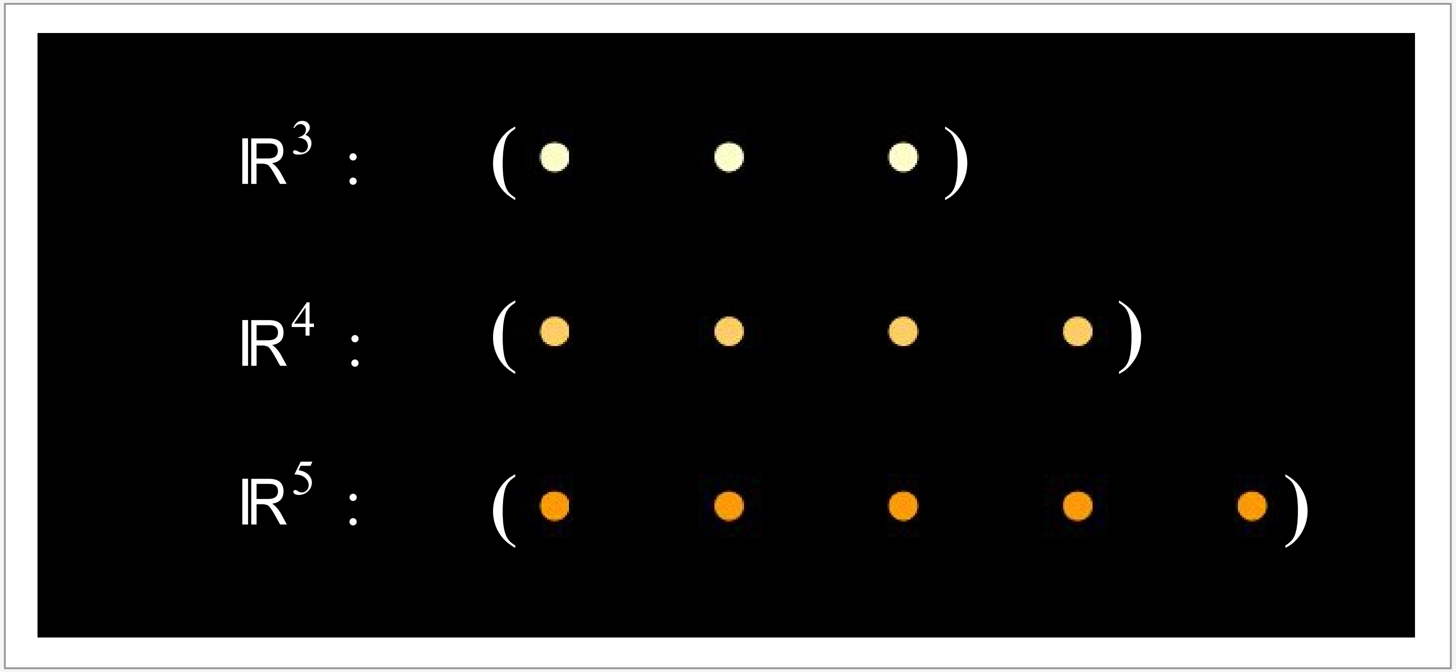

Abb. 2-1: Darstellung von Zeilenvektoren als Elementen eines 3-, 4- und 5-dimensionalen Raumes

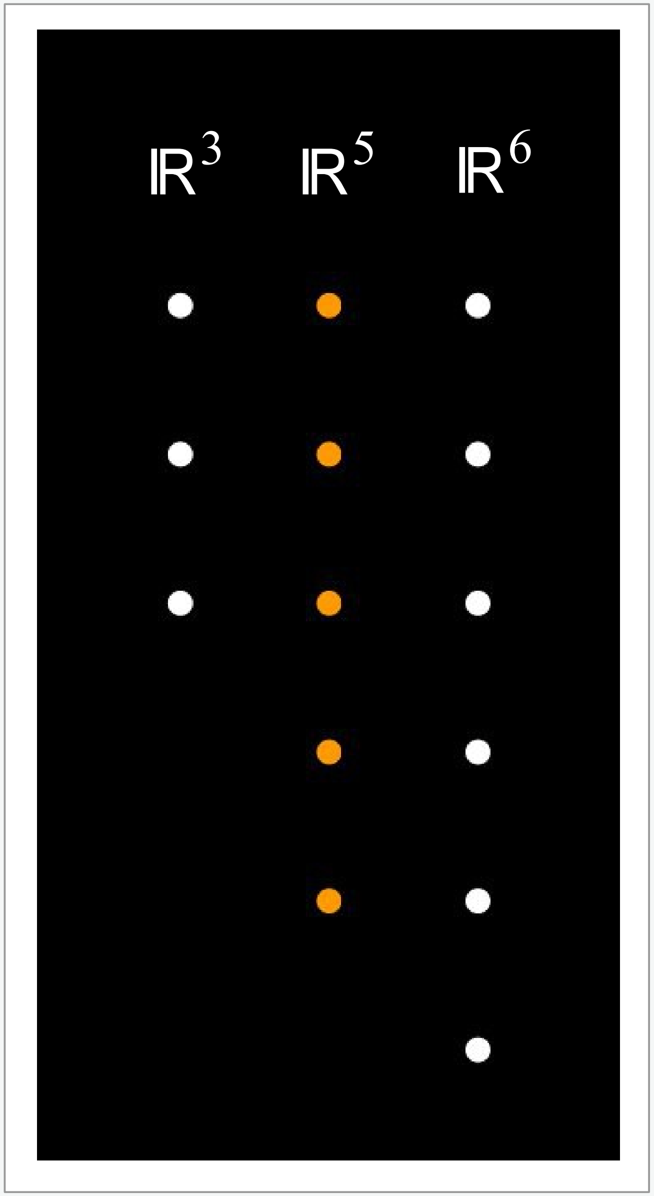

Abb. 2-2: Darstellung von Spaltenvektoren als Elementen eines 3-, 5- und 6-dimensionalen Raumes

Die Vektoren $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ sind Elemente des 5-dimensionalen Vektorraumes:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie folgende Vektoren:

$$\vec{u} + \vec{v}\,, \quad \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}\,, \quad \vec{v} - 2\,\vec{w}\,, \quad \vec{w} + 2\,\vec{u}\,, \quad \frac{1}{2}\,(\vec{u} + \vec{w})$$

Zeigen Sie, dass die Addition der Vektoren im 5-dimensionalen Raum assoziativ ist, d.h.

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 0-1 \\ -1+2 \\ 2+0 \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1-2 \\ 0+1-1 \\ -1-2+3 \\ 2-0+2 \\ -2+3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\,,\ \vec{v}\,,\ \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda\,,\ \mu \in \mathbb{R}$$

1. $\vec{v} + \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \cdot \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ – Abgeschlossenheit der Verknüpfungen
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ – Assoziativität
3. $\vec{0} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ – Existenz eines neutralen Elementes
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ – Existenz eines entgegengesetzten Elementes
5. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ – Kommutativität
6. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$ – Distributivität
7. $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$ – Distributivität
8. $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$ – Assoziativität
9. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$