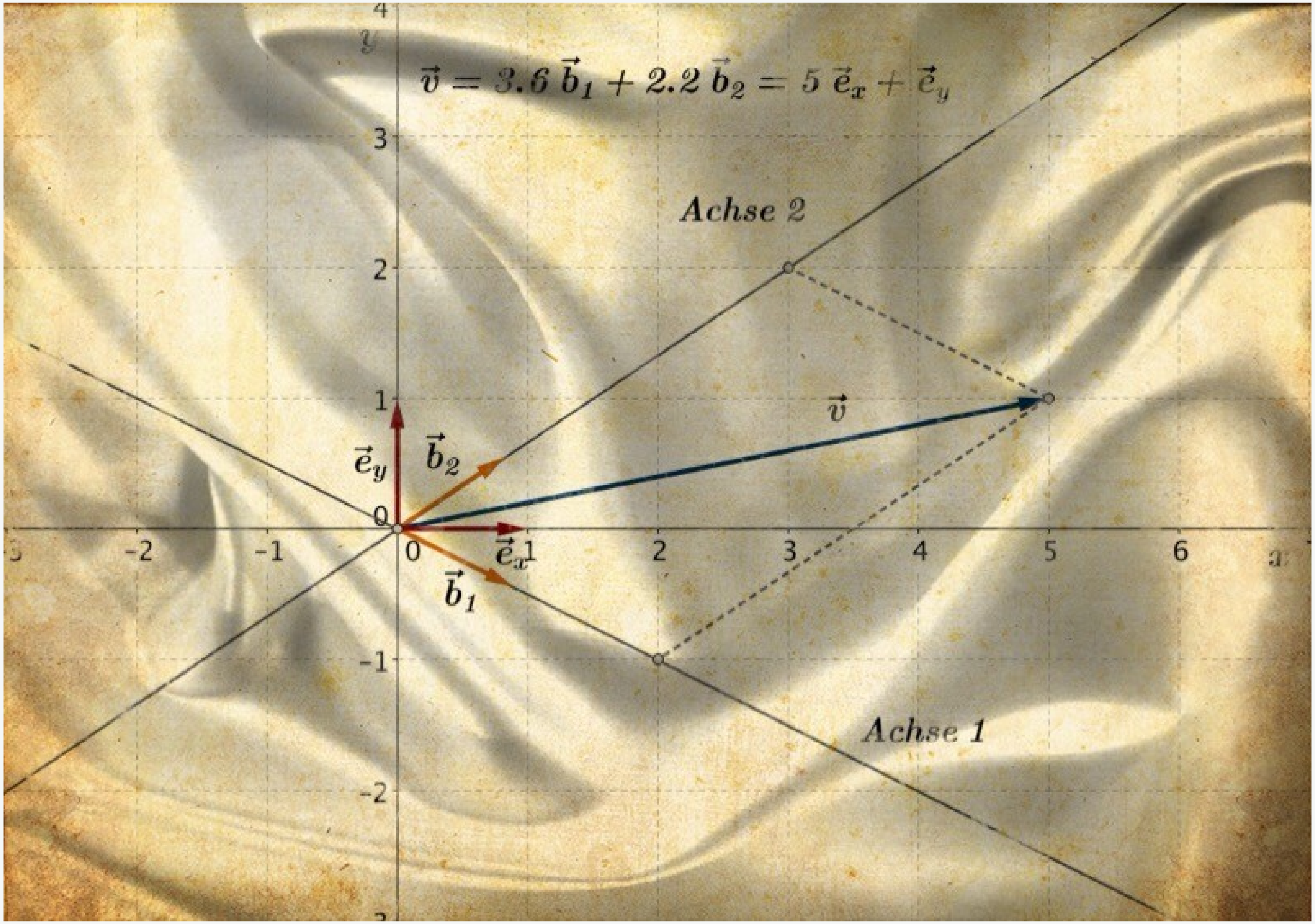


Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

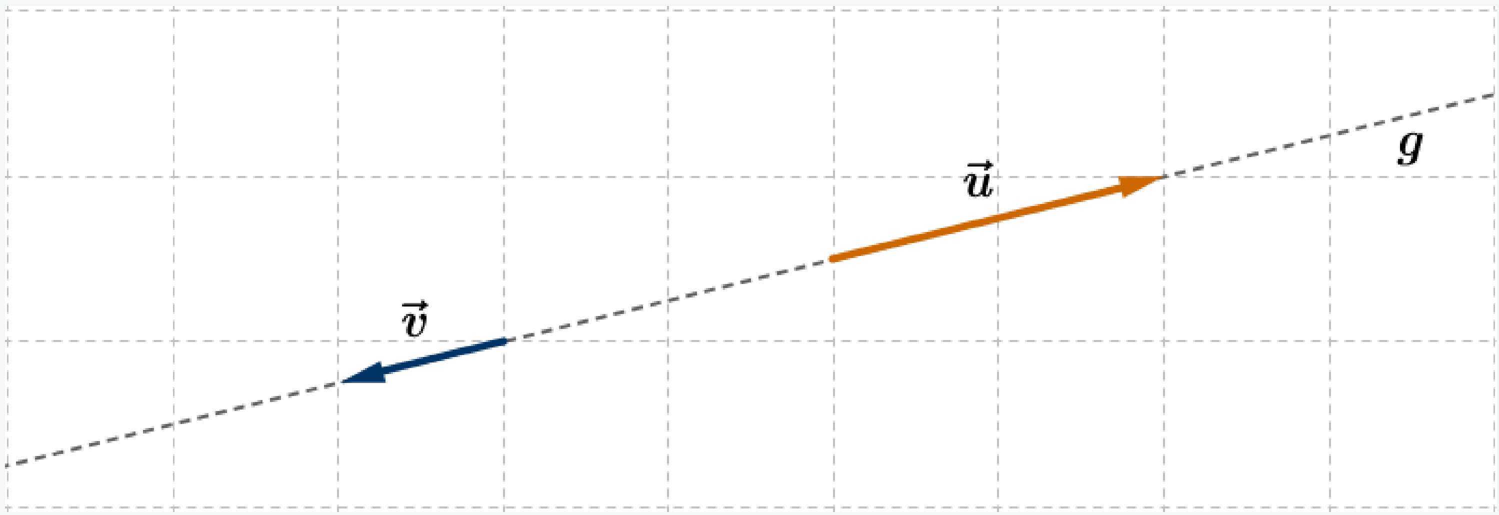


Abb. 1-1: Zwei nicht gleiche Vektoren auf der gleichen Gerade

Jeden Vektor, der auf einer Geraden liegt, kann man durch einen anderen Vektor dieser Geraden darstellen:

$$\vec{u}\,,\ \vec{v} \in g\,, \qquad \vec{u} = \lambda\,\vec{v}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Im Beispiel der Abbildung:

$$\vec{u} = -2\,\vec{v}\,, \qquad \vec{v} = -\,\frac{1}{2}\,\vec{u}$$

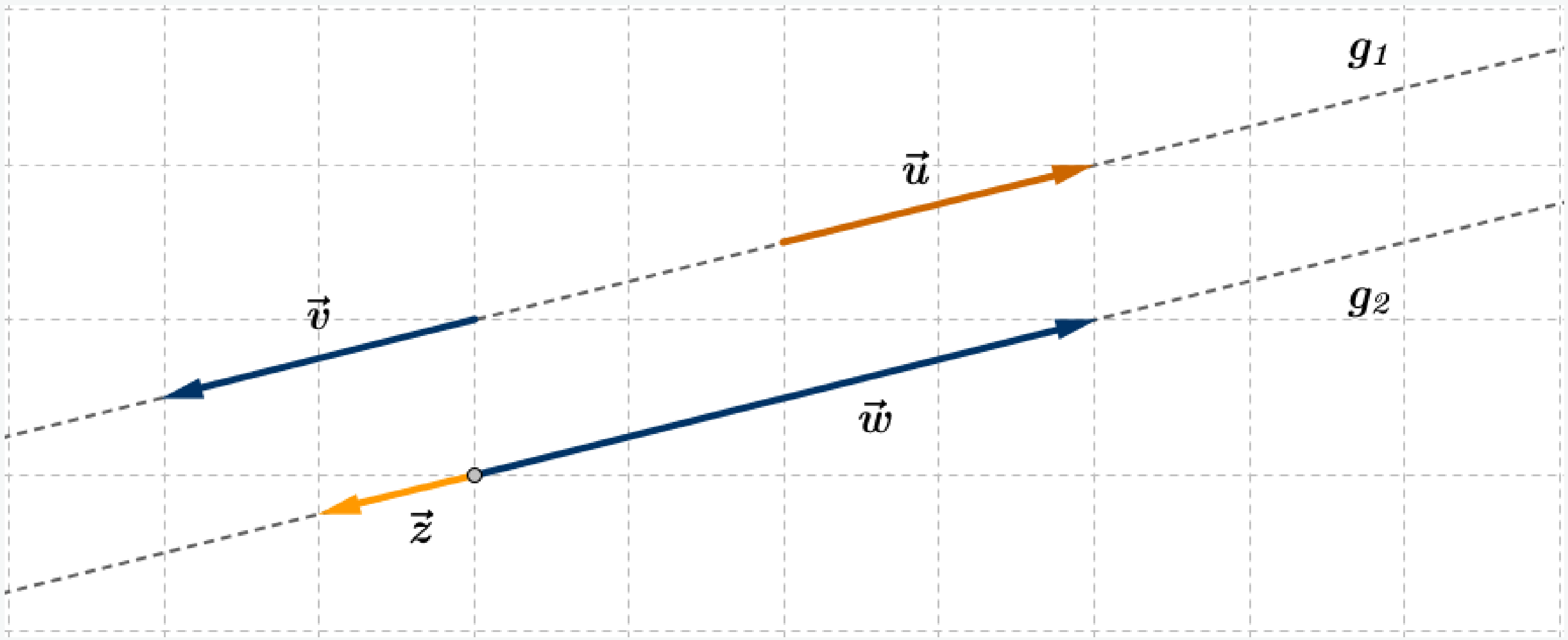


Abb. 1-2: Vektoren auf parallelen Geraden

$$g_1 \parallel g_2, \qquad \vec{u}, \ \vec{v} \in g_1, \qquad \vec{w}, \ \vec{z} \in g_2$$

$$\vec{v} = -\vec{u}, \qquad \vec{w} = 2\,\vec{u}, \qquad \vec{z} = -\frac{1}{2}\,\vec{u}$$

$$\vec{u} = -2\,\vec{z}, \qquad \vec{v} = 2\,\vec{z}, \qquad \vec{w} = -4\,\vec{z}$$

Kollineare Vektoren sind linear abhängig. Der Name kommt daher, dass man alle Vektoren auf einer Geraden oder auf parallelen Geraden durch einen einzigen von Null verschiedenen Vektor ausdrücken kann.

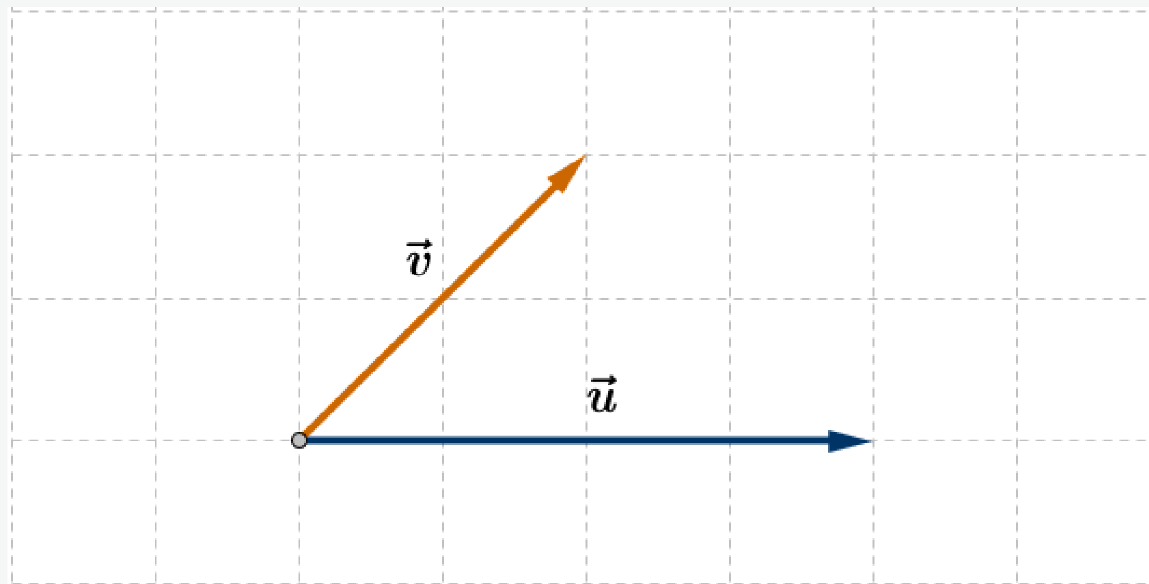


*Abb. 2-1: Zwei nicht kollineare Vektoren **u** und v*

Zwei nicht kollineare Vektoren im *2D*-Raum sind linear unabhängig.
Es gibt kein λ, das die Vektorgleichung $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$ erfüllt.

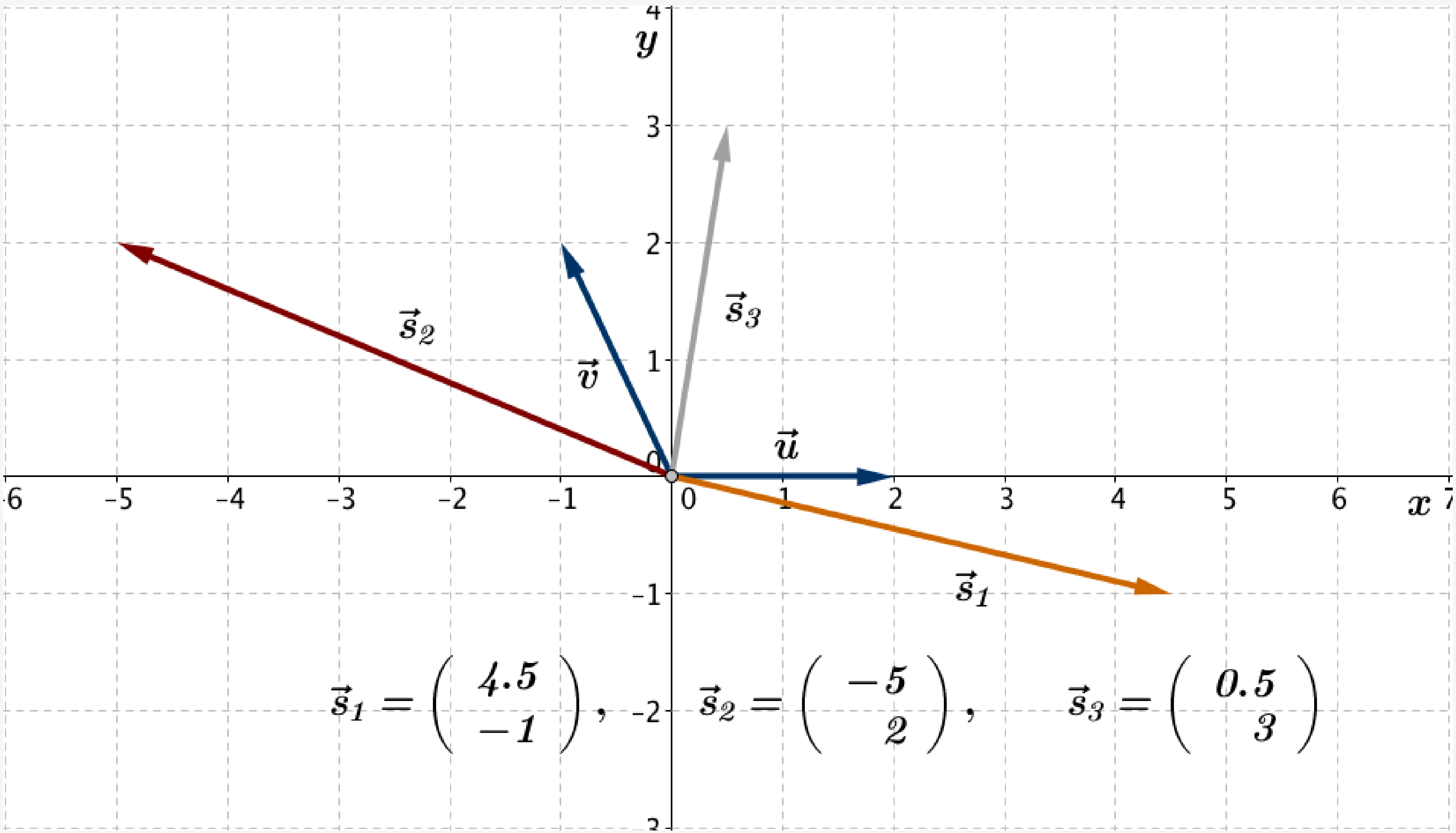


Abb. 2-2: Fünf nicht kollineare Vektoren der Ebene

Jeden Vektor der Ebene kann man aus zwei nicht kollinearen Vektoren konstruieren, z.B.:

$$\vec{u} = (2,\ 0), \quad \vec{v} = (-1,\ 2), \quad \vec{s}_1 = 2\,\vec{u} - \frac{\vec{v}}{2}, \quad \vec{s}_2 = -2\,\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{s}_3 = \vec{u} + \frac{3}{2}\,\vec{v}$$

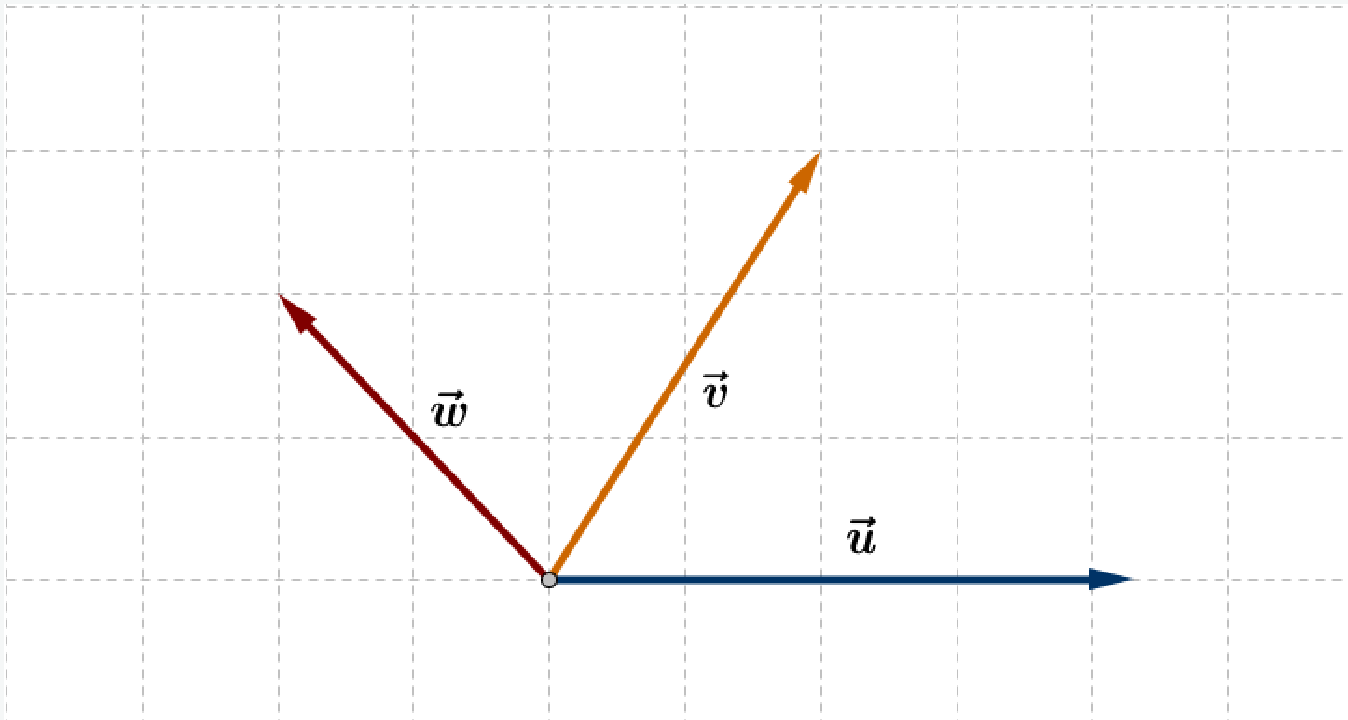


*Abb. 2-3: Drei nicht kollineare Vektoren **u, v** und **w** der Ebene*

Linear abhängig im *2D*-Raum sind:

- Zwei kollineare Vektoren (ein Vektor ist ein Vielfaches des anderen)
- Drei oder mehr Vektoren

$$\vec{w} = \lambda_1 \, \vec{u} + \lambda_2 \, \vec{v} \, , \qquad \lambda_1 \, , \; \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Sind ***u*** und ***v*** nicht kollineare Vektoren in der Ebene, so gibt es für jeden Vektor ***w*** der Ebene:

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Eine solche Darstellung wird als Linearkombination bezeichnet.

Die Menge $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ heißt eine Basis der Vektoren der Ebene.

In der Darstellung $\vec{w} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$ bezeichnet man

- die reellen Zahlen λ_1 und λ_2 als die Koordinaten des Vektors bezüglich ***(u, v)***

- die Vektoren $\lambda_1 \vec{u}$, $\lambda_2 \vec{v}$ als die Komponenten des Vektors bezüglich ***(u, v)***

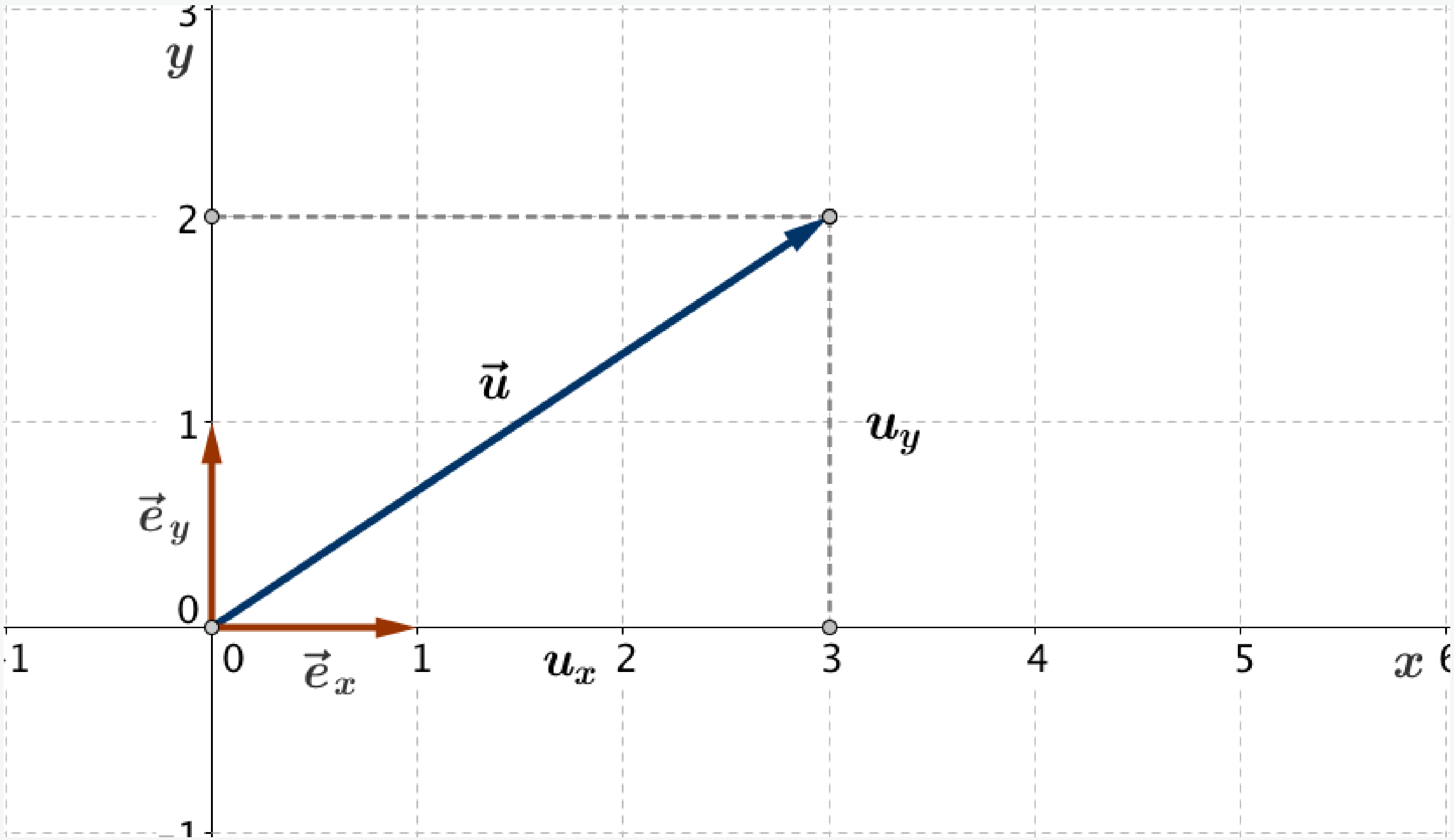


Abb. 2-4: Drei linear abhängige Vektoren der Ebene

In der Ebene kann man mit den Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen jeden beliebigen Vektor "konstruieren":

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

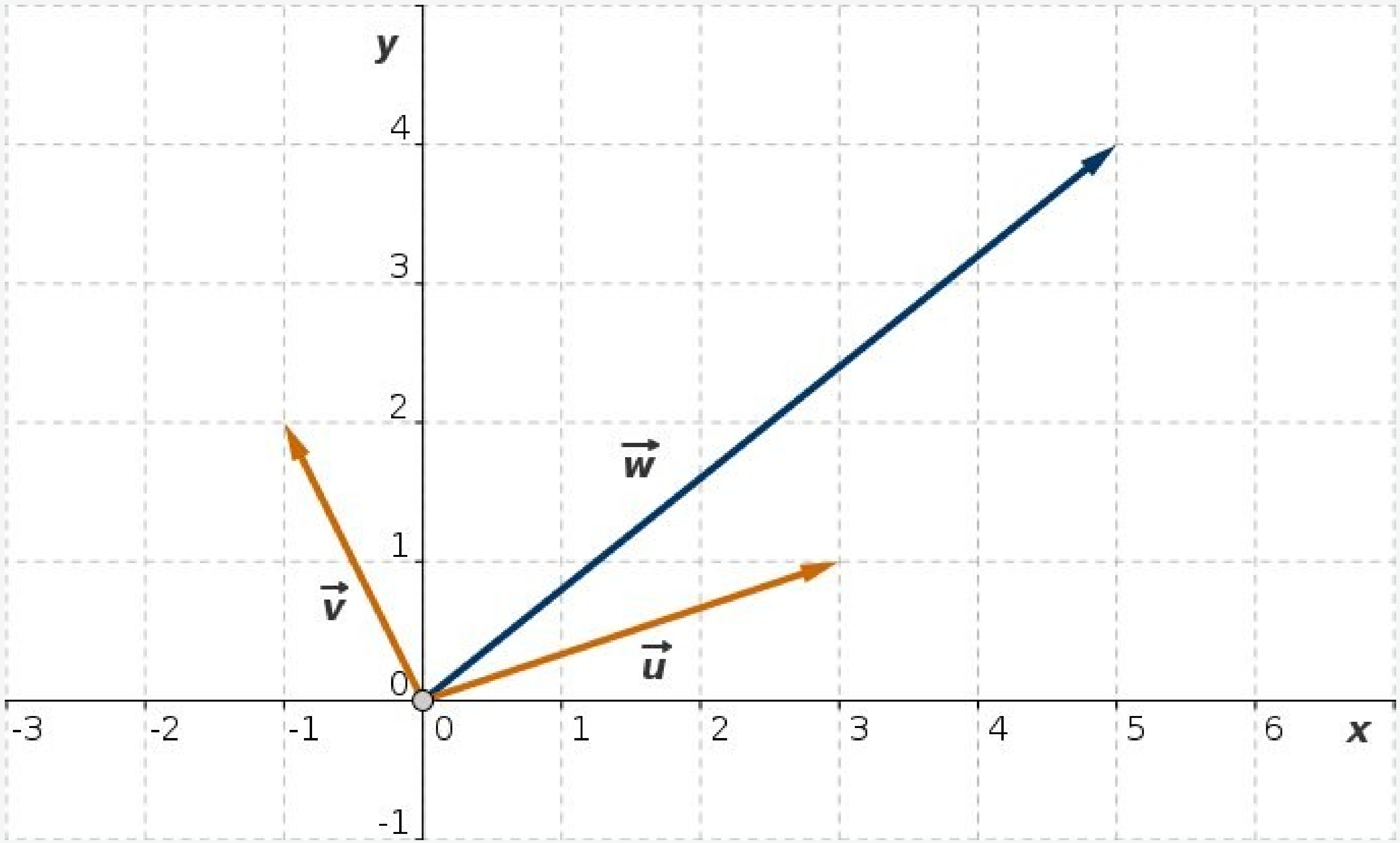


Abb. 2-5: Drei linear abhängige Vektoren der Ebene

$$\vec{u} = (3,\ 1)\,, \qquad \vec{v} = (-1,\ 2)\,, \qquad \vec{w} = (5,\ 4)$$

Im Folgenden werden wir die Zerlegung des Vektors ***w*** durch die Vektoren ***u*** und ***v*** darstellen.

$$\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung soll für die beiden Koordinaten erfüllt werden.

$$3\,\lambda - \mu = 5, \qquad \lambda + 2\,\mu = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2, \quad \mu = 1$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In den folgenden Abbildungen 2-7a bis 2-7d zeigen wir die Darstellung von Vektoren ***v*** mit verschiedenen Basen:

Abb. 2-7*a*: $\vec{v} = 2.83\,\vec{b}_1 + 3.16\,\vec{b}_2$

Abb. 2-7*b*: $\vec{v} = 3.8\,\vec{b}_1 + 2.5\,\vec{b}_2$

Abb. 2-7*c*: $\vec{v} = 2.5\,\vec{b}_1 + 2.5\,\vec{b}_2$

Abb. 2-7*d*: $\vec{v} = 3.61\,\vec{b}_1 + 2.24\,\vec{b}_2 = 5\,\vec{e}_x + \vec{e}_y$

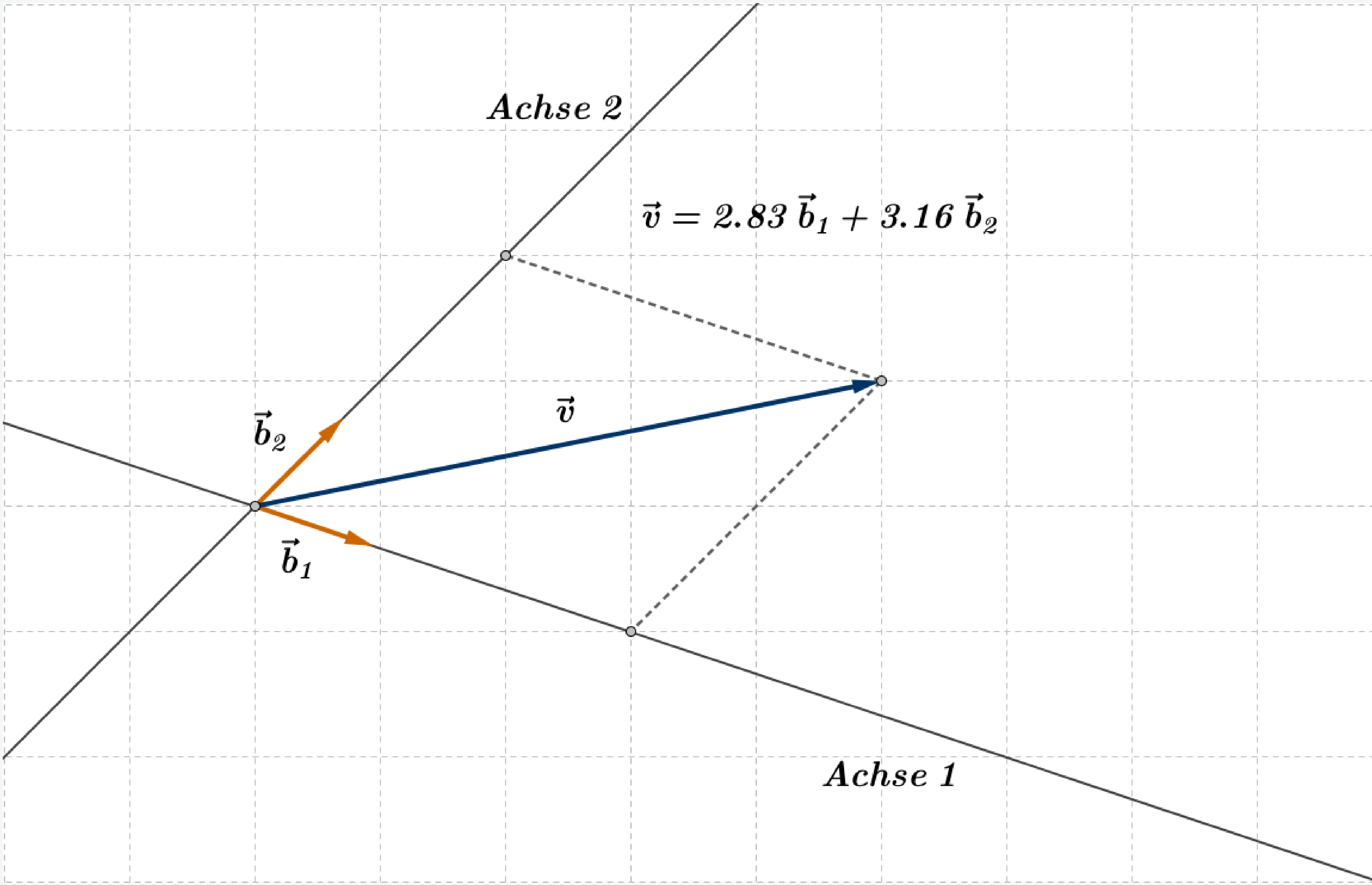


Abb. B1-a: Darstellung eines Vektors ***v*** *durch zwei Basisvektoren*

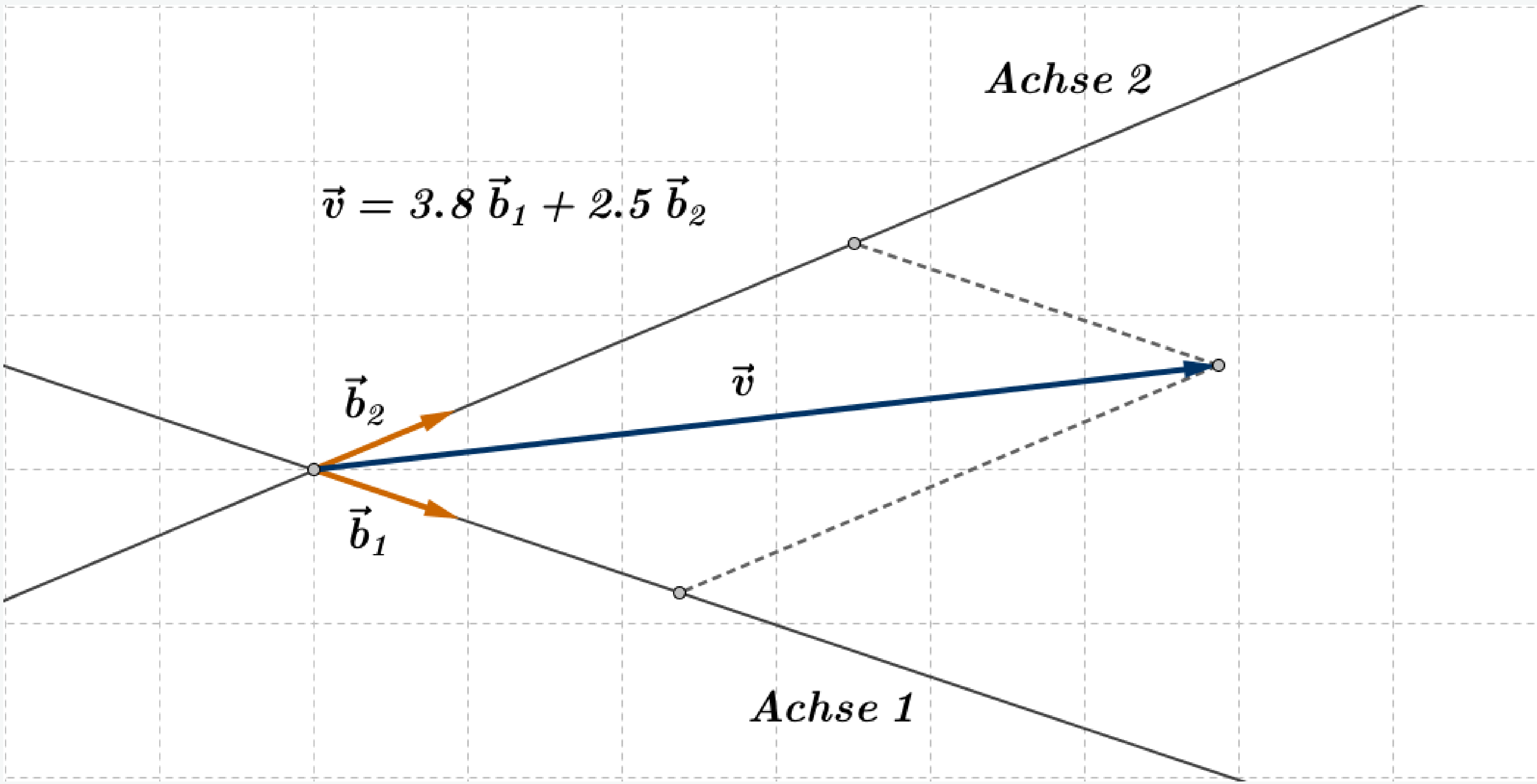


*Abb. B1-b: Darstellung eines Vektors **v** durch zwei Basisvektoren*

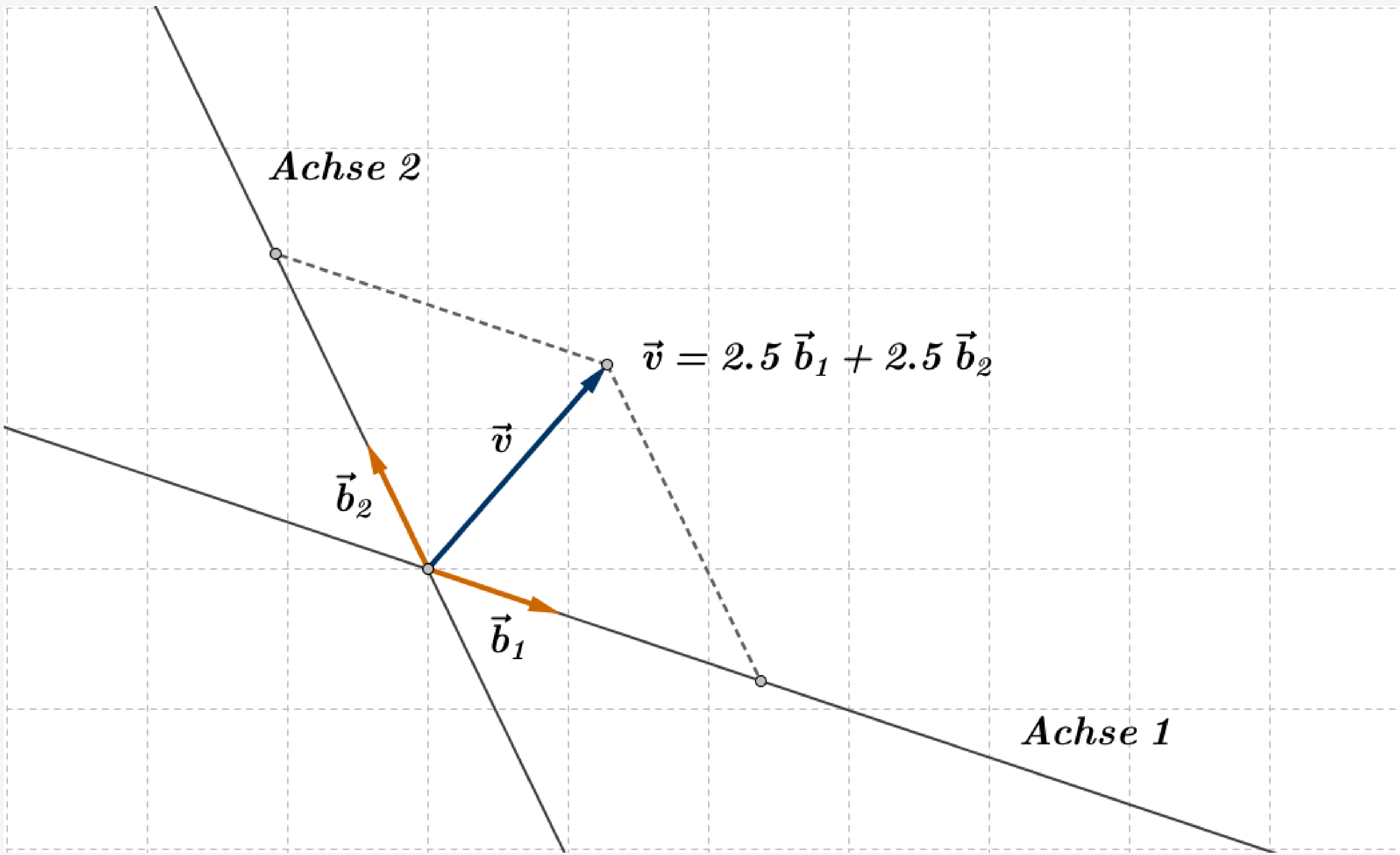


*Abb. B1-c: Darstellung eines Vektors **v** durch zwei Basisvektoren*

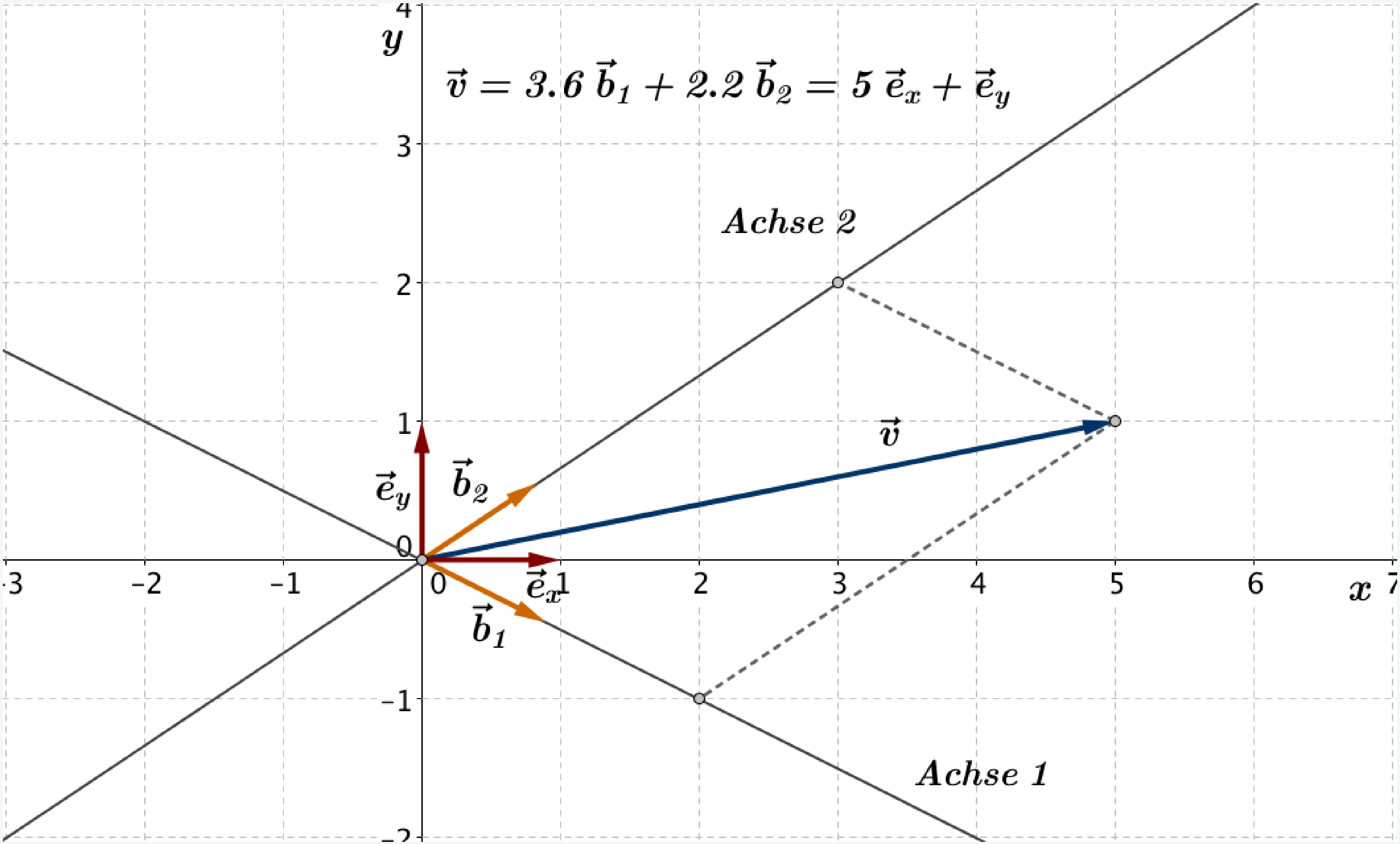


*Abb. B1-d: Darstellung eines Vektors **v** durch zwei verschiedene Basen*

Linear abhängige Vektoren im 3D-Raum sind:

- Drei Vektoren, die in einer Ebene liegen (komplanare Vektoren)

$$\vec{v}_3 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$$

- Vier oder mehr Vektoren

$$\vec{v}_4 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3$$

Linear unabhängige Vektoren im 3D-Raum:

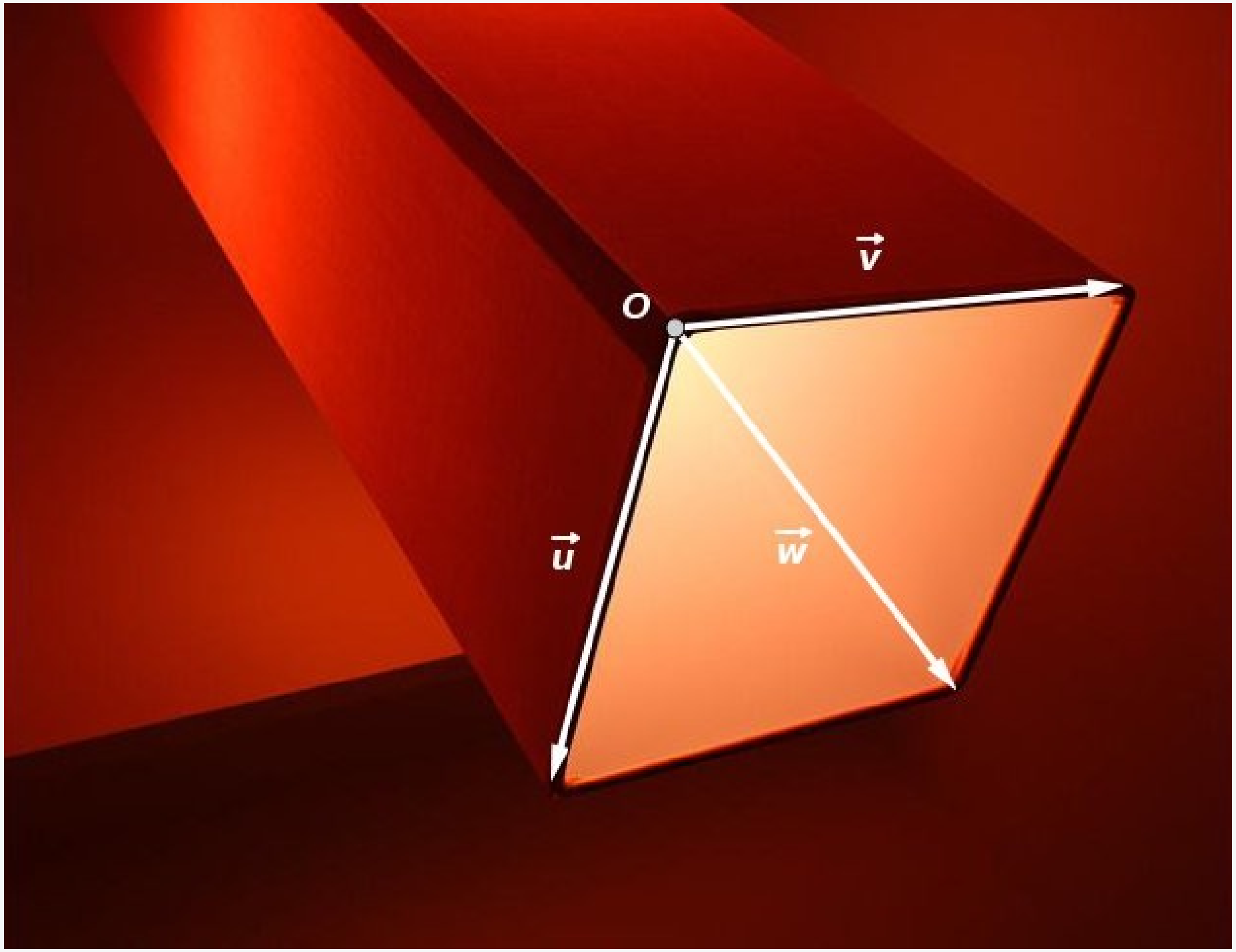
Drei nicht komplanare Vektoren $\vec{v}_1, \ \vec{v}_2, \ \vec{v}_3$

$$\vec{v}_3 \neq \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$$

Jeder Vektor des *3D*-Raumes kann als Linearkombination von drei linear unabhängigen Vektoren dargestellt werden.

Die Menge $\{\vec{v}_1, \ \vec{v}_2, \ \vec{v}_3\}$ heißt eine Basis des *3D*-Raumes.

Lineare Abhängigkeit: Beispiel 2a



http://www.fotocommunity.de/pc/pc/cat/16529/display/22461194

*Abb. B-2a: Drei komplanare Vektoren **u, v** und **w** sind linear abhängig*

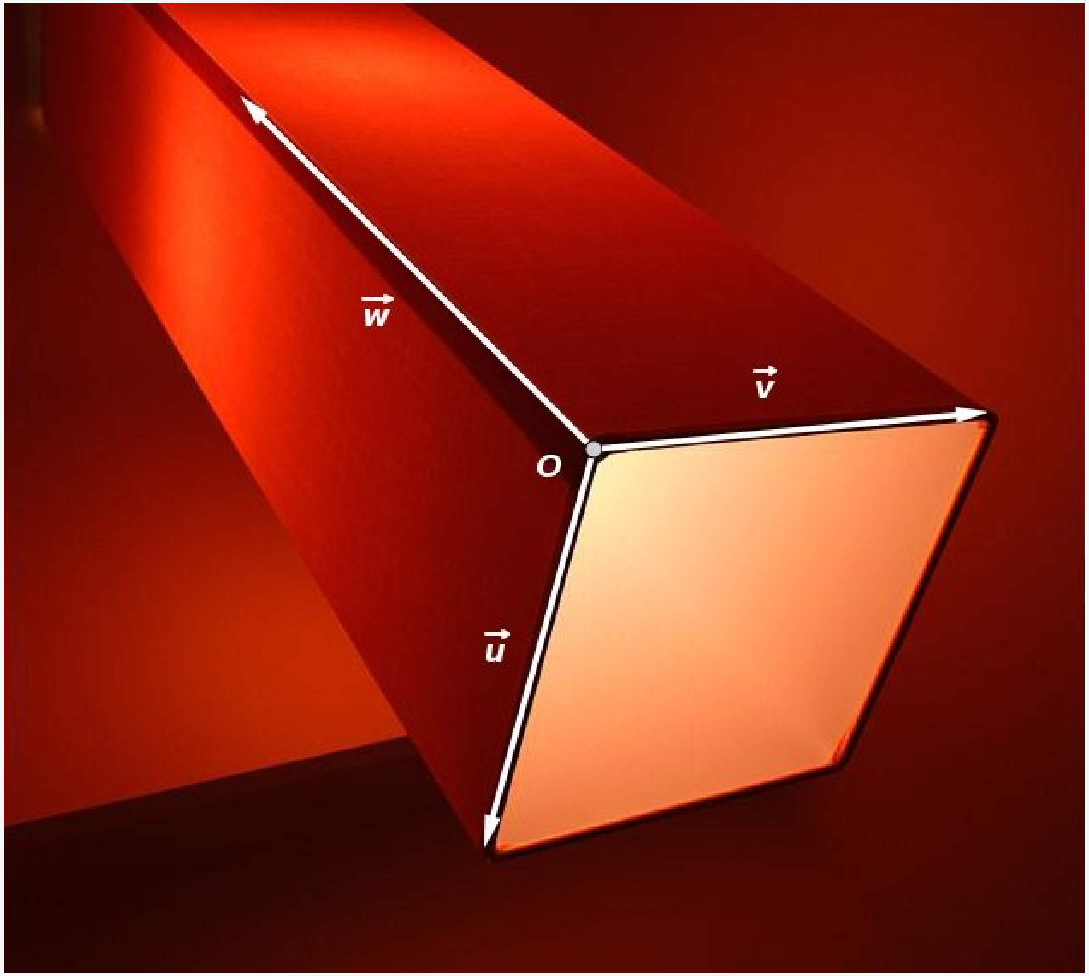


Abb. B-2b: Drei nicht komplanare Vektoren ***u, v*** *und* ***w*** *sind linear unabhängig*

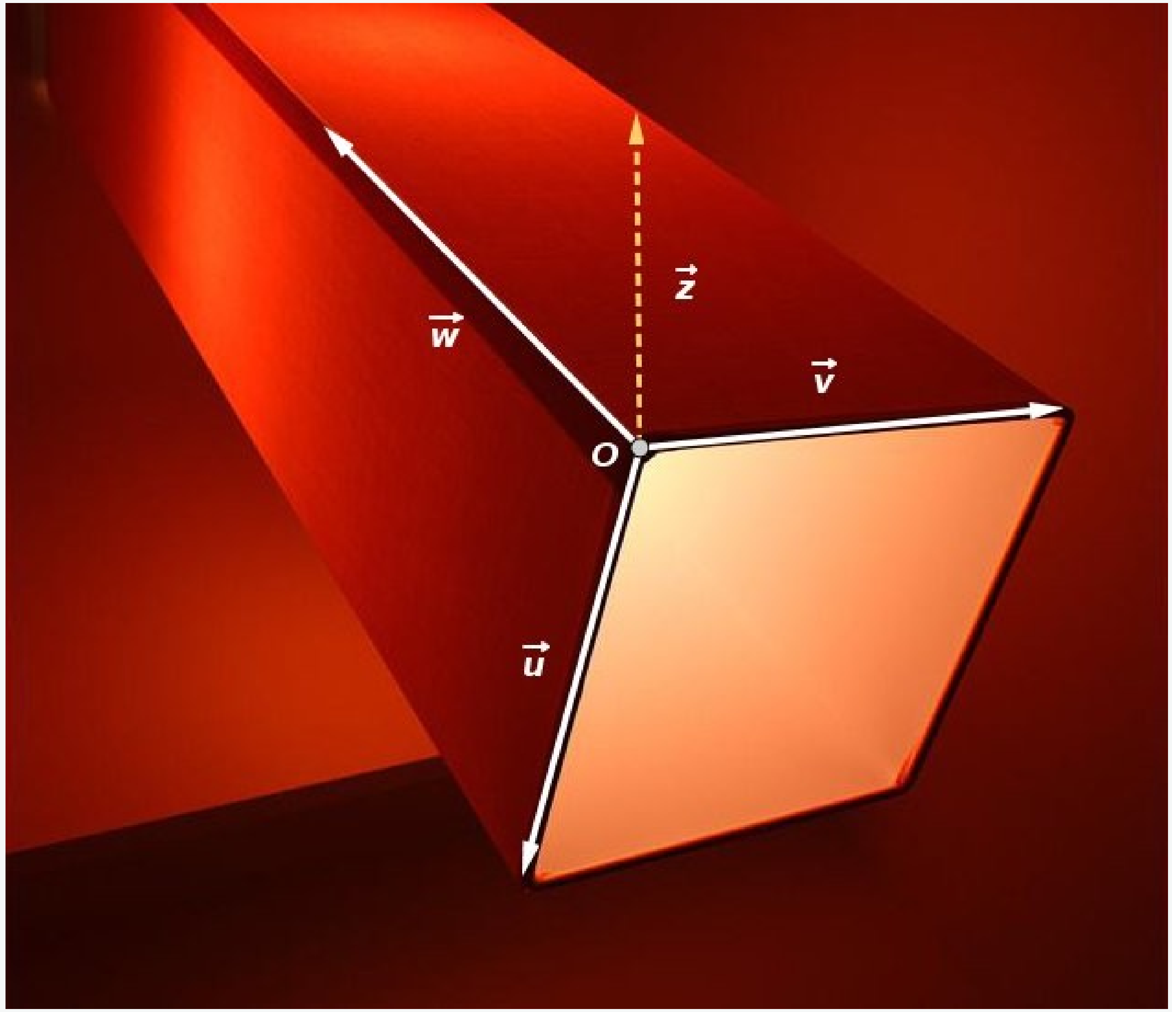


*Abb. B-2c: Vier nicht komplanare Vektoren **u, v, w** und **z** sind linear abhängig*

Wir prüfen, ob die Vektoren linear abhängig oder unabhängig sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Die Vektoren sind lienar unabhängig

Definition: Basis im *3D*-Raum

Wenn es für jeden Vektor des Raumes eindeutig bestimmte reelle Zahlen x, y und z gibt mit

$$\vec{u} = x\ \vec{v}_1 + y\ \vec{v}_2 + z\ \vec{v}_3 \quad ,$$

dann bilden die nicht komplanaren Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ eine Basis

Definition: Basis im *n*-dimensionalen Raum

Jedes System von n linear unabhängigen Vektoren in einem Vektorraum der Dimension n heißt Basis des Vektorraums. Die Vektoren der Basis heißen Basisvektoren. Jeder Vektor des Vektorraums hat eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i\ \vec{v}_i$$

$x_i \in \mathbb{R}$ heißen Koordinaten von $\boldsymbol{u}$ bezüglich der Basis

$$\{\vec{v}_1\,,\ \vec{v}_2\,,\ \ldots\,,\ \vec{v}_n\}$$

Ein Vektorraum (V) ist eine algebraische Struktur. Die Elemente eines Vektorraums sind Vektoren. Sie können addiert oder mit Skalaren (Zahlen) multipliziert werden. Das Ergebnis Addition von Vektoren oder Multiplikation mit einem Skalar ist ein Vektor des gleichen Vektorraums.

$$\vec{u}\,,\ \vec{v} \in V\,, \quad \vec{u} + \vec{v} \in V\,, \quad \lambda\,\vec{v} \in V\,, \quad \lambda\,\vec{u} \in V$$

$$\vec{u}\,,\ \vec{v}\,,\ \vec{w} \in V\,, \quad \alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}$$

1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ Assoziativgesetz der Addition
2. $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}\,, \quad \vec{0} \in V$ Nullelement bezüglich Addition
3. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ Inverses Element bezüglich Addition
4. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ Kommutativgesetz der Addition
5. $\alpha(\beta\,\vec{u}) = (\alpha\beta)\,\vec{u}\,,$ Assoziativgesetz, Multiplikation mit Skalaren
6. $(\alpha + \beta)\,\vec{u} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{u}$ Distributivgesetz, Addition von Skalaren
7. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\,\vec{v} + \alpha\,\vec{u}$ Distributivgesetz, Addition von Vektoren

Die Vektoren eines Vektorraumes V, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$,

heißen linear unabhängig, wenn aus

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \ldots + a_n \vec{v}_n = \vec{0}, \qquad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

notwendig $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ folgt. Andernfalls heißen sie linear abhängig.

Die Vektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis im dreidimensionalen Kartesischen Raum. Sie sind linear unabhängig. Jeder dreidimensionale Vektor $\boldsymbol{v}$ kann als Linearkombination der drei Basisvektoren dargestellt werden

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

Aufgabe 1: Prüfen Sie, ob die Vektoren ***a*** und ***b*** kollinear sind:

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$ 2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Prüfen Sie, ob die Vektoren ***a*** und ***b*** eine Basis bilden

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Prüfen Sie, ob diese Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass folgende Vektoren eine Basis im vierdimensionalen Raum bilden:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} = \lambda \vec{b}$

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad -2 = \lambda, \qquad 4 = -2\lambda$$

$$\vec{a} = -2\vec{b}$$

Man hätte gleich erkennen können, dass Vektor ***a*** ein Vielfaches von Vektor ***b*** ist:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren ***a*** und ***b*** sind kollinear.

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Vektoren ***a*** und ***b*** sind nicht kollinear, da keiner ein Vielfaches des anderen ist.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\lambda \\ 14\lambda \end{pmatrix}, \qquad 3 = -6\lambda, \qquad 7 = 14\lambda$$

$$\begin{cases} 3 = -6\lambda, & \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ 7 = 14\lambda, & \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Das System hat keine Lösung. Die Vektoren ***a*** und ***b*** sind linear unabhängig und bilden eine Basis.

Drei Vektoren des dreidimensionalen Raumes sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen. Ist das der Fall, dann kann einer der Vektoren als eine lineare Kombination der anderen dargestellt werden:

$$a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 = \vec{u}_3$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ 2\,a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\,a_2 \\ -a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3\,a_2 = -1 \\ a_1 - a_2 = 3 \\ 2\,a_1 + a_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 + a_2 + 3\,a_2 = -1, \quad 4\,a_2 = -4, \quad a_2 = -1 \\ a_1 = 3 + a_2, \quad a_1 = 3 - 1 = 2 \\ 2\,a_1 + a_2 = 3 \end{cases}$$

$$a_1 = 2, \quad a_2 = -1$$

$$2\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{u}_3, \quad \Leftrightarrow \quad 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die drei Vektoren sind linear abhängig.

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 + \lambda_4 \vec{u}_4 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \vec{0}$$

Aufgabe 5: Geben Sie die Zerlegung des Vektors ***u*** durch die Basisvektoren ***a*** und ***b*** an.

$a)\quad \vec{u} = (4, -15), \qquad \vec{a} = (2, 0), \qquad \vec{b} = (0, 3)$

$b)\quad \vec{u} = (1, -2), \qquad \vec{a} = (1, 4), \qquad \vec{b} = (2, 5)$

Aufgabe 6: Für welche c sind die Vektoren ***u***, ***v*** und ***w*** linear abhängig?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a)\quad \vec{u} = (4, -15), \qquad \vec{a} = (2, 0), \qquad \vec{b} = (0, 3)$

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -15 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$4 = 2\lambda_1, \quad -15 = 3\lambda_2, \qquad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -5$$

$$\vec{u} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$$

$b)\quad \vec{u} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$

$$a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v} = \vec{w}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a_1 + 0 = 1, \qquad a_1 + a_2 = c, \qquad 0 + a_2 = 1$$

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_1 + a_2 = c, \qquad c = 2$$

Die Vektoren $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ sind linear abhängig, wenn $c = 2$.

Aufgabe 7: Zeigen Sie, dass Vektoren ***u***, ***v*** und ***w*** linear unabhängig sind. Stellen Sie den Vektor ***a*** als lineare Kombination von ***u***, ***v*** und ***w*** dar.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1)\ \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad 2)\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad 3)\ \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Die Vektoren ***u***, ***v*** und ***w*** sind linear unabhängig. Stellen Sie den Vektor ***a*** als lineare Kombination von ***u***, ***v*** und ***w*** dar.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$1)\ \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \qquad 2)\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad 3)\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 7:

1) $\vec{a} = 2\,\vec{u} - \vec{v} + 3\,\vec{w}$

2) $\vec{a} = -\vec{u} + 4\,\vec{v} - 2\,\vec{w}$

3) $\vec{a} = -3\,\vec{u} + 5\,\vec{v} + 4\,\vec{w}$

Lösung 8:

1) $\vec{a} = -2\,\vec{u} + 3\,\vec{v} - 2\,\vec{w}$

2) $\vec{a} = 4\,\vec{u} + 2\,\vec{v} - \vec{w}$

3) $\vec{a} = 2\,\vec{u} + \dfrac{3}{2}\,\vec{v} + \dfrac{1}{2}\,\vec{w}$