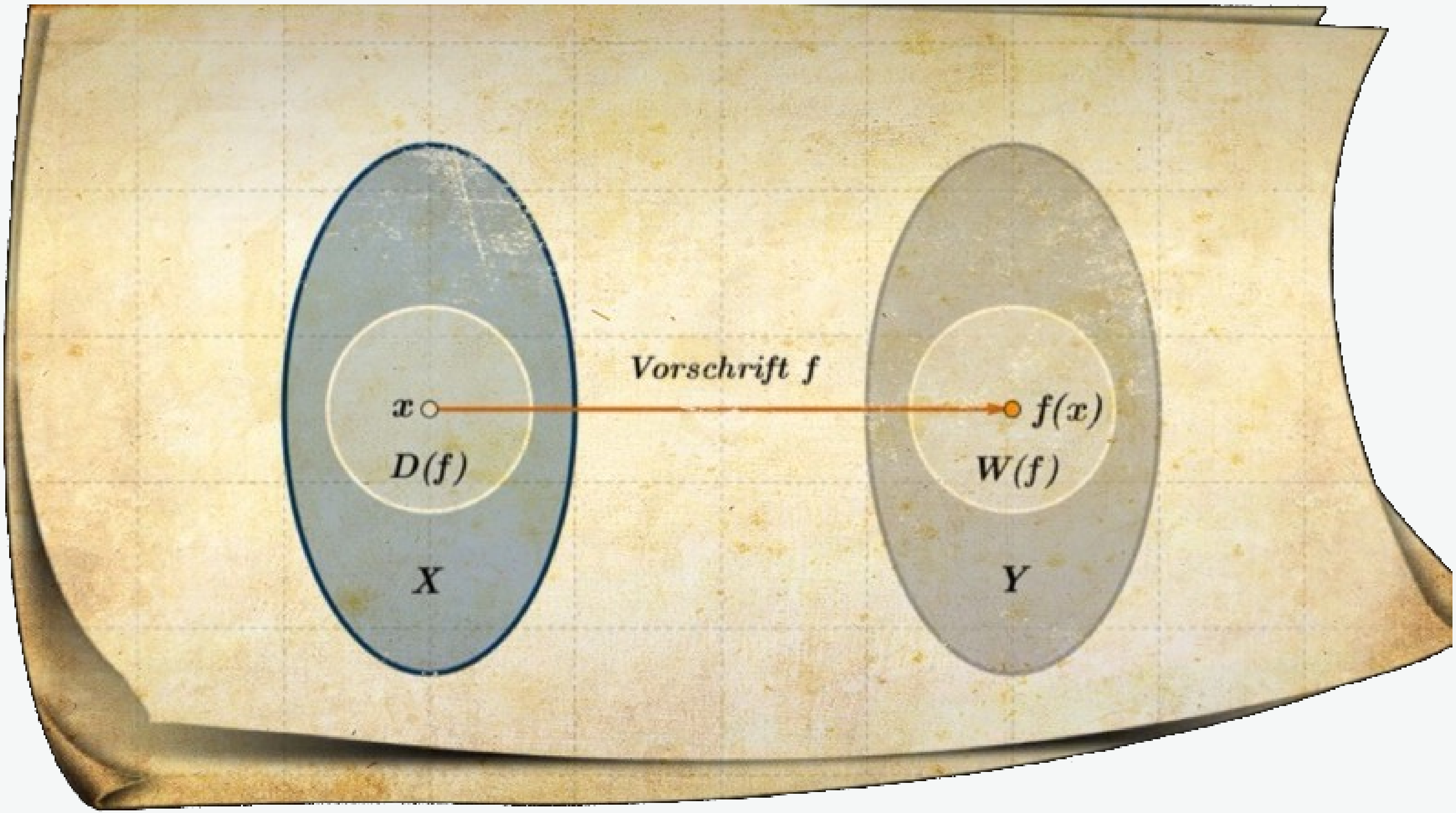

Abbildungen, Funktionen

Oft will man Elementen einer bestimmten Menge auf klare Weise Elemente einer anderen Menge zuordnen. Derartige Vorschriften nennt man Abbildungen. Das Konzept einer Abbildung ist ein grundlegendes Konzept der Mathematik.

Definition:

Unter einer Abbildung f von X nach Y versteht man eine Vorschrift (die z.B. durch ein Naturgesetz, eine Tabelle oder eine Formel gegeben sein kann), die jedem Element x aus X genau ein Element $f(x)$ aus Y zuordnet.

Der Begriff "Abbildung" ist sehr allgemein und beinhaltet keinerlei Einschränkungen bezüglich der Objekte, die einander zugeordnet werden.

Zur Beschreibung einer Abbildung f von X nach Y benutzt man die Schreibweise

$$X \xrightarrow{f} Y, \qquad x \to f(x)$$

Der erste Ausdruck charakterisiert f als eine Abbildung von X nach Y, der zweite spezifiziert die Zuordnungsvorschrift, diezufolge x auf das Element $f(x)$ abgebildet wird.

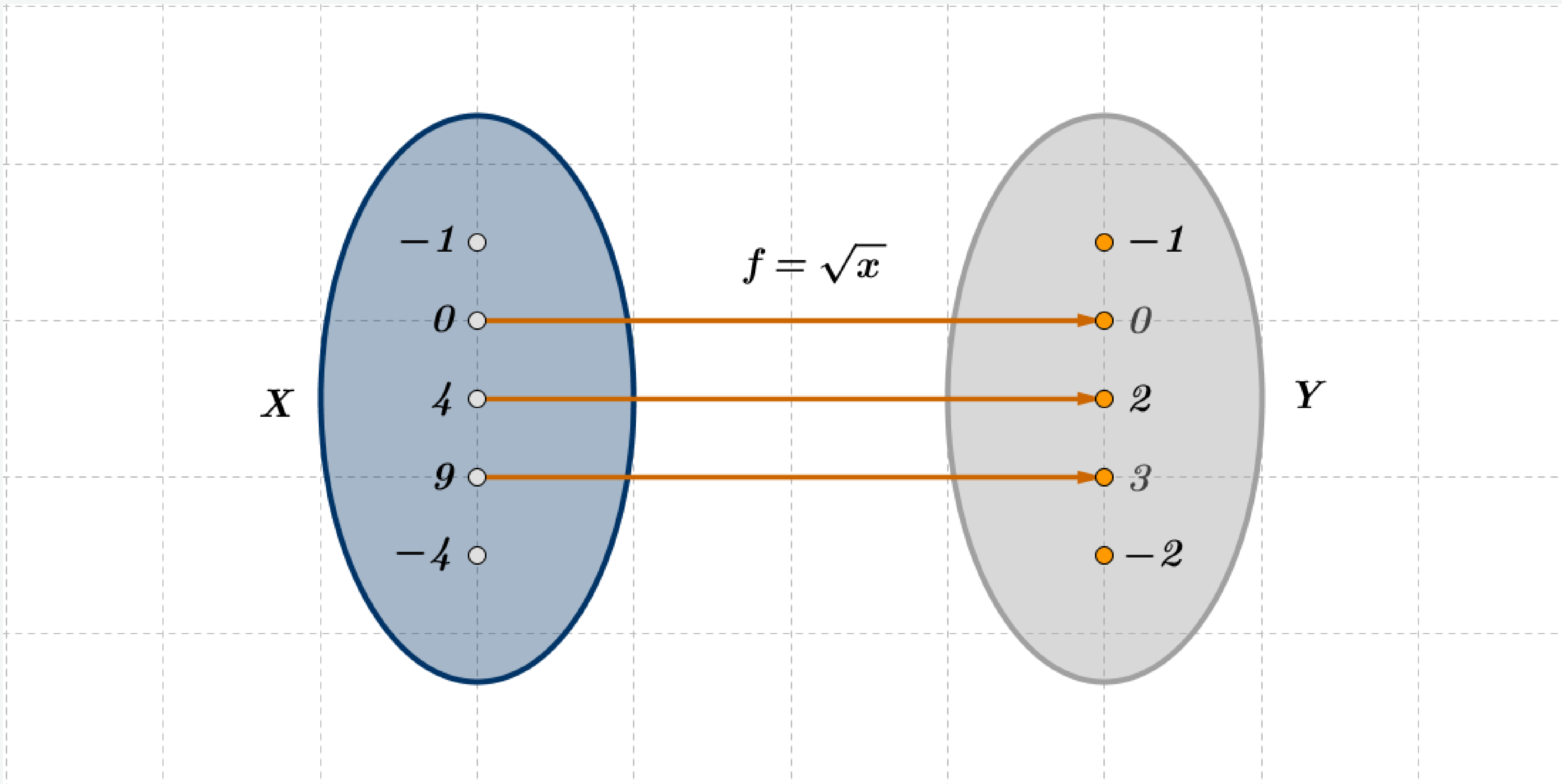

Abb. 1: Darstellung einer Abbildung zwischen den Mengen X und Y

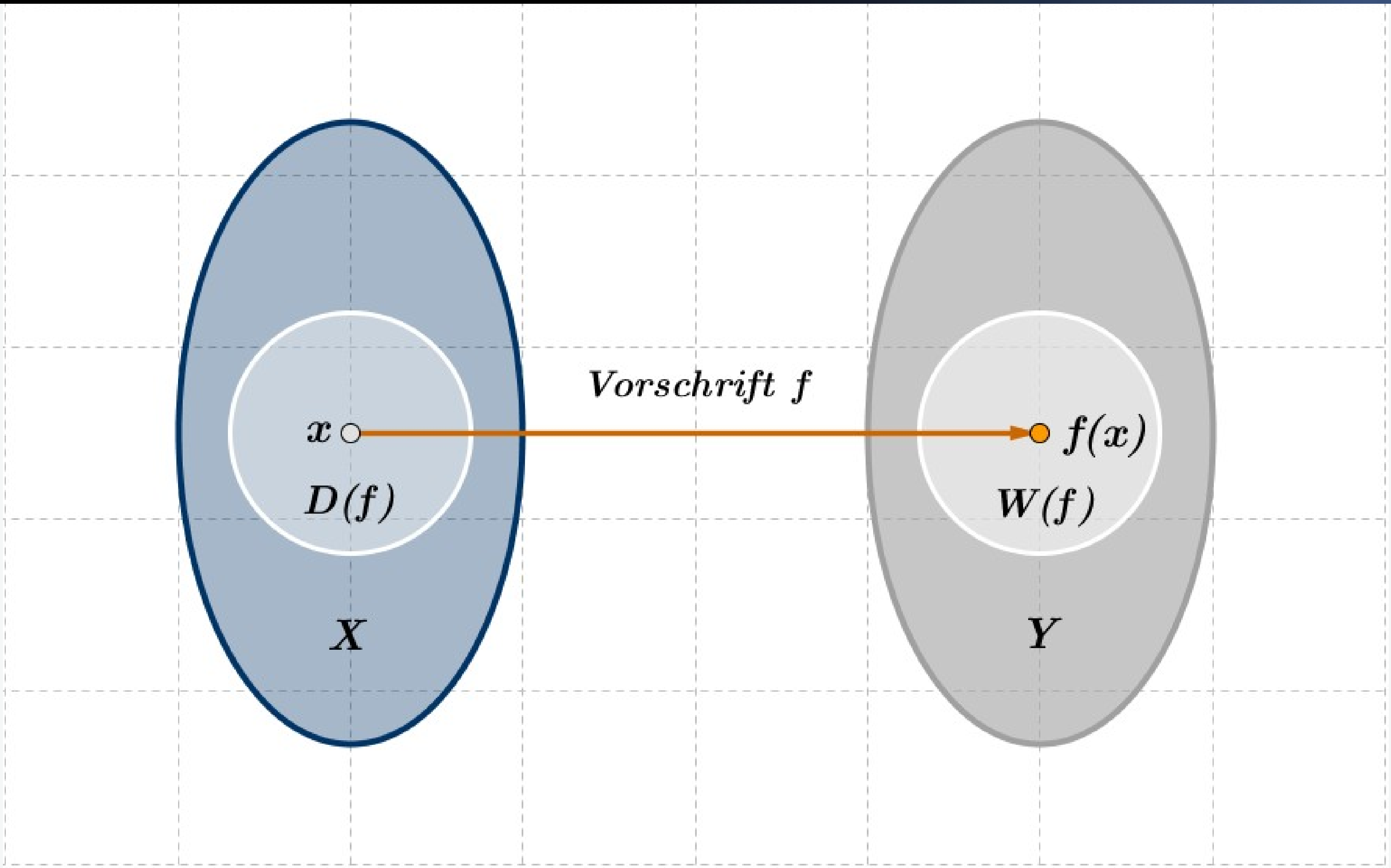

Abb. 2: Darstellung einer Abbildung mit der Vorschrift f: Jedem x aus $D(f)$ wird nur ein Element $y = f(x)$ zugeordnet.

y – das Bild von x bezüglich f, x – das Urbild von y bezüglich f

$D(f)$ – Definitionsmenge, $W(f)$ – Wertemenge

Zu einem y aus $W(f)$ können mehrere Urbilder x gehören.

Den Begriff Funktion gebraucht man in einem engeren Sinn, wenn es sich bei der Abbildung um die Zuordnung eines reellen Zahlenwerts handelt.

Ist $X = R$ und $Y = R$, so nennt man f eine reelle Funktion.

Meist geht man zu einer Kurzfassung über:

$$f(x) = x^2 \qquad \text{statt } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^2$$

Das ist natürlich völlig legitim, solange klar ist, was Definitions- und was Wertemenge sind.

Der Graph einer reellen Funktion f wird als folgende Menge bestimmt

$$G_f = \{ (x, y) \mid y = f(x), \ x \in D(f) \}$$

Graph einer Funktion $f(x)$: Beispiel 1

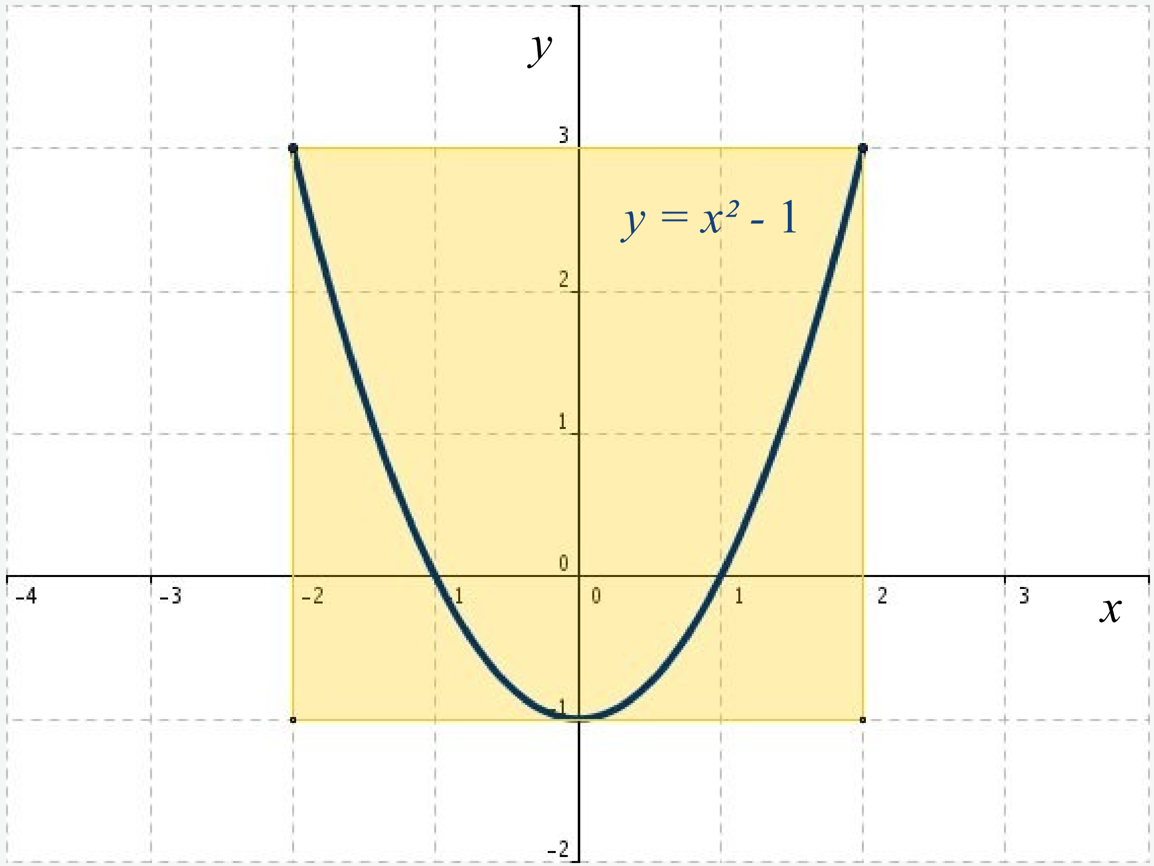

Abb. B1: Darstellung des karteischen Produkts X x Y und der Funktion $f(x) = x^2 - 1$

$$X \times Y, \quad X = [-2, 2], \quad Y = [-1, 3]$$

$$X \overset{f}{\to} Y, \quad x \to f(x)$$

$$G_f = \{ (x, y = f(x)) : x \in X, y \in Y, f(x) = x^2 - 1 \}$$

Graph einer Funktion f (x): Beispiel 2

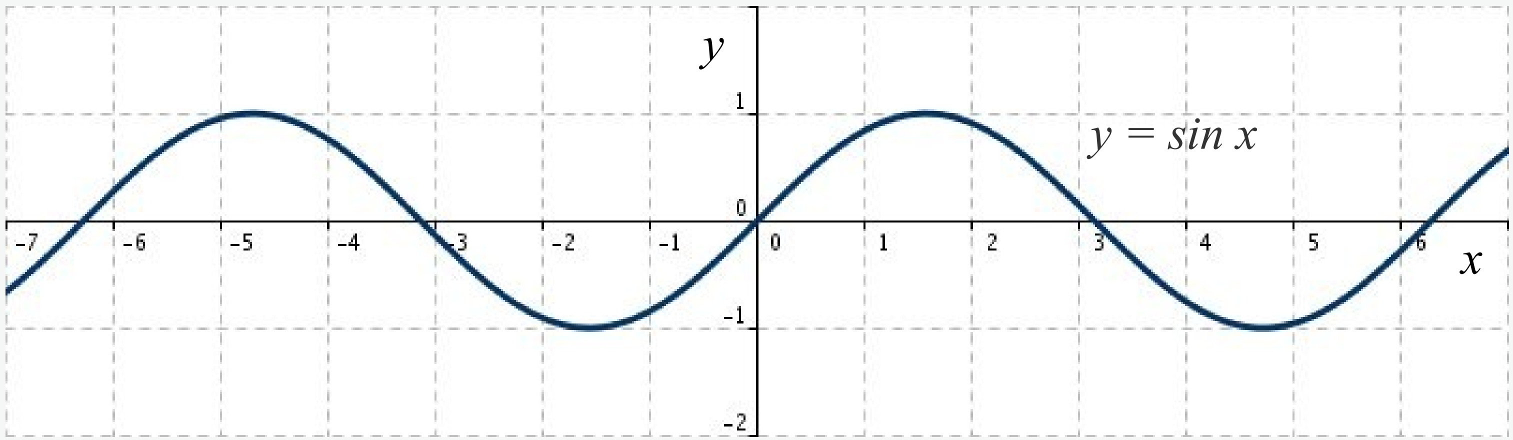

Abb. B2: Graph der Funktion f (x) = sin x

$$G_f = \{ (x\,, \; y = f(x)) : \; x \in \mathbb{R}\,, \; f(x) = \sin x \}$$

Graph einer Funktion $f(x)$: Beispiel 3

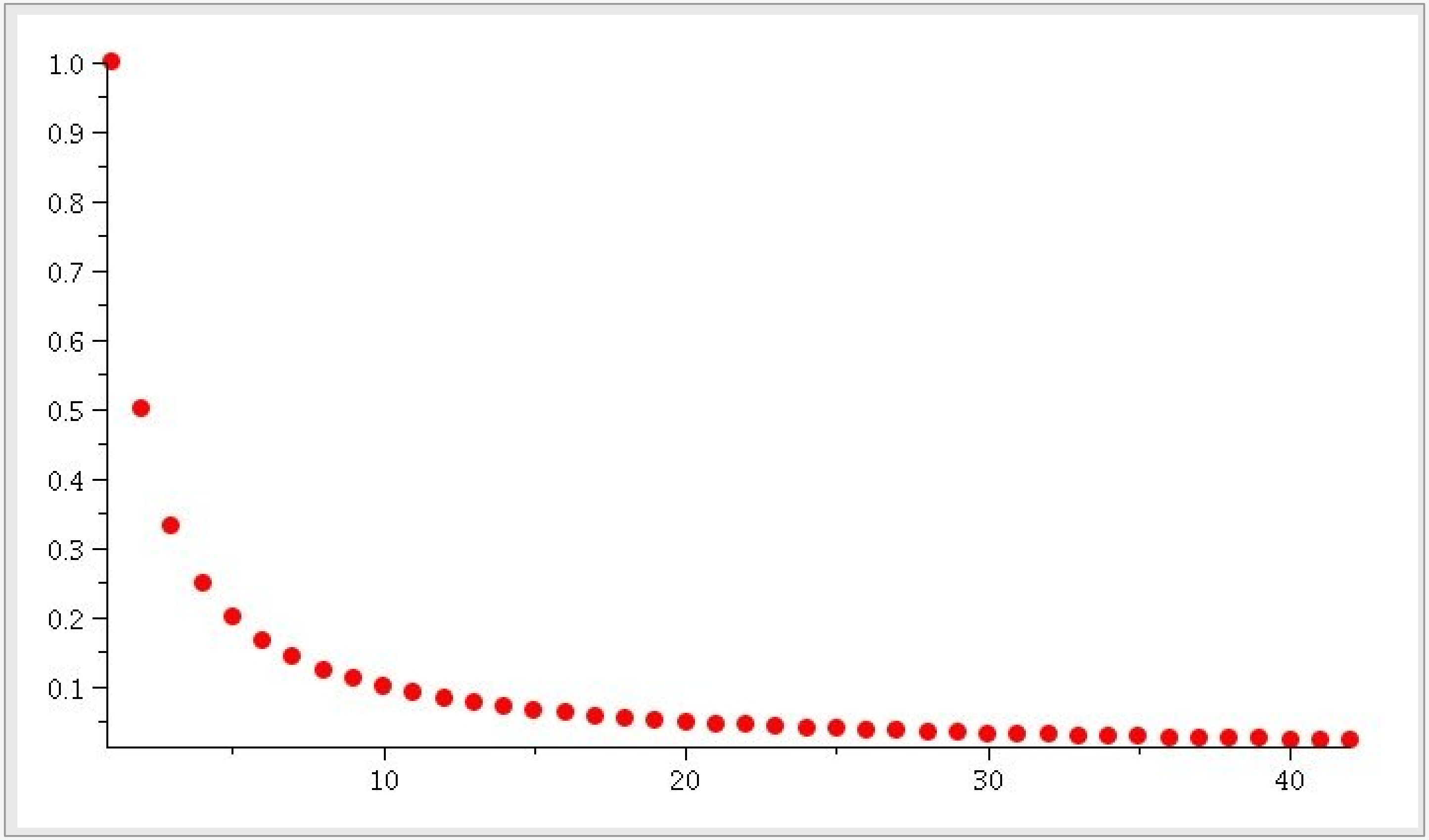

Abb. B3: Darstellung einer Funktion $f(x) = 1/x$

Handelt es sich bei D um eine diskrete Menge, wie z.B. die Menge der natürlichen Zahlen, so kann der Graph unter Umständen durch einzelne Punkte visualisiert werden:

$$G_f = \{ (x, \; y = f(x)) : \; x \in \mathbb{N}, \; y \in \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{1}{x}, \; x \neq 0 \}$$

Definition:

f und g sind gleich, falls $D(f) = D(g)$ und $f(x) = g(x) \quad \forall \; x \in D$

Aufgabe 1:

Abbildungen f und g und entsprechende Definitionsbereiche $D(f)$ und $D(g)$ sind gegeben. Bestimmen Sie, ob die Abbildungen f und g gleich sind. Zeichnen Sie die Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$.

$$f(x) = x^2 - 1, \qquad D(f) = [-2, 2]$$

$$g(x) = x^2 - 1, \qquad D(g) = [-2, 1]$$

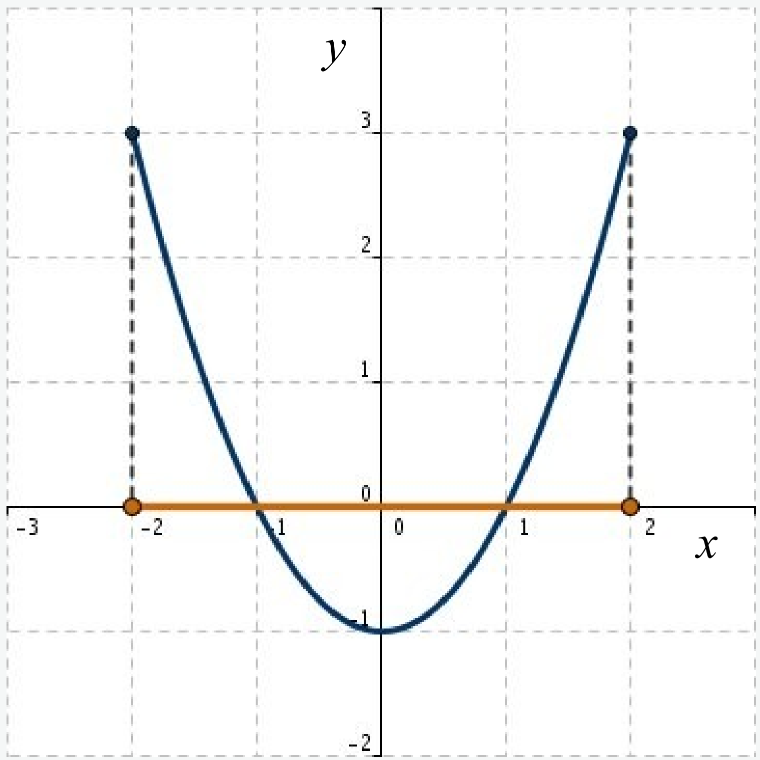

Abb. L1-1: Darstellung der Funktion f (x)

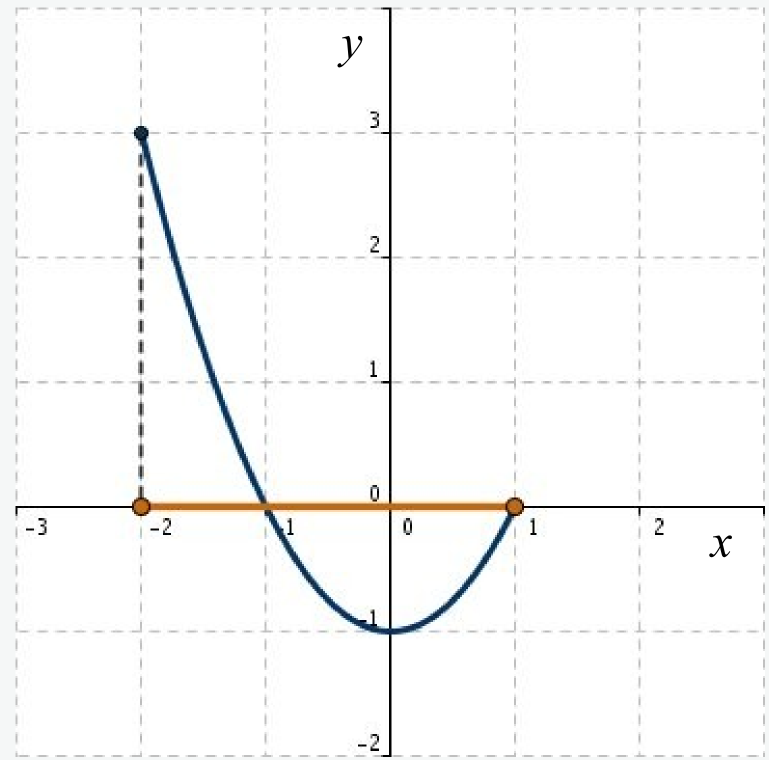

Abb. L1-2: Darstellung der Funktion g (x)

Abbildungen f und g sind nicht gleich, weil $D(f) \neq D(g)$.

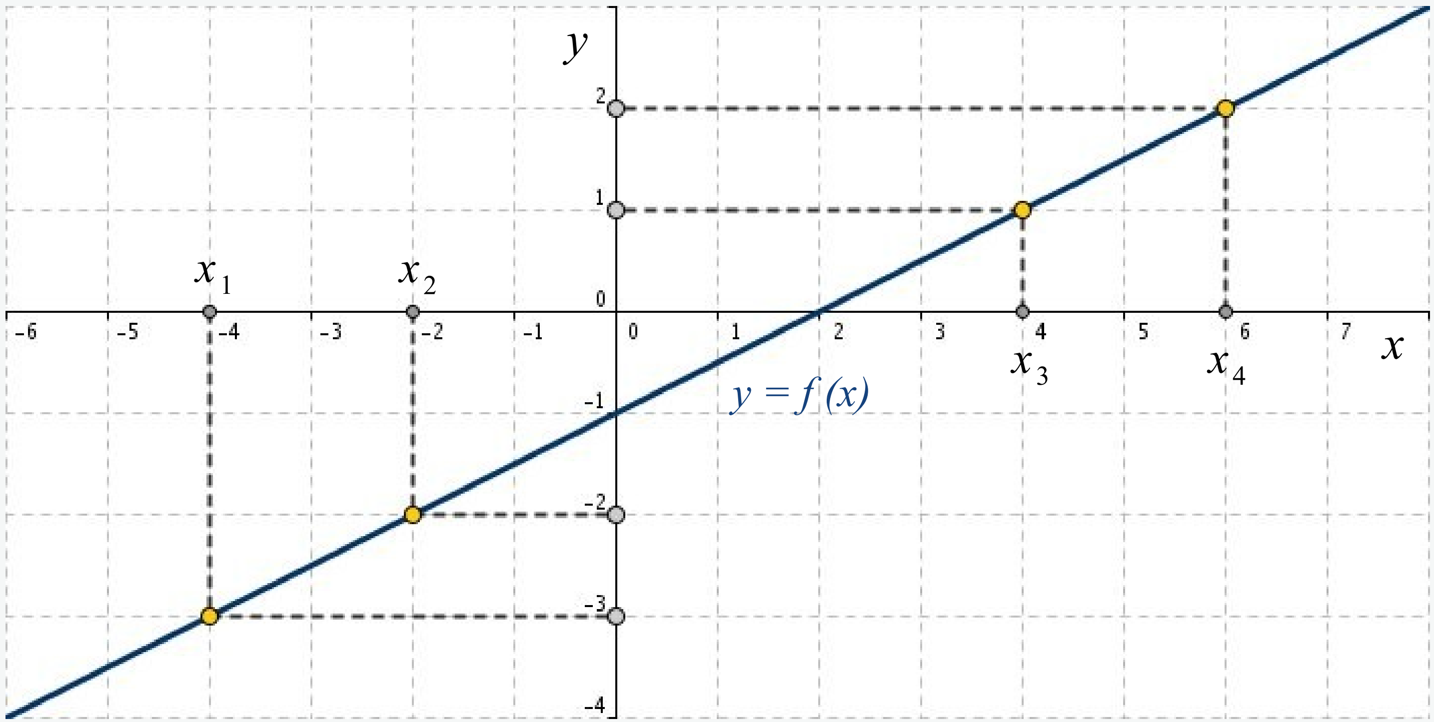

Abb. 3: Die Funktion $f(x) = 0.5\,x - 1$ als Beispiel einer eineindeutigen Abbildung

Definition:

Eine Abbildung $f: \; X \rightarrow Y$ heißt eineindeutig, falls

$$x_1, \; x_2 \in D(f), \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Welche Abbildungen sind eineindeutig?

Aufgabe 2:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^3$
4. $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad r(x) = 1$

Aufgabe 3:

1. $f(x) = x^2 - 1, \quad D(f) = [-2, 1]$
2. $g(x) = x^2 - 1, \quad D(g) = [-2, 0]$

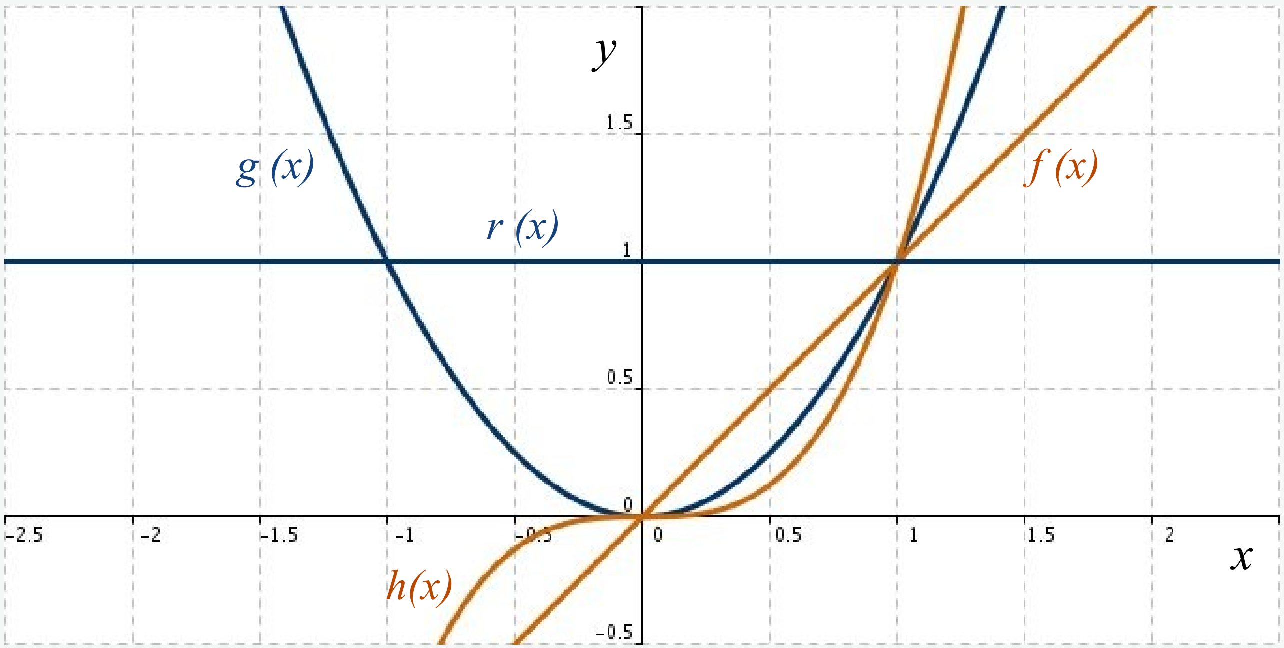

Abb. 4: Funktionen f(x), g (x), h (x) und r (x)

1. $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$ – eineindeutig
2. $g \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2$ – nicht eineindeutig
3. $h \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^3$ – eineindeutig
4. $r \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad r(x) = 1$ – nicht eineindeutig

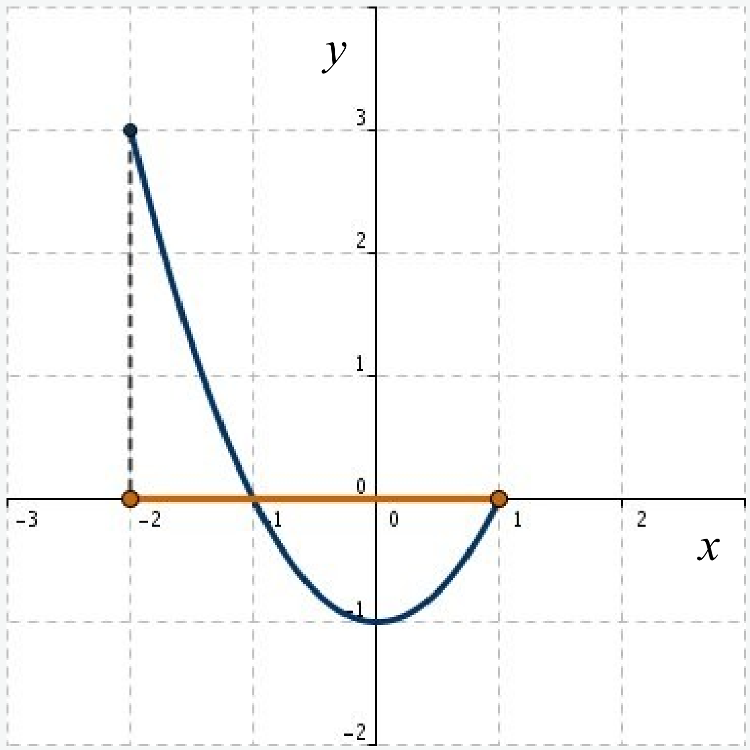

Abb. L3-1: Darstellung der Funktion f (x)

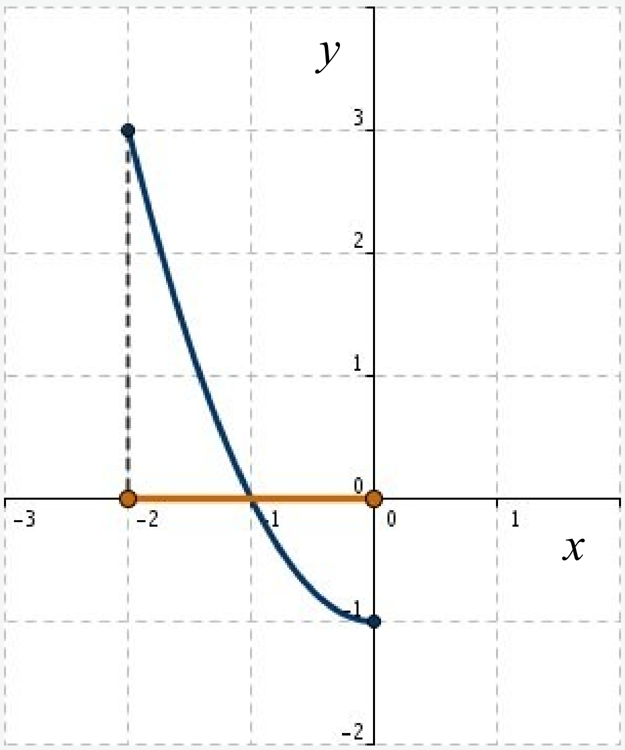

Abb. L3-2: Darstellung der Funktion g (x)

$$f(x) = x^2 - 1, \quad D(f) = [-2,\ 1]$$ – nicht eineindeutig

$$g(x) = x^2 - 1, \quad D(g) = [-2,\ 0]$$ – eineindeutig