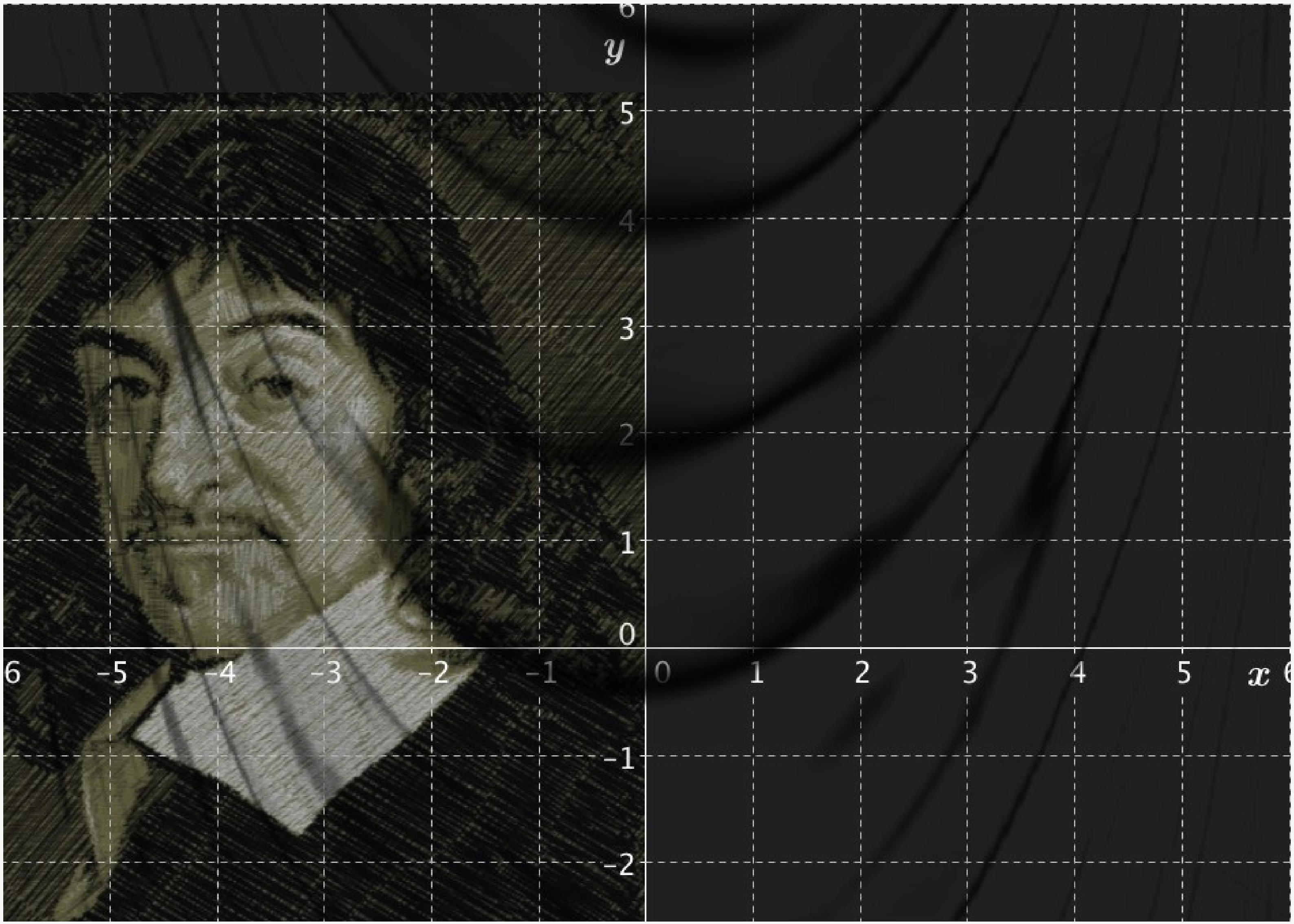

Kartesisches Produkt

M-1, Lubov Vassilevskaya

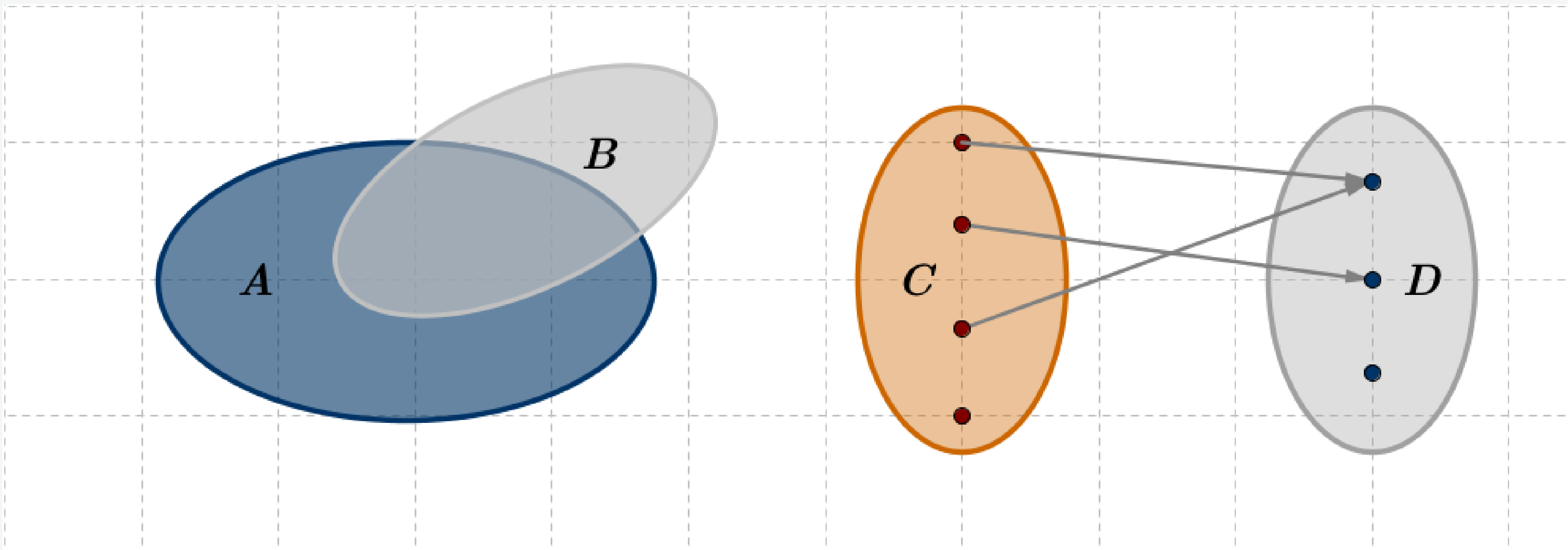

Abb.: Mengen und ihre Verknüpfungen

Es gibt verschiedene Arten, aus zwei Mengen eine neue zu bilden, z.B. Durchschnitt, Vereinigung und Differenz von Mengen. Hier wird eine Art von Verknüpfung beschrieben, bei der die Ergebnismenge von deutlich anderer Natur ist als es die Ausgangsmengen sind.

Definition:

Das kartesische Produkt $A \times B$ (oder Mengenprodukt) zweier Mengen A und B ist definiert als die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei a ein Element aus A und b ein Element aus B ist.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, \quad b \in B \}$$

Im kartesischen Produkt $A \times B$ wird jedes Element aus A mit jedem Element aus B kombiniert.

Es ist möglich, das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst zu bilden.

$$A \times A = \{ (a, a') \mid a, a' \in A \}$$

Definition:

Man bezeichnet (a, b) als geordnetes Paar (auch: Tupel). Zwei geordnete Paare (a, b) und (a', b') sind genau dann gleich, wenn $a = a'$ und $b = b'$ ist. a ist die erste Komponente, b ist die zweite Komponente des Paares (a, b).

Kartesisches Produkt: Beispiel 1

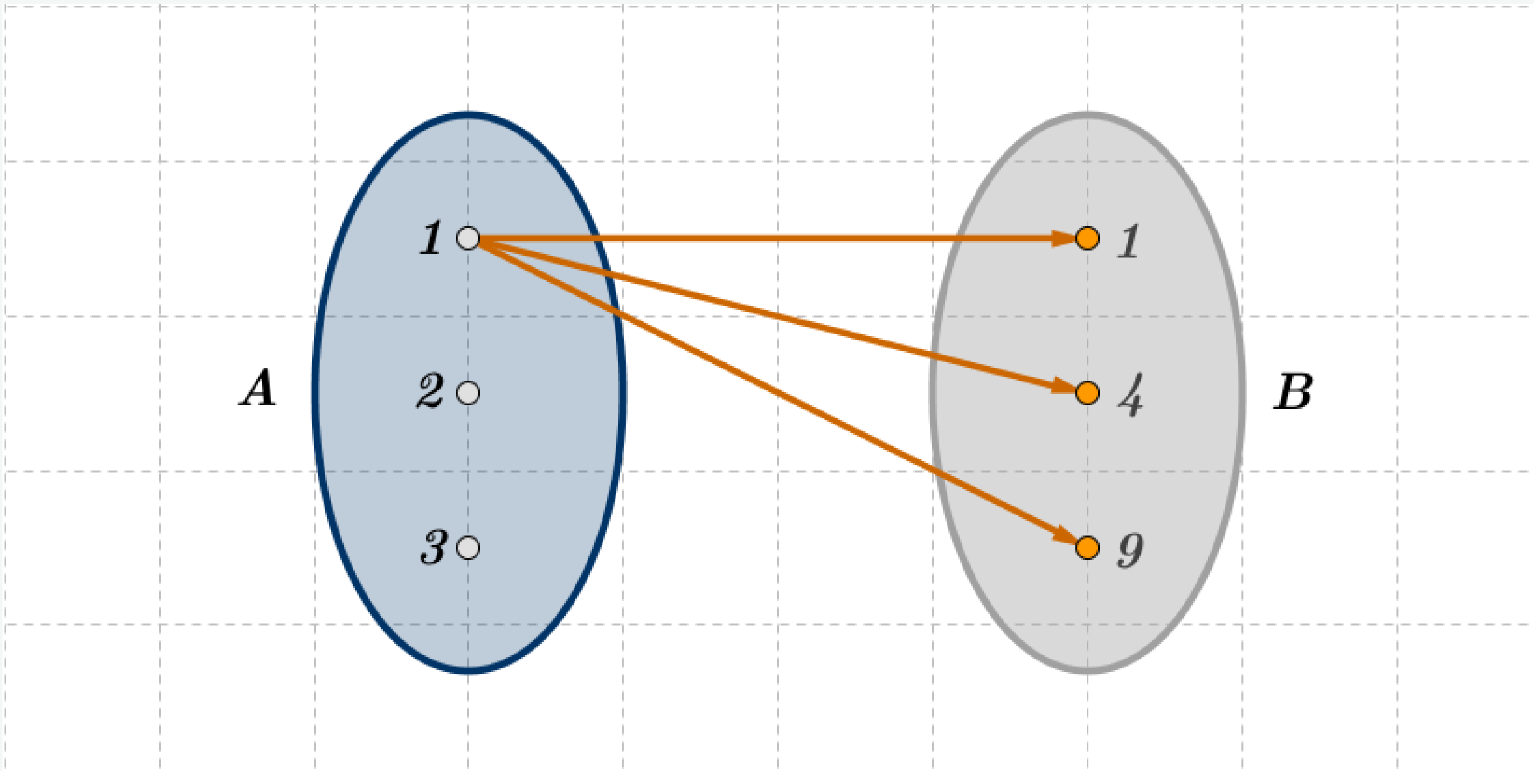

Abb. 1-1: Dem Element a der Menge A werden Elemente der Menge B zugeordnet. Der Angangspunkt des Pfeils entspricht der ersten Komponente, der Endpunkt – der zweiten Komponente des Paares

$$A = \{ 1, 2, 3 \}, \qquad B = \{ 1, 4, 9 \}$$

Die in Abbildung 1-1 dargestellten geordneten Paare (a, b) sind:

$$(1, 1), \ (1, 4), \ (1, 9)$$

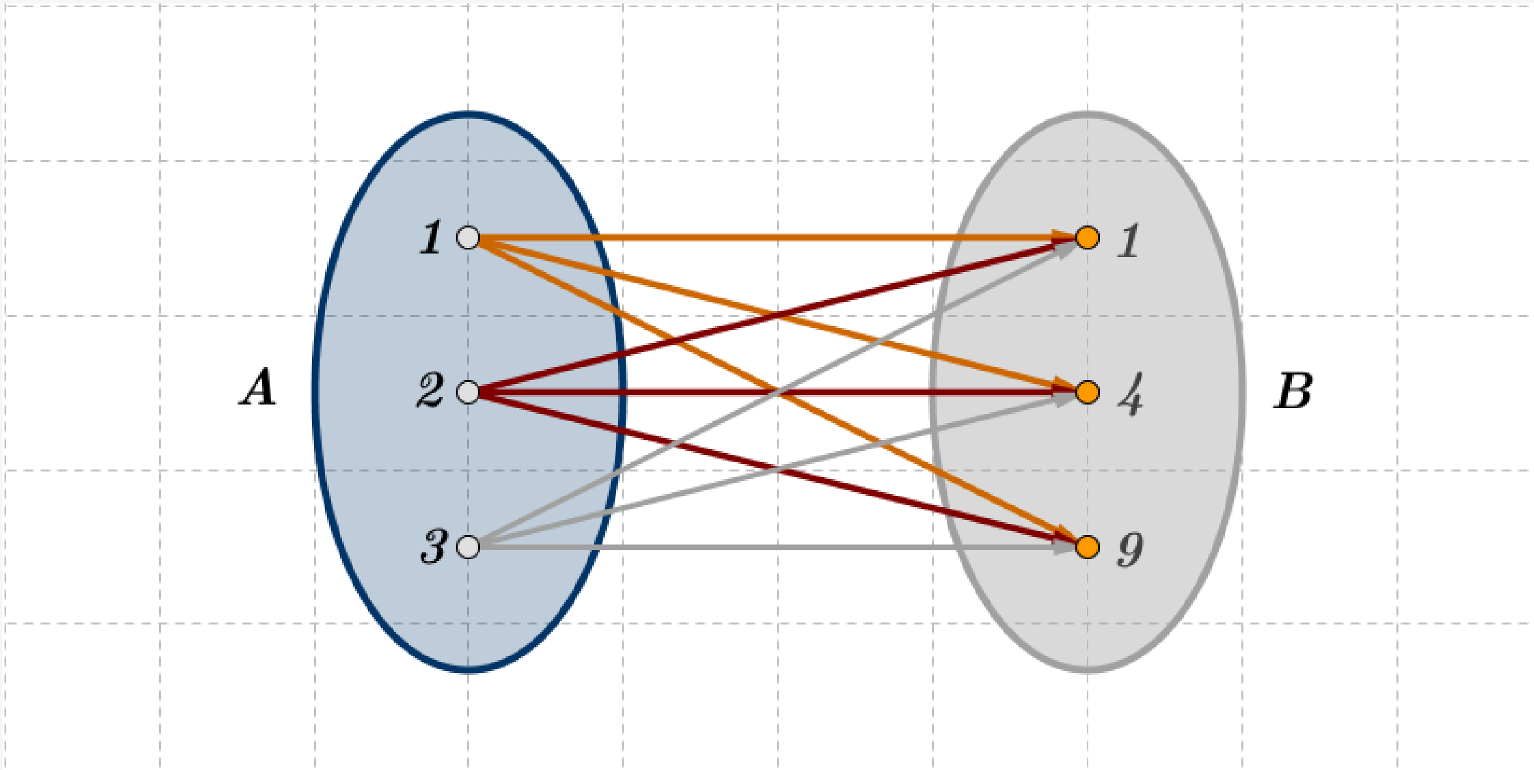

Abb. 1-2: Graphische Darstellung des kartesischen Produktes A x B: Den Elementen der Menge A werden Elemente der Menge B zugeordnet

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, \quad b \in B \} =$$

$$= \{ (1, 1), (1, 4), (1, 9), (2, 1), (2, 4), (2, 9), (3, 1), (3, 4), (3, 9) \}$$

Das kartesische Produkt A x B ist eine Menge. Die Elemente dieser Menge, die geordneten Paare (a, b), unterscheiden sich von den Elementen der Mengen A und B.

Sind A und B endliche Mengen, ist die Mächtigkeit des kartesischen Produkts

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$a)\ \ (4,\ 2) \neq (2,\ 4), \qquad b)\ \ (4,\ 4) \neq 4$$

Ein geordnetes Paar wird zum Unterschied zu einer Menge mit runden Klammern geschrieben. Die Schreibweise (a, b) wird manchmal auch für offene Intervalle verwendet, wobei die Bedeutung jedoch meist aus dem Zusammenhang klar ist.

Während bei der Angabe der Elemente einer Menge die Reihenfolge keine Rolle spielt, ist die Reihenfolge für den Begriff “geordnetes Paar” sehr wichtig.

Geordnete Paare werden z.B. zur Angabe der Position eines Punktes in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem genutzt. Dabei werden die Komponenten als Koordinaten bezeichnet.

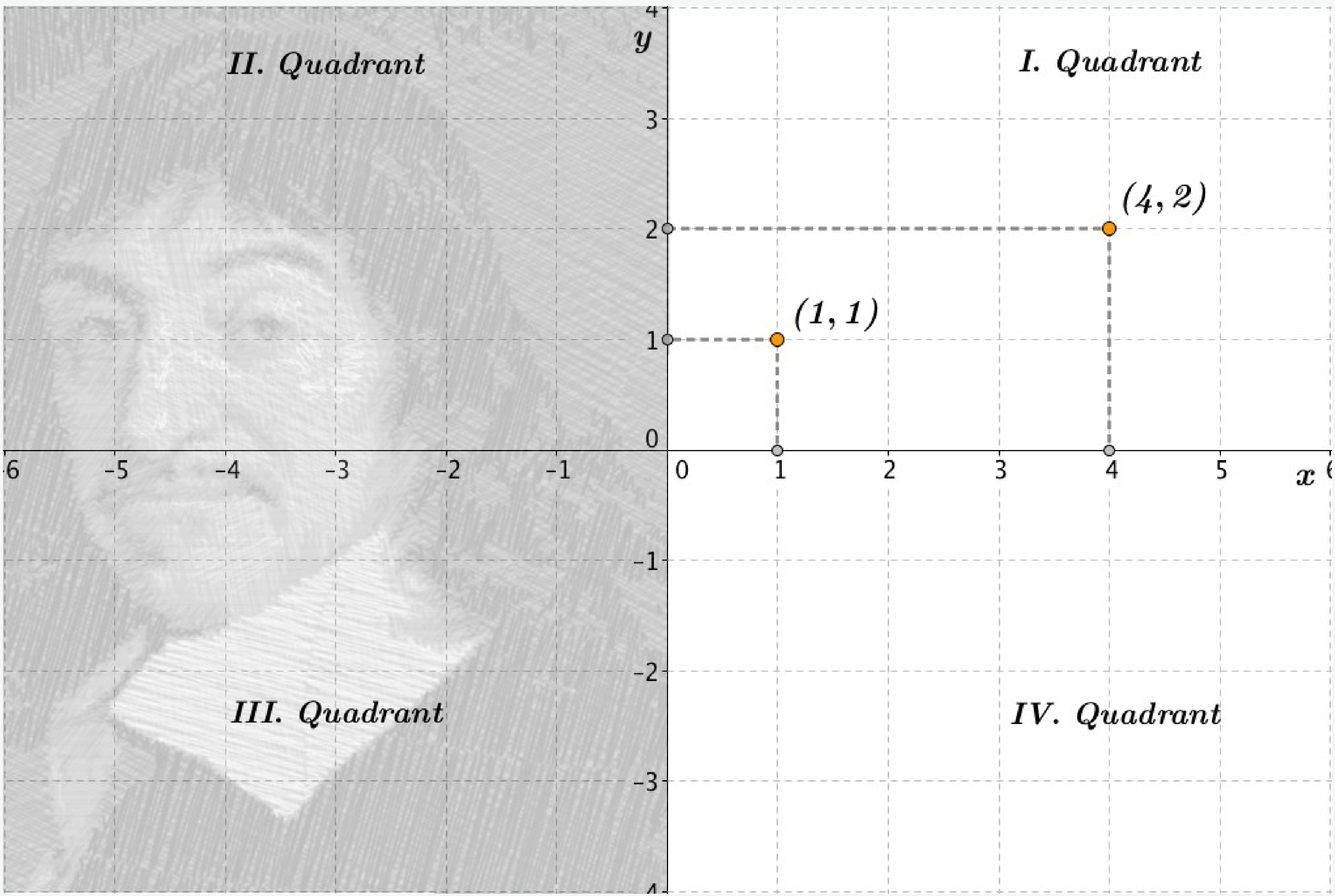

Abb. 2-1: Kartesisches Koordinatensystem mit zwei Punkten (1, 1) und (4, 2)

Ein kartesisches Koordinatensystem ist ein orthogonales Koordinatensystem, die beiden Richtungsachsen stehen orthogonal aufeinander. Es ist nach dem latinisierten Namen Cartesius seines Erfinders René Descartes *(1596-1650)* benannt.

Die Menge aller geordneten Paare bezeichnen wir als kartesisches Produkt, und diese Bezeichnung behalten wir auch für unendliche Mengen bei, selbst dann, wenn deren Elemente nicht einmal mehr durchnummeriert werden können.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die kartesischen Produkte $A \times B$, $B \times A$. Zeichnen Sie die Produkte durch Punkte oder Bereiche im kartesischen Koordinatensystem.

$a)$ $A = \{-2, -1\}$, $\quad B = \{1, 2, 3\}$

$b)$ $A = [2, 5]$, $\quad B = \{0, 1\}$

$c)$ $A = [-2, 0]$, $\quad B = [1, 3]$

Aufgabe 2: Skizieren Sie kartesische Produkte $A \times B$

$a)\ A = \{1, 2\}, \quad B = \mathbb{N}$

$b)\ A = \{-1, 1\}, \quad B = \mathbb{Z}$

$c)\ A = \mathbb{Z}, \quad B = \mathbb{R}$

$d)\ A = [0, 3], \quad B = [0, 2]$

$e)\ A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant |x| \leqslant 3\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant 1\}$

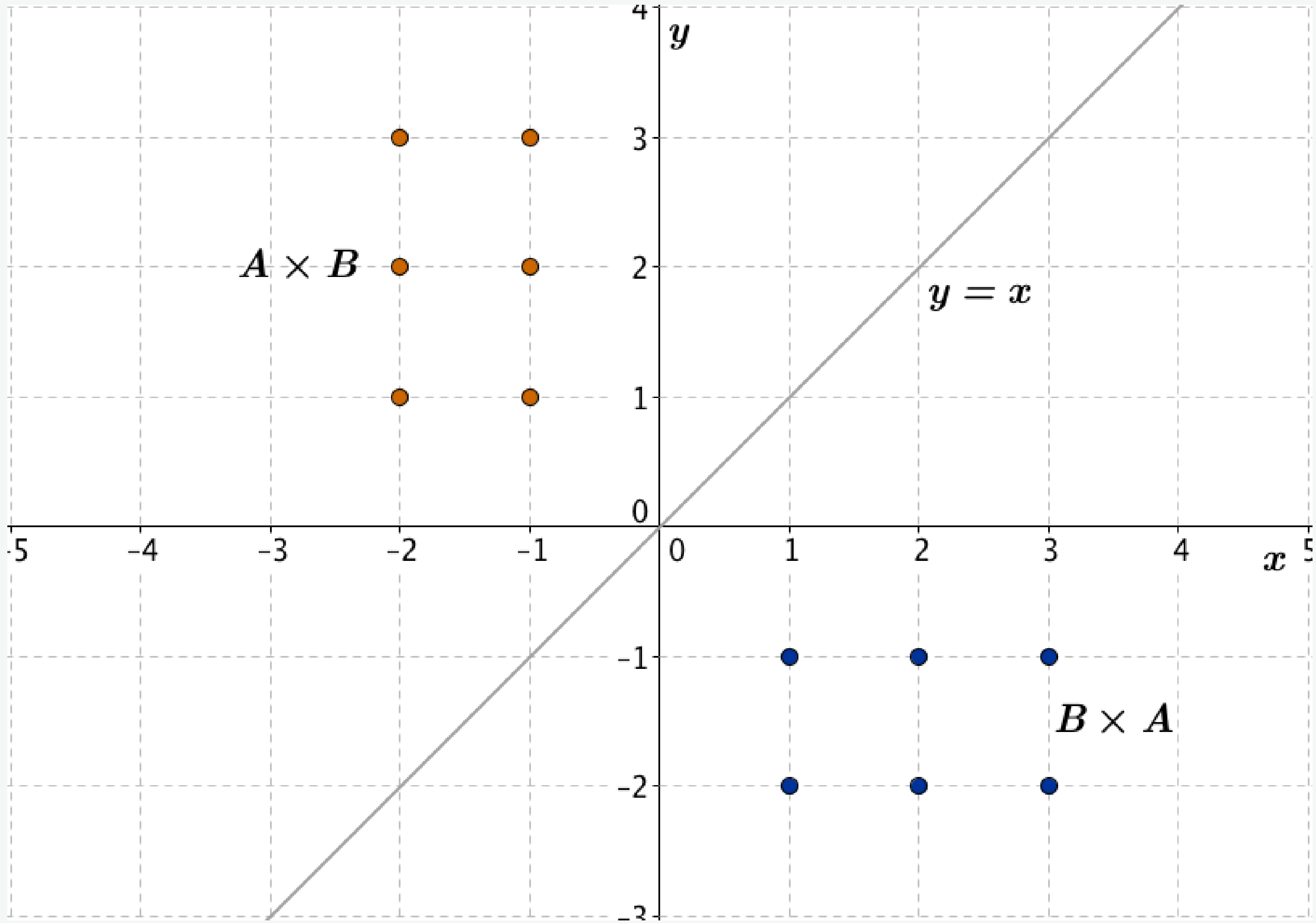

Abb. L-1a: Kartesische Produkte der Aufgabe 1a). Die Punkte B x A bekommt man durch Spiegelung der Punkte A x B an der Geraden y = x

$$A \times B = \{ (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3) \}$$

$$B \times A = \{ (1, -2), (1, -1), (2, -2), (2, -1), (3, -2), (3, -1) \}$$

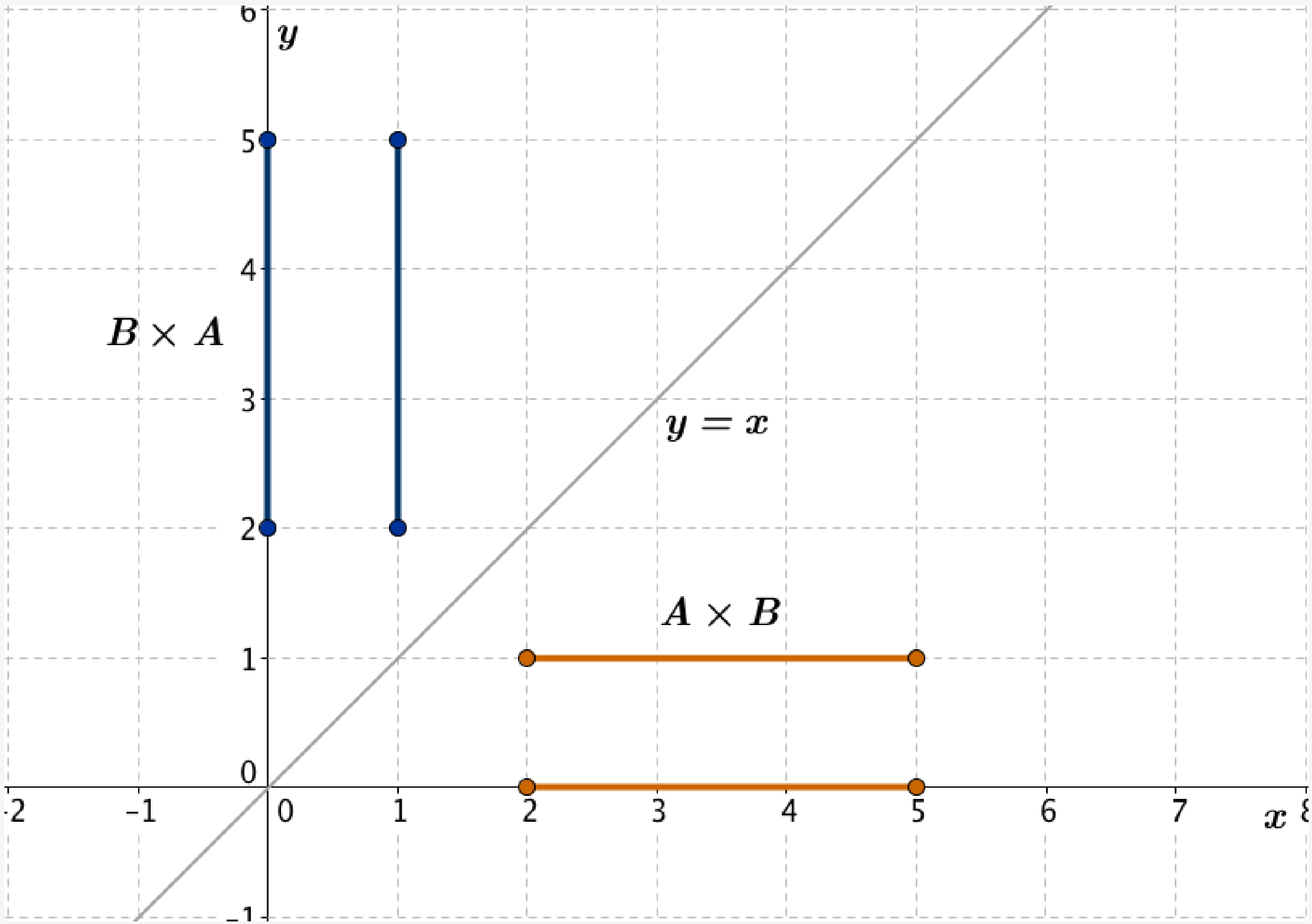

Abb. L-1b: Kartesische Produkte der Aufgabe 1b)

$$A \times B \neq B \times A$$

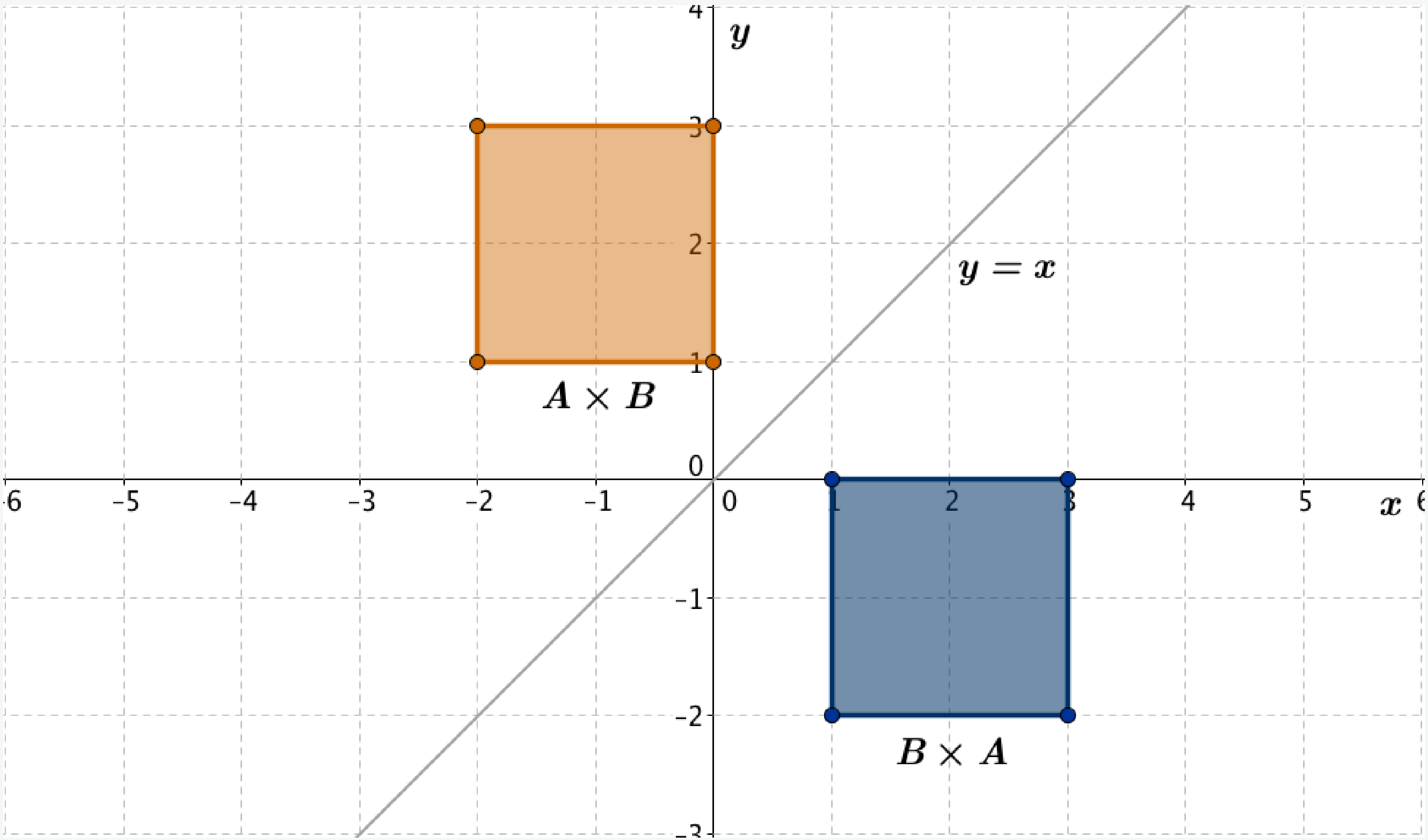

Abb. L-1c: Kartesische Produkte der Aufgabe 1c)

$$A \times B \neq B \times A$$

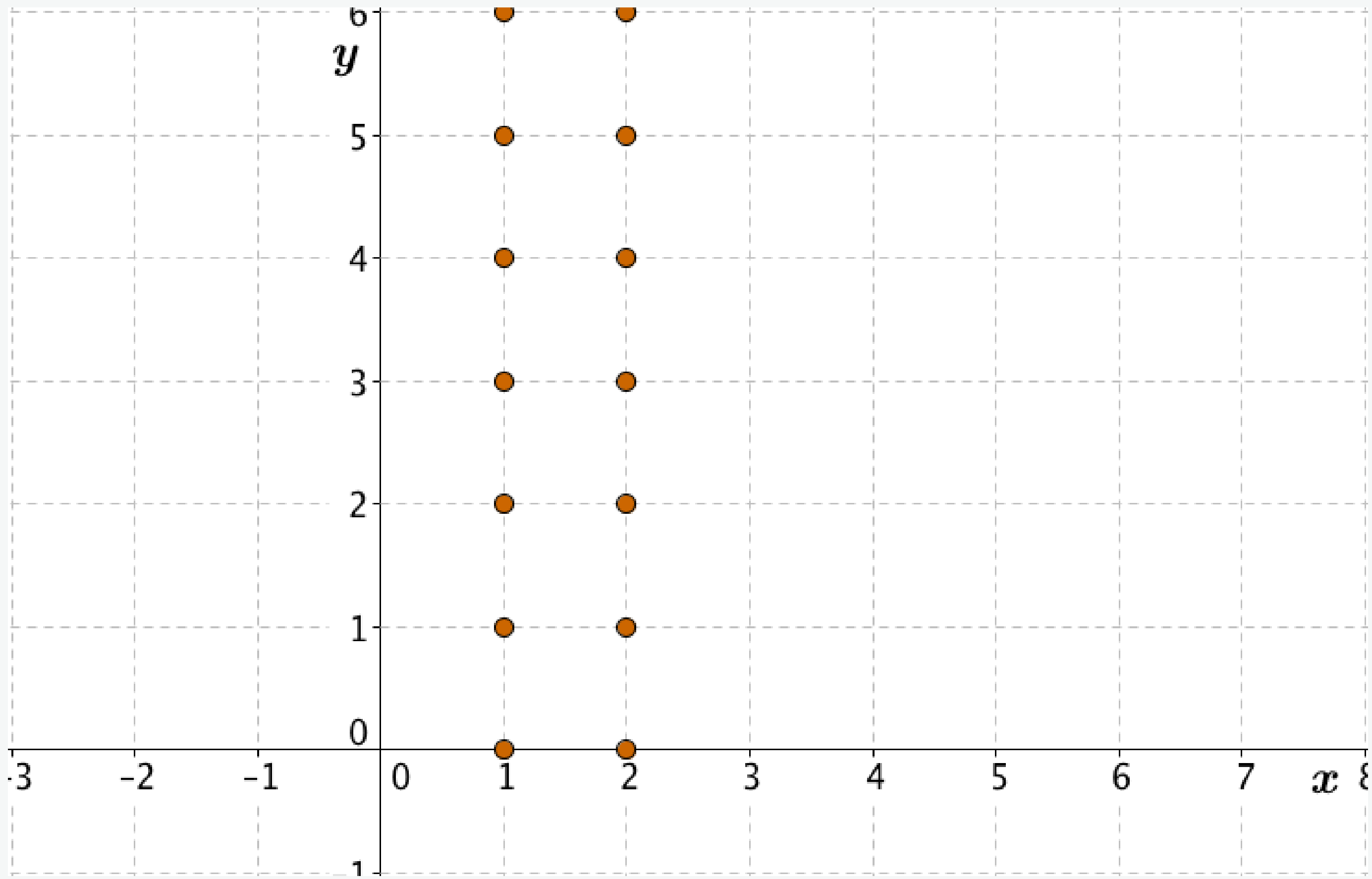

Abb. L-2a: Kartesisches Produkt A x B der Aufgabe 2a)

$$A = \{ 1, \ 2 \}, \qquad B = \mathbb{N}$$

$$A \times B = A \times \mathbb{N} = \{ (1, 0), \ (2, 0), \ (1, 1), \ (2, 1), \ (1, 3), \ (2, 3), \ \dots \}$$

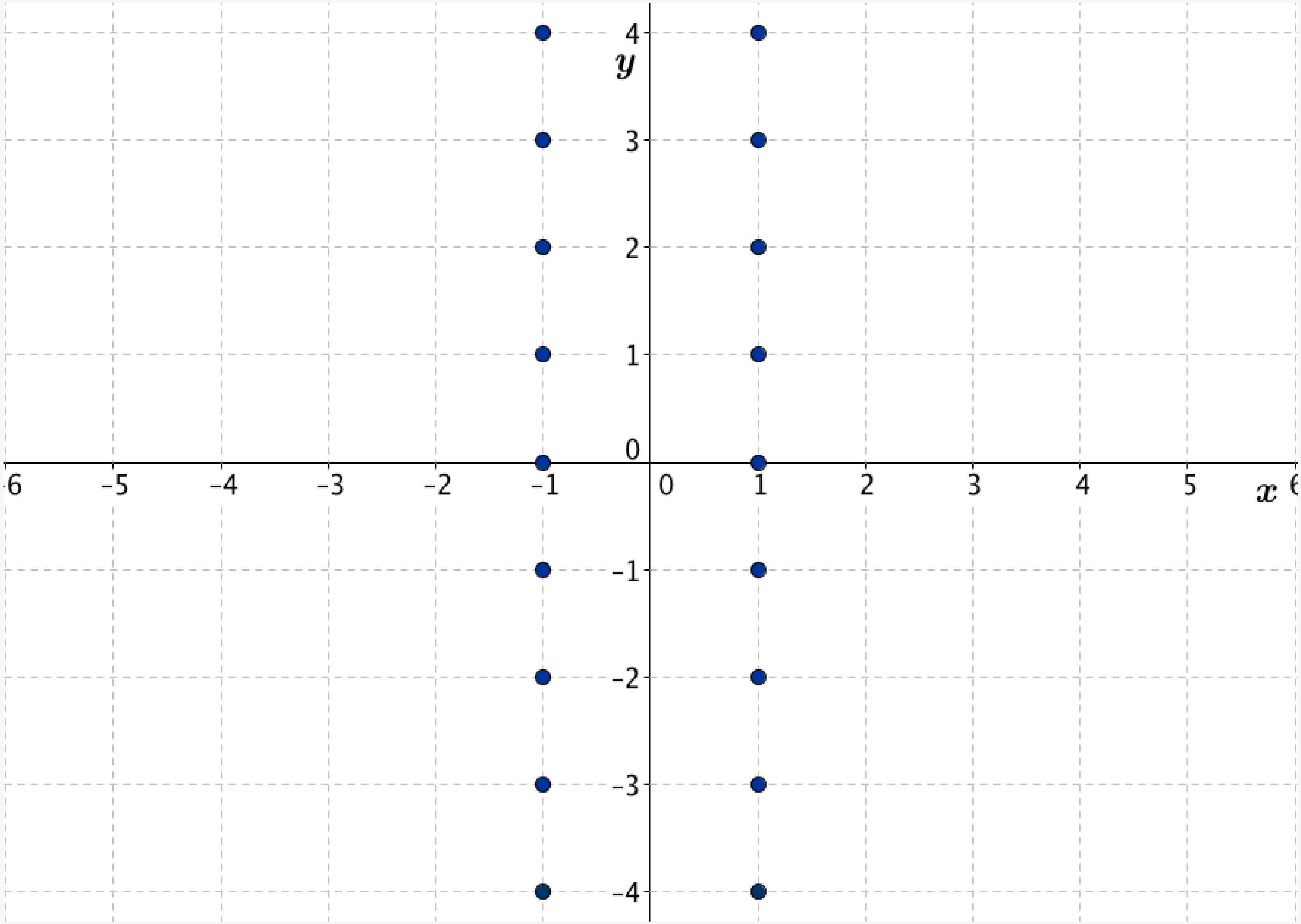

Abb. L-2b: Kartesisches Produkt A x B der Aufgabe 2b)

$$A = \{-1,\ 1\}, \qquad B = \mathbb{Z}$$

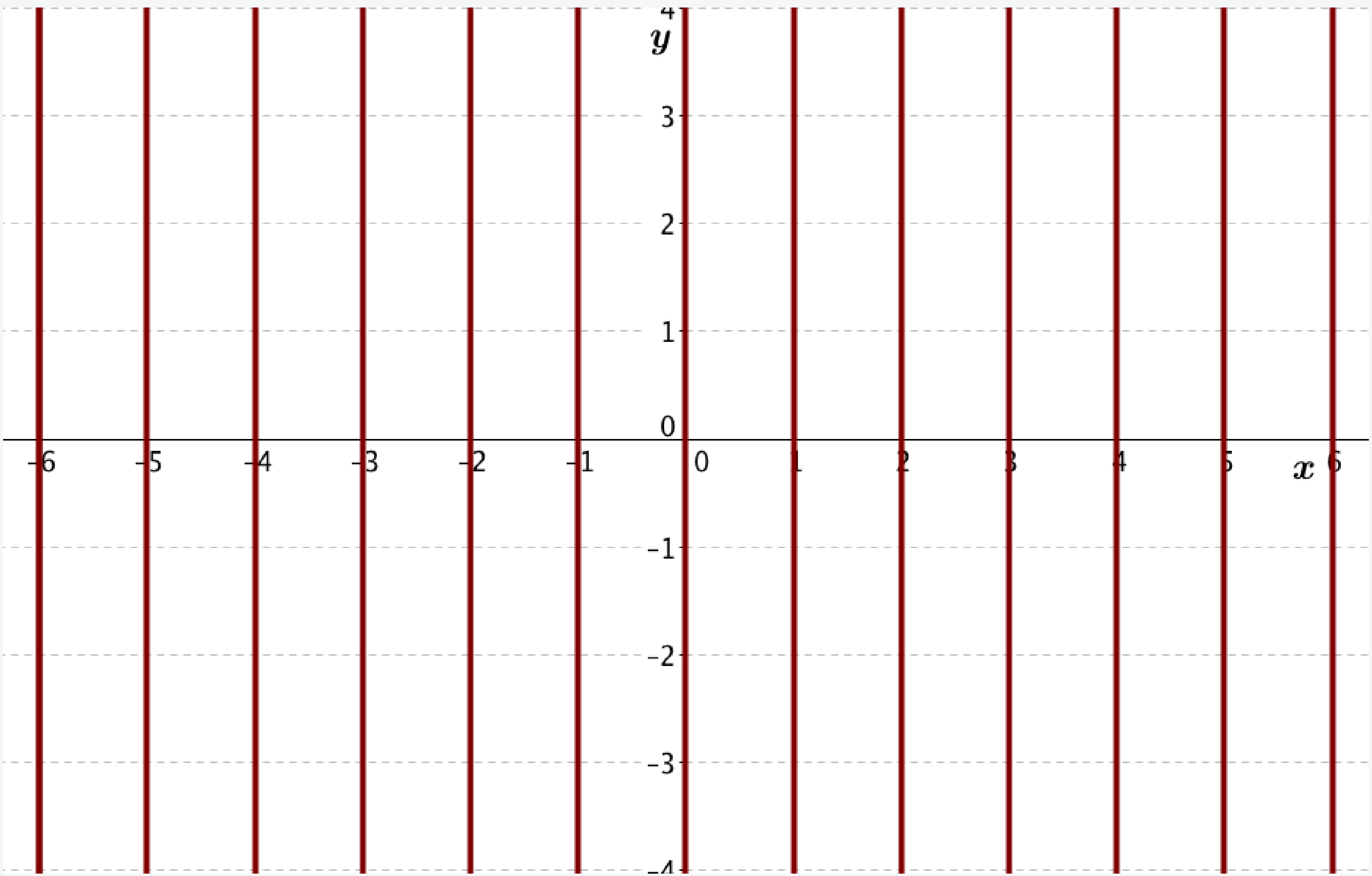

Abb. L-2c: Kartesisches Produkt A x B der Aufgabe 2c)

$$A = \mathbb{Z}, \qquad B = \mathbb{R}$$

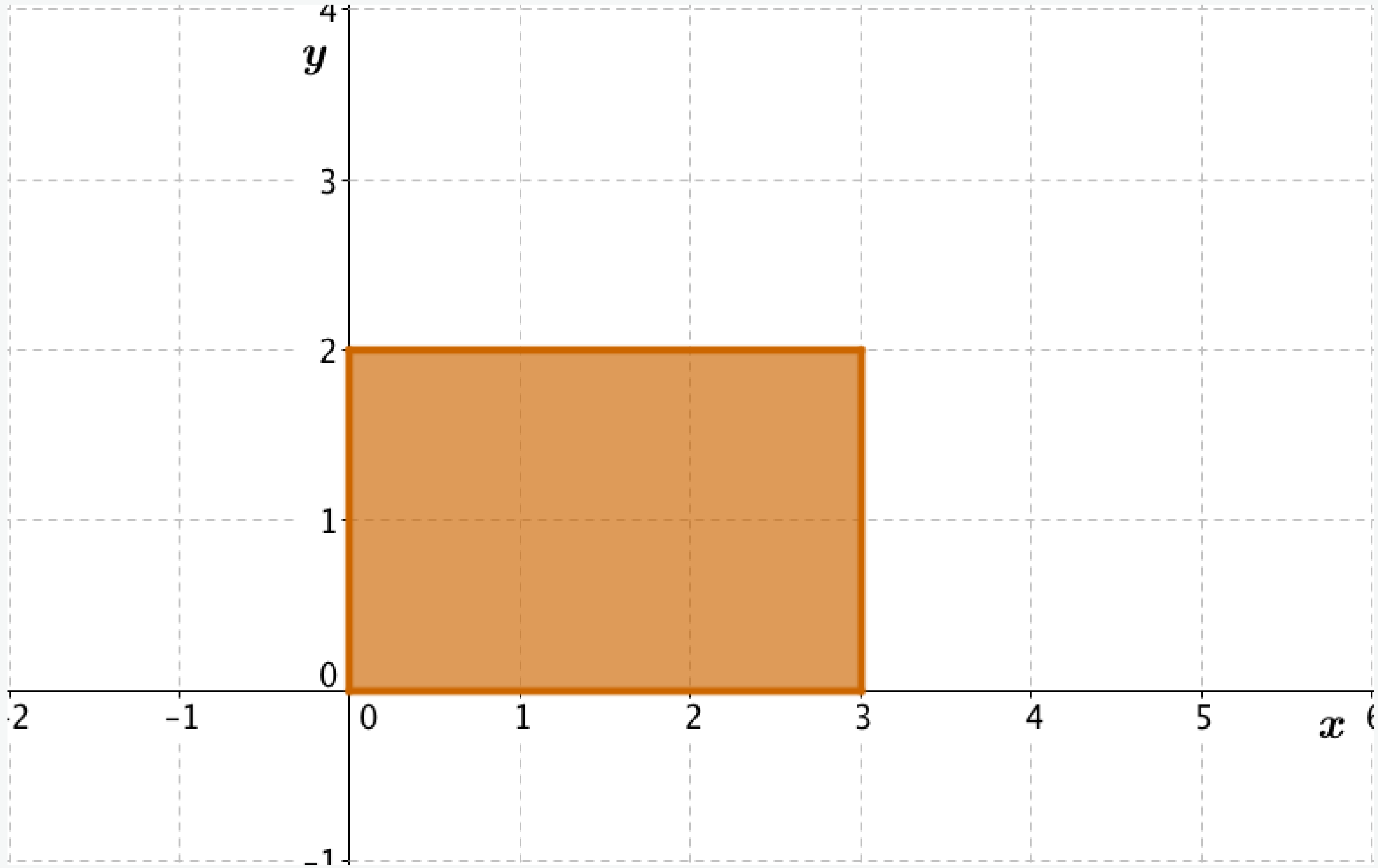

Abb. L-2d: Kartesisches Produkt A x B der Aufgabe 2d)

$$d)\ A = [0, 3], \qquad B = [0, 2]$$

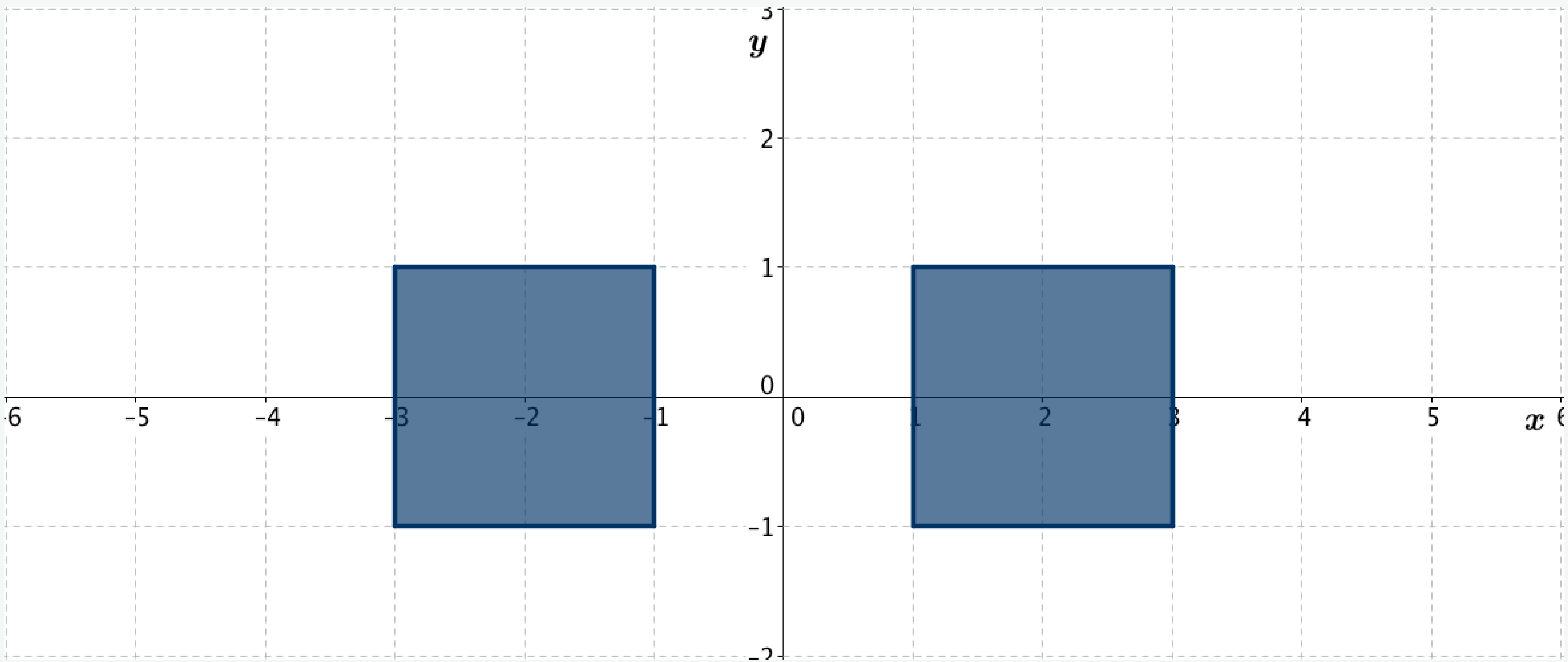

Abb. L-2e: Kartesisches Produkt A x B der Aufgabe 2e)

$$A = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant |x| \leqslant 3 \} = [-3, -1] \cup [1, 3]$$

$$B = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant 1 \} = [-1, 1]$$

Wird die Produktmenge aus drei Zahlenmengen A, B und C gebildet, so entstehen geordnete ordnete Zahlentripel *(a, b, c)*. Geordnete Zahlentripel werden z.B. zur Angabe der Position eines Punktes in einem räumlichen Koordinatensystem benutzt.

Für das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst ist auch eine Potenzschreibweise üblich

$$A^2 = A \times A$$

Man kann natürlich auch mehrfache kartesische Produkte bilden, und man kann zeigen

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Man kann in mehrfachen kartesischen Produkten Klammern weg lassen und schreiben

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n-mal}$$

Wichtige Kartesische Produkte:

Die Euklidische Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x\,,\,y) \mid x\,,\,y \in \mathbb{R}\}$

Der dreidimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x\,,\,y,\,z) \mid x\,,y\,,z \in \mathbb{R}\}$$

Der *n*-dimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{fach}} = \{(x_1\,,\,x_2\,,\ldots,\,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$