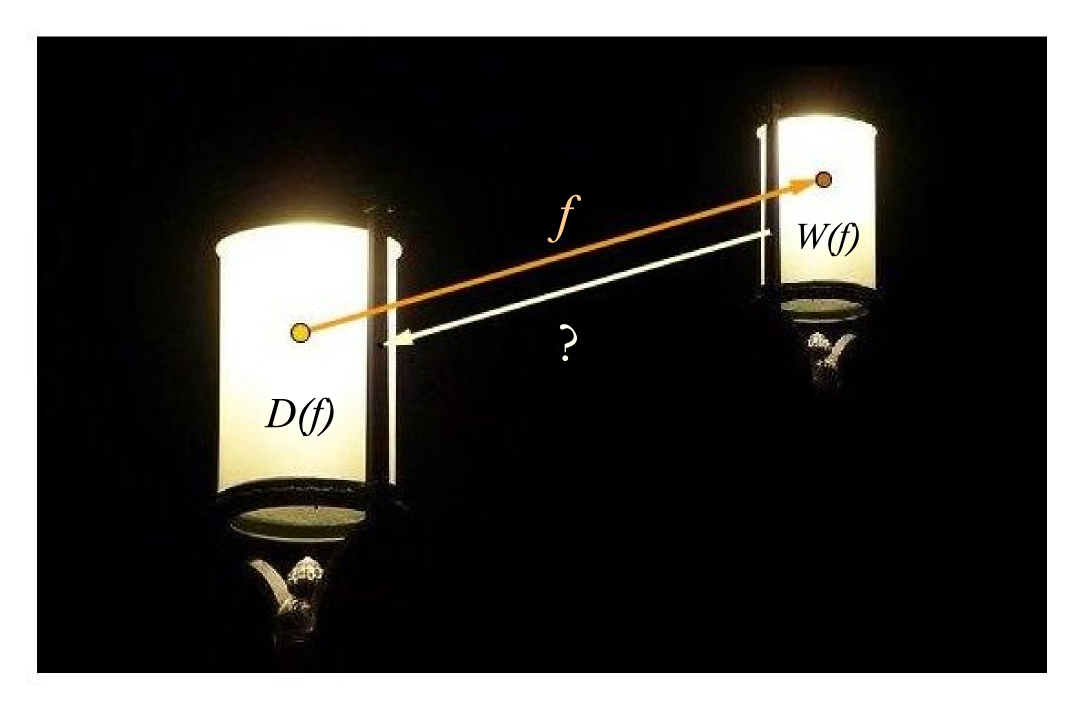
Ein Blick in die Gegenrichtung einer Abbildung



Eine Abbildung f ordnet jedem Element aus der Definitionsmenge D genau ein Element aus der Wertemenge W zu. Hingegen ist es durchaus erlaubt, dass mehrere Elemente von D auf das gleiche Element in W abgebildet werden. Deswegen ist es im Allgemeinen nicht möglich, eine Abbildung unmittelbar umzukehren. Es gibt aber einen Begriff, der auch im allgemeinen Fall zumindest einen Blick in die andere Richtung erlaubt – das Urbild.

Ein Blick in die Gegenrichtung einer Abbildung

Gibt es eine Vorschrift, die aus jedem Bildelement wieder eindeutig das Ausgangselement rekonstruiert?

Wir betrachten die Abbildung $f: \ M \to N$, wobei

$$M = \{ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2 \}$$

$$N = \{ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4 \}$$

ist und die Abbildungsvorschrift durch $f(m) = m^2$ gegeben ist.

Ein Blick in die Gegenrichtung einer Abbildung

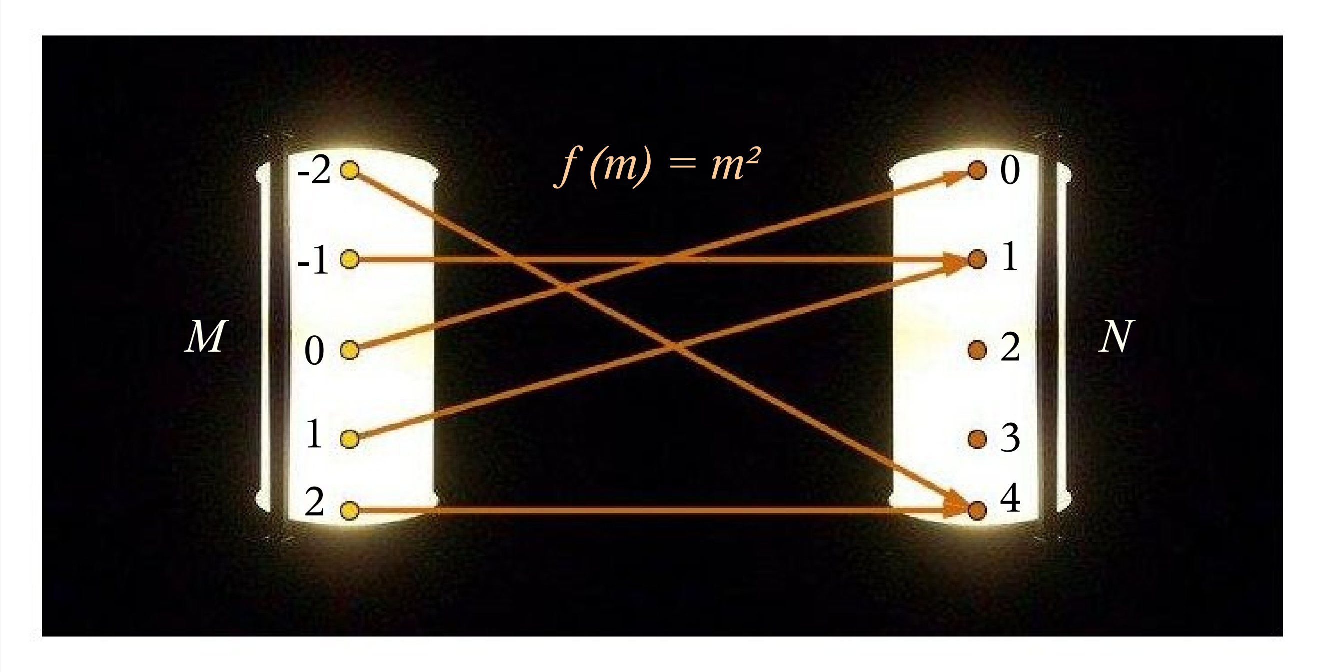


Abb. 15: Eine Abbildung M in N

Der graphischen Darstellung der Abbildung ist zu entnehmen:

- Nicht alle Elemente der Wertemenge gehören tatsächlich zum Bild, so wird z.B. auf die Elemente *2* und *3* nicht abgebildet.
- Weil $(-m)^2 = m^2$, ist eine eindeutige Rekonstruktion eines Elementes der Definitionsmenge anhand des Bildelements außer für $m = 0$ nicht möglich.

Beide Probleme kann man beheben, indem man entsprechende Forderungen an die Abbildungen stellt:

1) Jedes Element der Wertemenge soll zum Bild von f gehören

2) Die Zuordnung soll in beide Richtungen eindeutig sein.

Beides zusammen ist die Definition einer bijektiven Abbildung.

Zu jeder bijektiven Abbildung gibt es eine Umkehrabbildung.

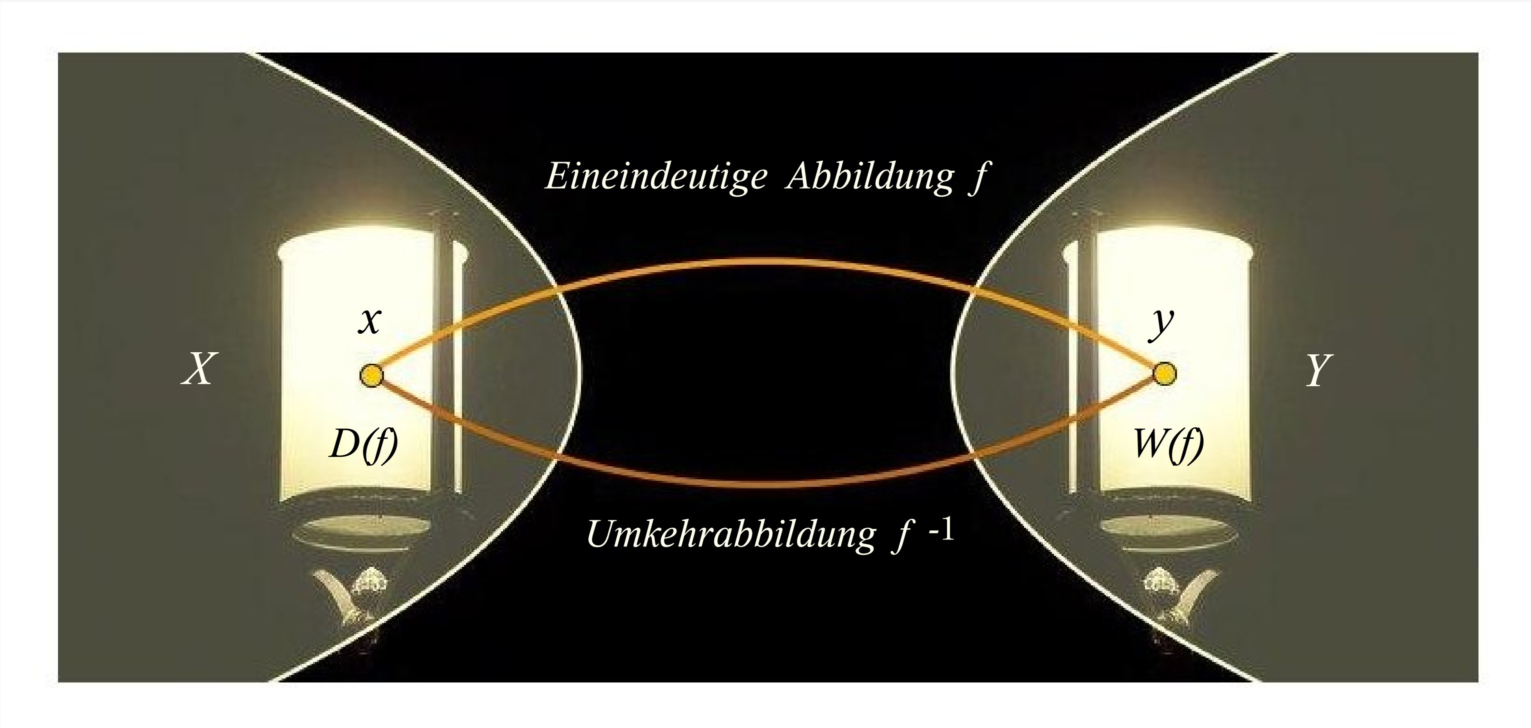


Abb. 16: Darstellung einer Abbildung und der zugehörigen Umkehrabbildung

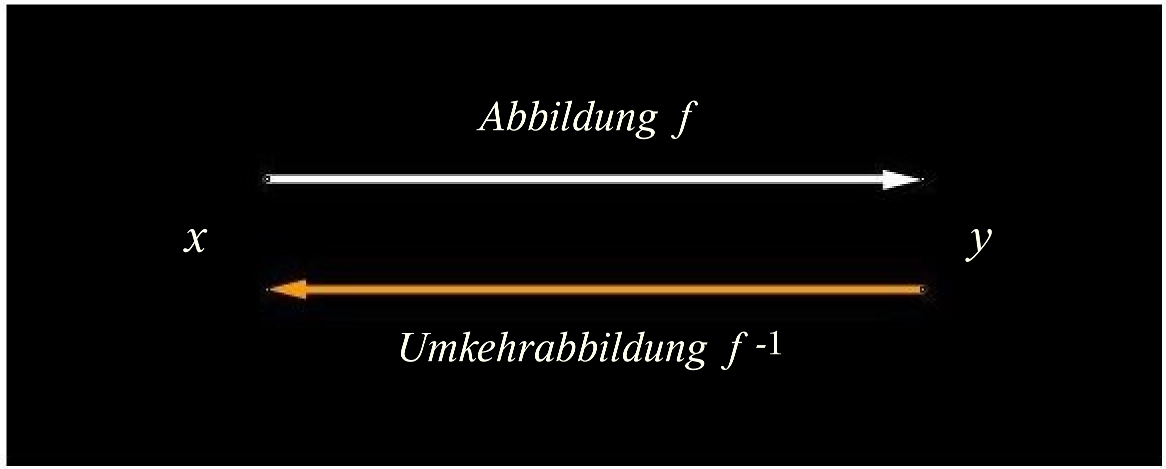
Definition:

Es sei f eine eineindeutige Abbildung von X auf Y. Dann heißt die durch

$$x = f^{-1}(y)$$

definierte Abbildung von Y auf X die Umkehrabbildung von f.

Umkehrabbildung: Beispiel



$$f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad D(f) = [0,\ 2], \quad f(x) = x^2$$

Wir bestimmen die Umkehrabbildung von f und geben eine graphische Darstellung

$$1) \quad f: \quad y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y}$$

$$2) \quad x \to y, \ \ y \to x, \qquad f^{-1}: \quad y = \sqrt{x}$$

In dieser Schreibweise von Umkehrabbildung werden die Argumente x und y vertauscht.

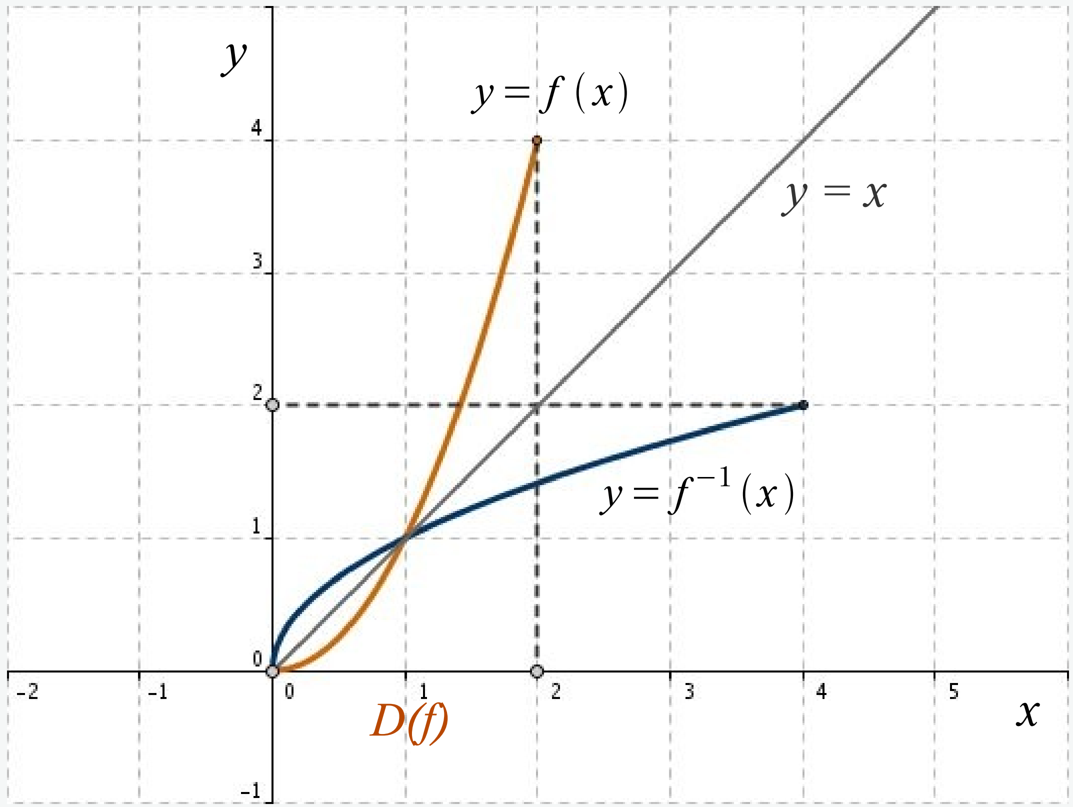


Abb. 17: Darstellung einer Abbildung $y = x^2$ und die Umkehrabbildung $y = \sqrt{x}$ ($X = [0, 2]$)

Bei der Darstellung der Funktion f und der Umkehrfunktion entsteht die "Kurve" der Umkehrabbildung durch Spiegelung der "Kurve" f an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.

Verkettung von Abbildungen

Manchmal werden Abbildungen hintereinander ausgeführt. Das macht natürlich nur dann Sinn, wenn jeweils das Bild einer Abbildung in der Definitionsmenge der nächsten enthalten ist. Zwei Abbildungen

$$f : \quad X \to Y , \qquad g : \quad Y \to Z$$

lassen sich nur dann entsprechend zu einer Abbildung $h\!: X \to Z$ verketten, wenn $W(f)$ eine Teilmenge von $D(g)$ ist.

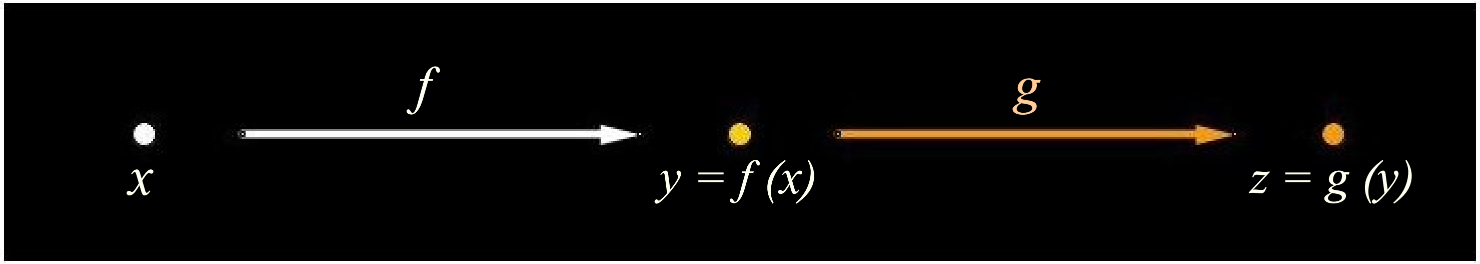
Wenn das möglich ist, dann schreibt man für diese Zusammensetzung $f(g)$, gesprochen "g verkettet mit f" oder auch "g nach f" (g wird nach f ausgeführt).

Eine sehr verbreitete Schreibweise für die Verkettung ist der Ring $\circ$

$$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$$

Definition:

Wird ein Bildelement $y = f(x)$ durch eine zweite Abbildung g auf das Element $z = g(y)$ abgebildet, so handelt es sich um eine Zusammensetzung (Verkettung) zweier Abbildungen, die folgendermaßen veranschaulicht werden kann



Durch die Verkettung wird das Element x auf das Element z abgebildet

$$z = g(y) = g(f(x)) = h(x)$$

Die Abbildung $h(x)$ heißt die durch f und g zusammengesetzte, verkettete Abbildung.

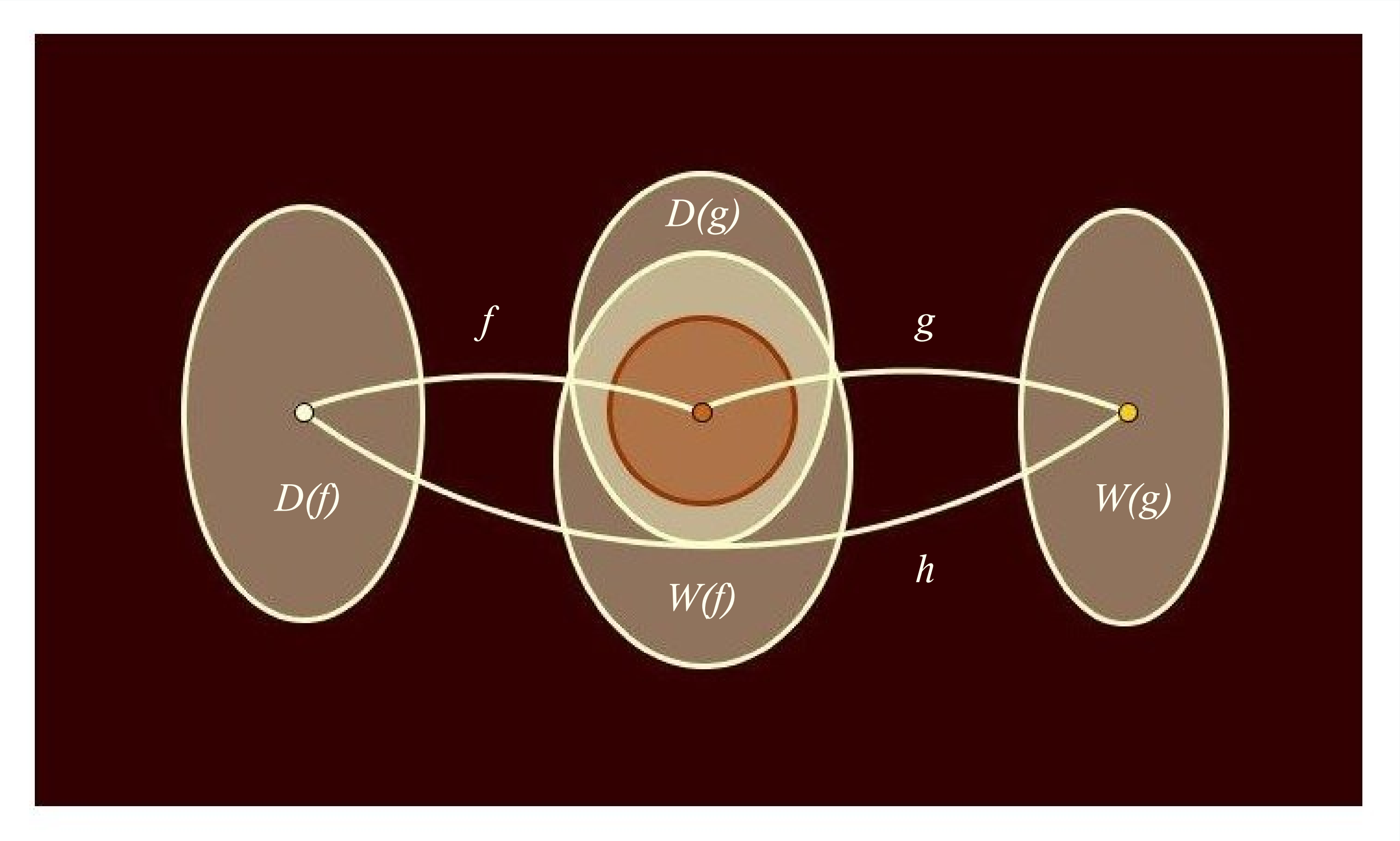


Abb. 17: Eine Verkettung von Abbildungen ist nur dann möglich, wenn der Bildbereich der ersten im Definitionsbereich der zweiten enthalten ist.

Beispiel 1:

$$f(x) = x + 1, \qquad g(y) = y^2$$

$$g(f(x)) = (x+1)^2, \qquad f(g(x)) = x^2 + 1$$

$$f(g(x)) \neq g(f(x))$$

Beispiel 2:

$$f(x) = e^{x}, \qquad g(y) = y^3 - 1$$

$$g(f(x)) = (e^x)^3 - 1 = e^{3x} - 1$$

$$f(g(x)) = e^{x^3 - 1}$$

Beispiel 3:

$$f(x) = x^3, \qquad g(y) = -2y$$

$$g(f(x)) = -2x^3, \qquad f(g(x)) = -8x^3$$