Relationen, Funktionen: Aufgaben 4, 5

Aufgabe 4:

Welche Abbildungen sind gleich:

1. $f_1: \quad D(f_1) = [0,\ 1], \qquad f_1(x) = x + 1$
2. $f_2: \quad D(f_2) = \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = x^2$
3. $f_3: \quad D(f_3) = [0,\ \infty), \qquad f_3(x) = x + 1$
4. $f_4: \quad D(f_4) = [0,\ \infty), \qquad f_4(x) = x^2$

Aufgabe 5:

Welche der dargestellten Relationen sind Funktionen:

$a)$ $y = x^2 - 1, \qquad y^2 = x - 2$

$b)$ $y = \sin x, \qquad y = \sin(2x)$

$c)$ $y = \sqrt{x}, \qquad y = e^x$

$d)$ $x^2 + y^2 = 4, \qquad y = \sqrt{9 - x^2}$

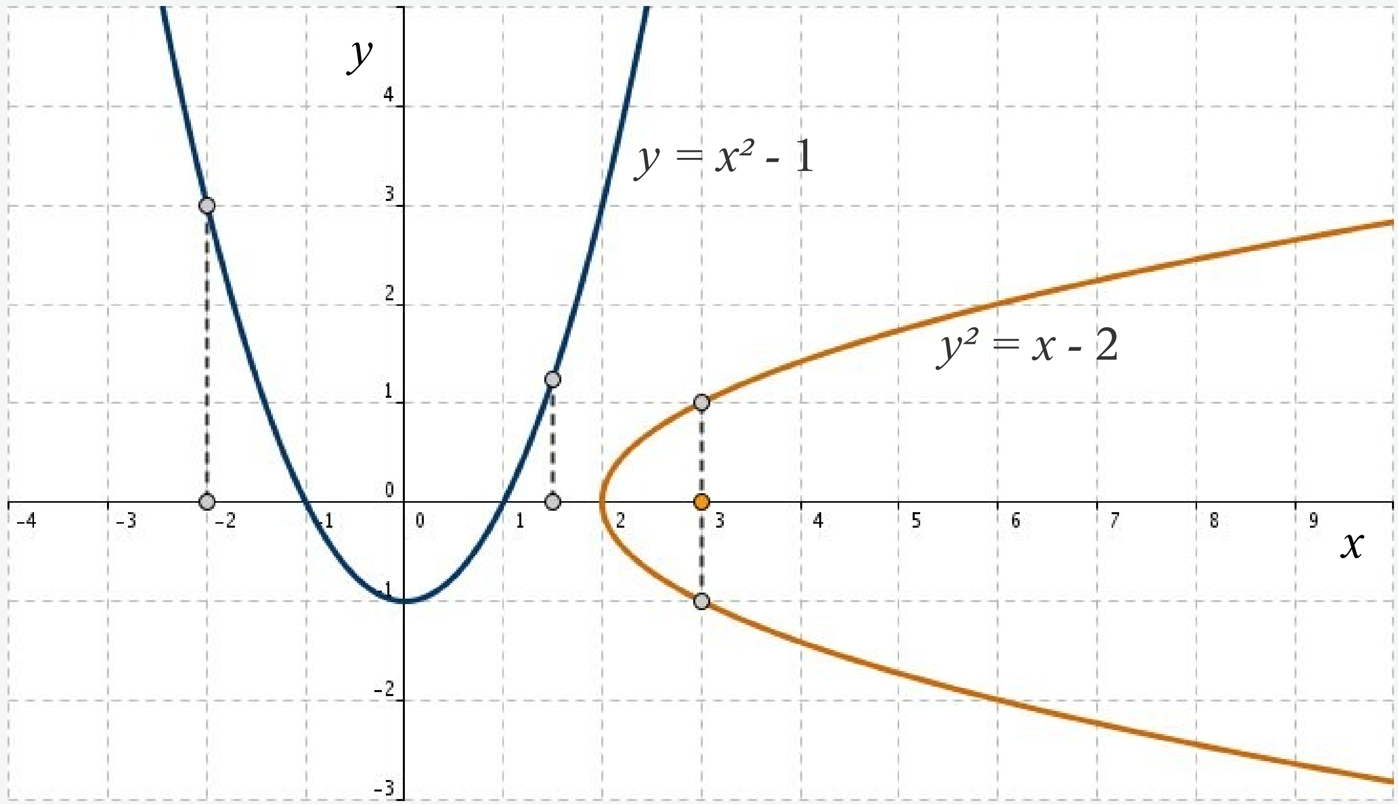


Abb. 10-1: Graphen von $y = x^2 - 1$ *und* $y^2 = x - 2$

$y = x^2 - 1$ – eine Funktion

$y^2 = x - 2$ – keine Funktion

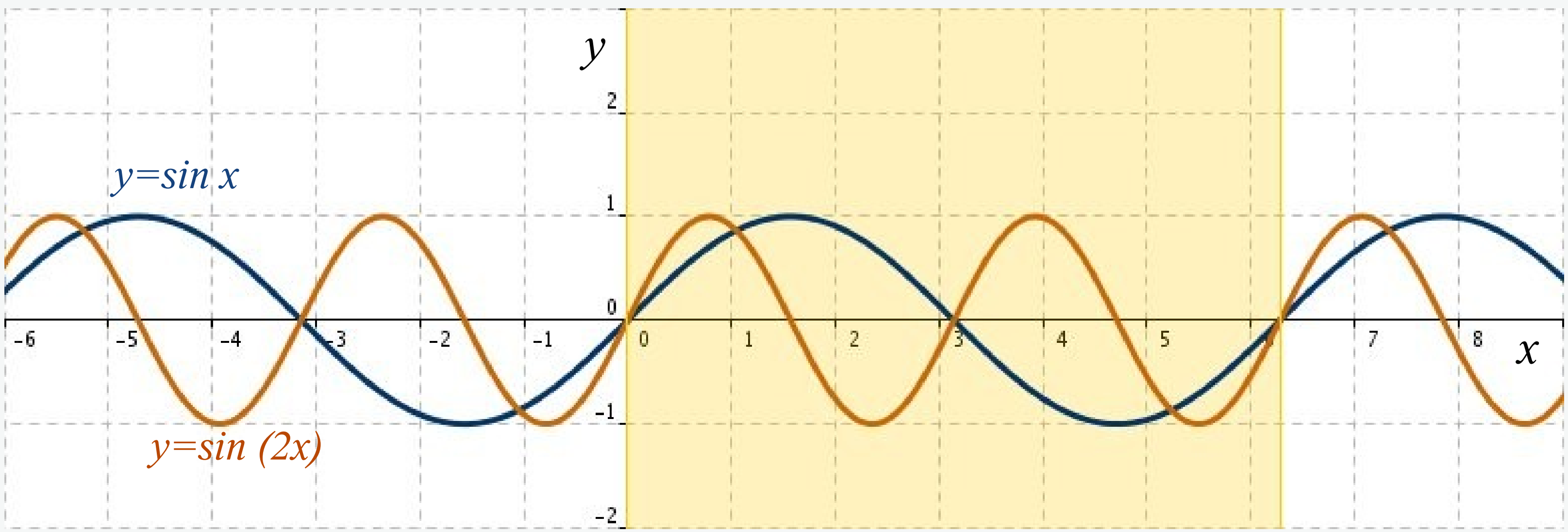


Abb. 10-2: Funktionen $y = \sin x$ und $y = \sin(2x)$

$y = \sin x$ – eine Funktion

$y = \sin(2x)$ – eine Funktion

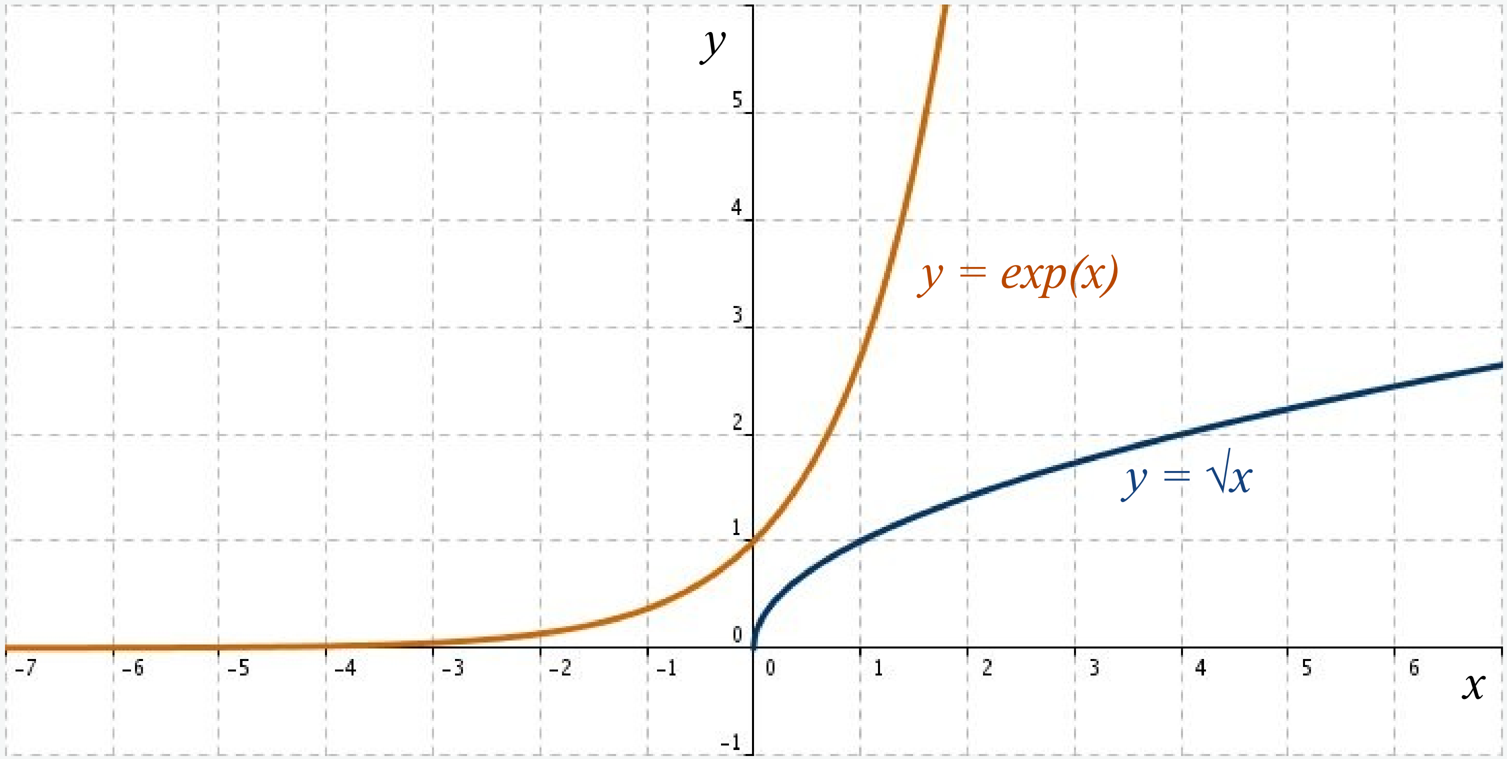


Abb. 10-3: Funktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = \exp x$

$$y = \sqrt{x} \quad - \quad \text{eine Funktion}$$

$$y = e^{x} \quad - \quad \text{eine Funktion}$$

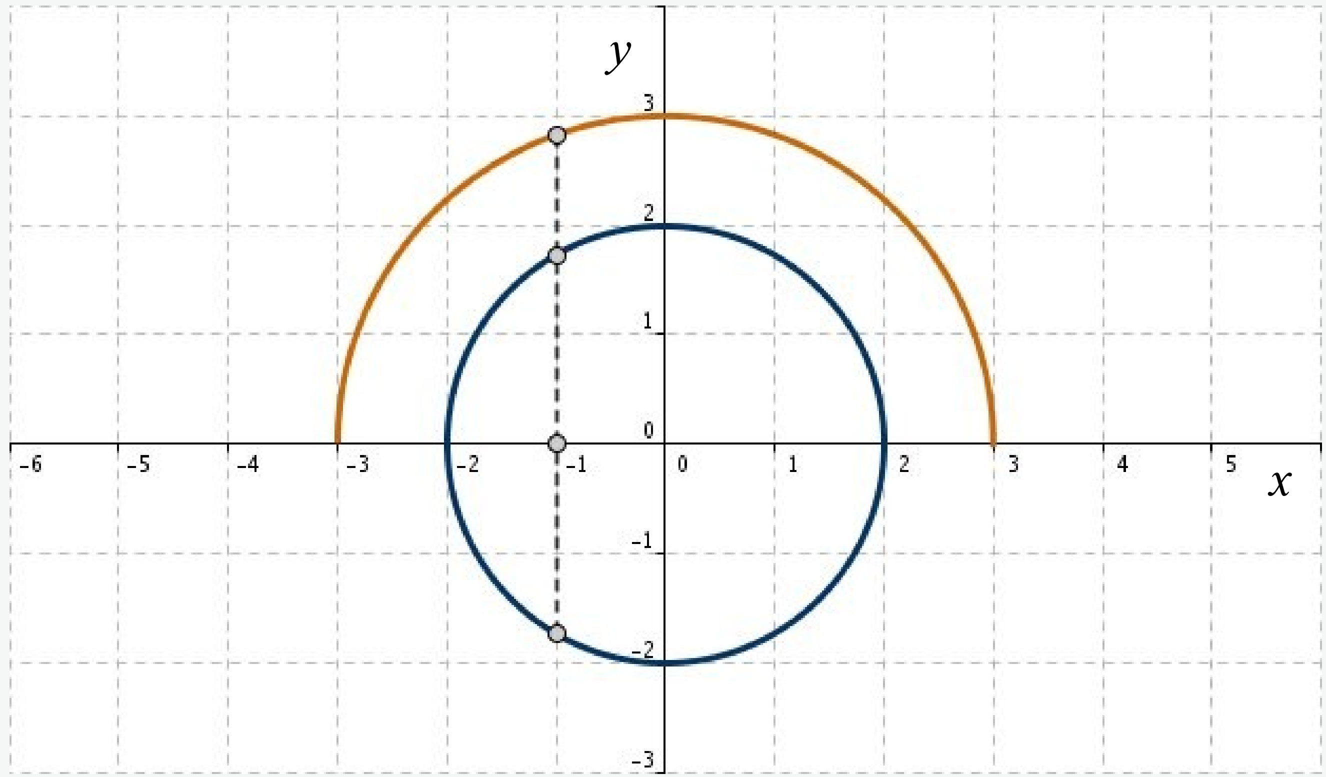
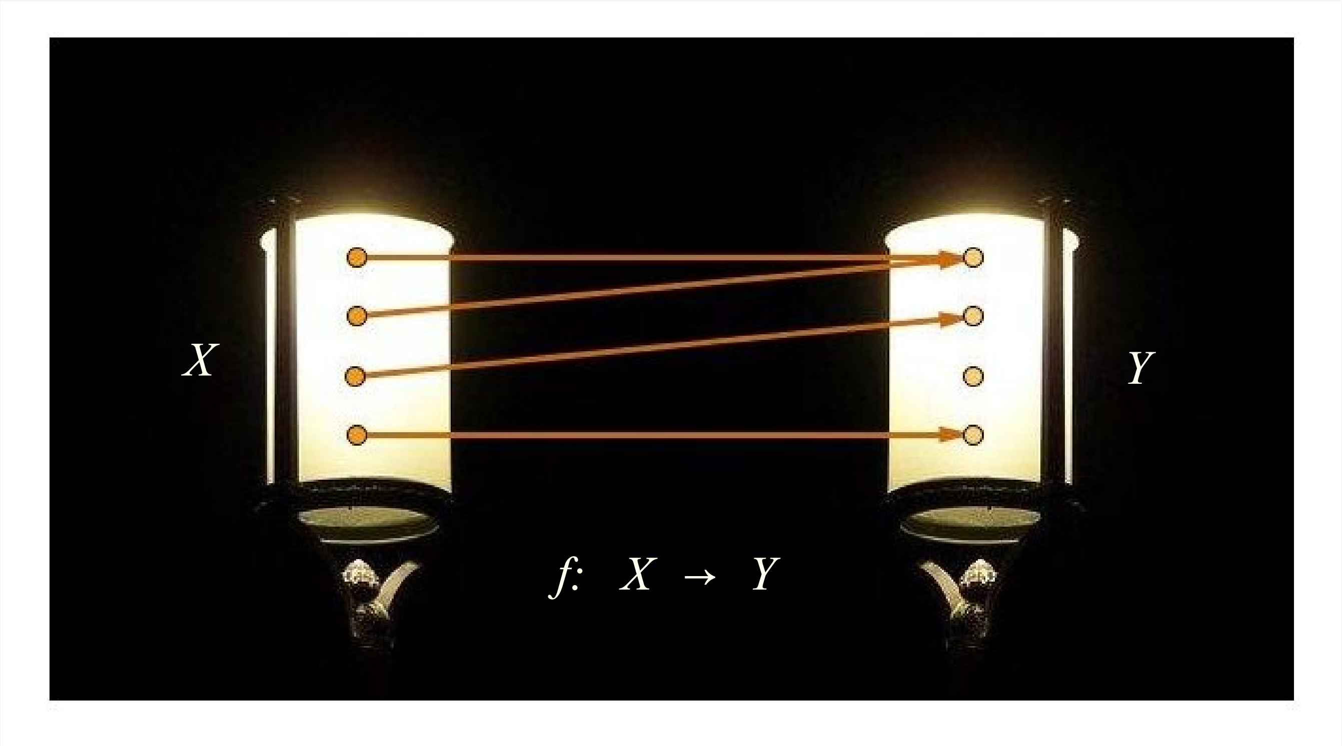


Abb. 10-4: Graphen von $x^2 + y^2 = 4$ und $y = sqrt(9 - x^2)$

$x^2 + y^2 = 4$ – keine Funktion

$y = \sqrt{9 - x^2}$ – eine Funktion



http://www.flickr.com/photos/30177797@N02/3859992981/in/pool-streetlamps

Abb. 11: Darstellung einer Abbildung

Eine Abbildung $f: X \to Y$ kann ohne Weiteres mehrere verschiedene Elemente von X auf das gleiche Element von Y abbilden. Andererseits kann es auch Elemente von Y geben, die von f gar nicht "getroffen" werden.

Eigenschaften einer Abbildung

Um Abbildungen zu charakterisieren werden wir nun drei neue wichtige Begriffe einführen:

Eine Abbildung $f: X \to Y, \; x \to f(x)$ heißt

- injektiv, wenn aus $x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$
- surjektiv, wenn auf jedes Element der Wertemenge hin abgebildet wird.
- bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

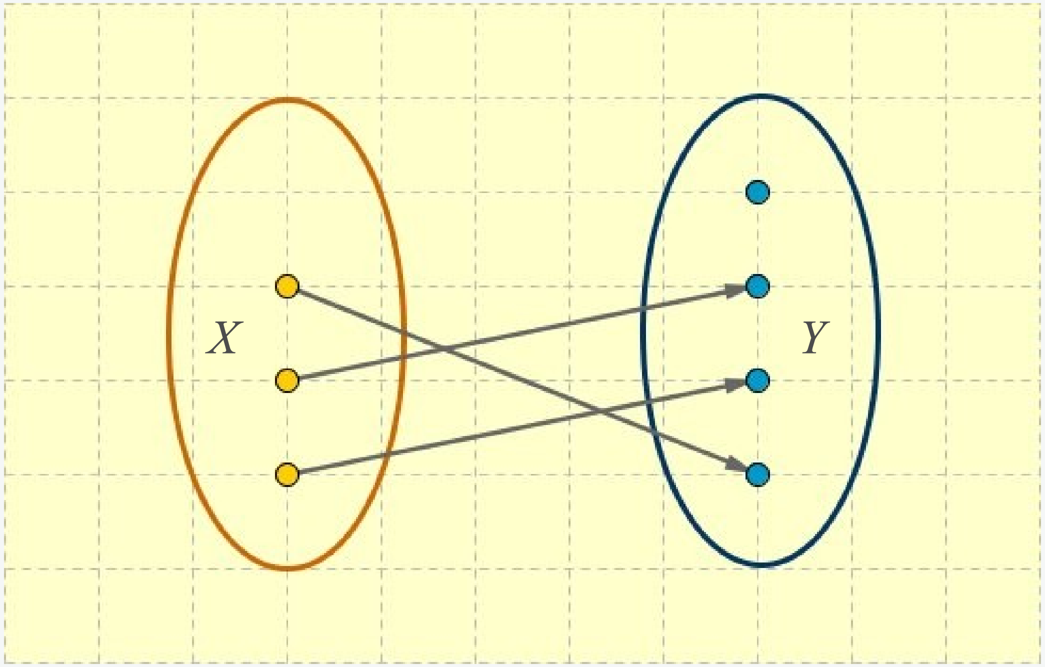


Abb. 12-1: Injektive Abbildung

Kennt man ein Bildelement $y = f(x)$, dann kann man x damit eindeutig bestimmen. Statt injektiv wird auch die Bezeichnung eineindeutig benutzt. Dies wird in der Literatur nicht ganz einheitlich genannt, manchmal ist damit auch bijektiv gemeint.

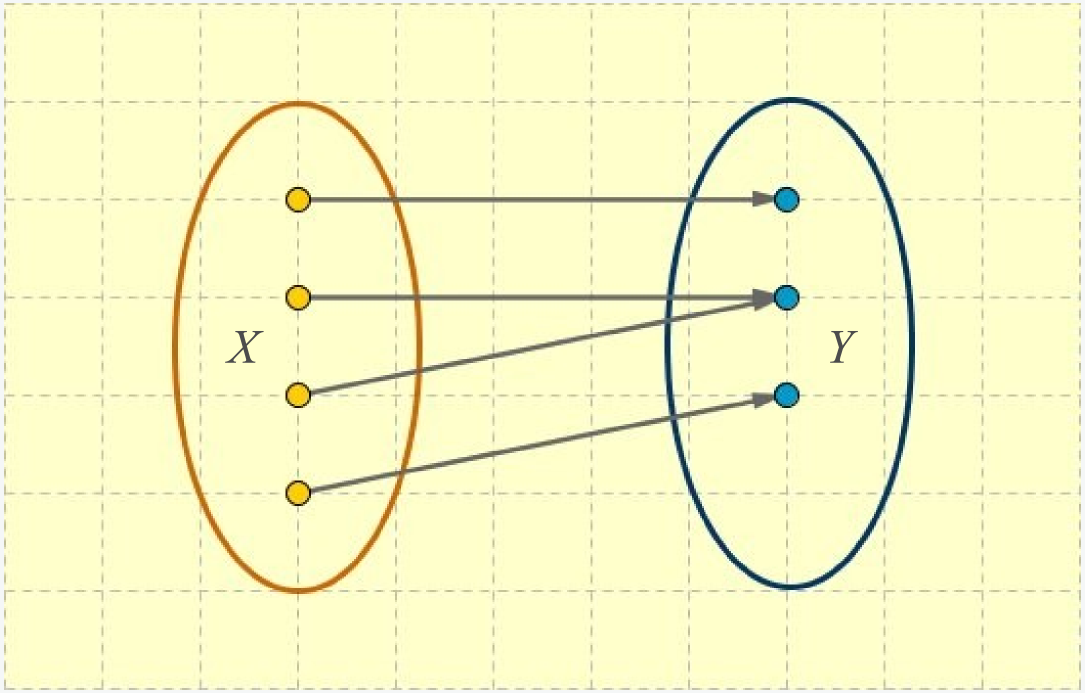


Abb. 12-2: Surektive Abbildung

Surjektivität heißt, dass tatsächlich jedes Element von Y Bild eines Elements von X ist. Bei Surjektivität wird der gesamte mögliche Wertebereich ausgenutzt.

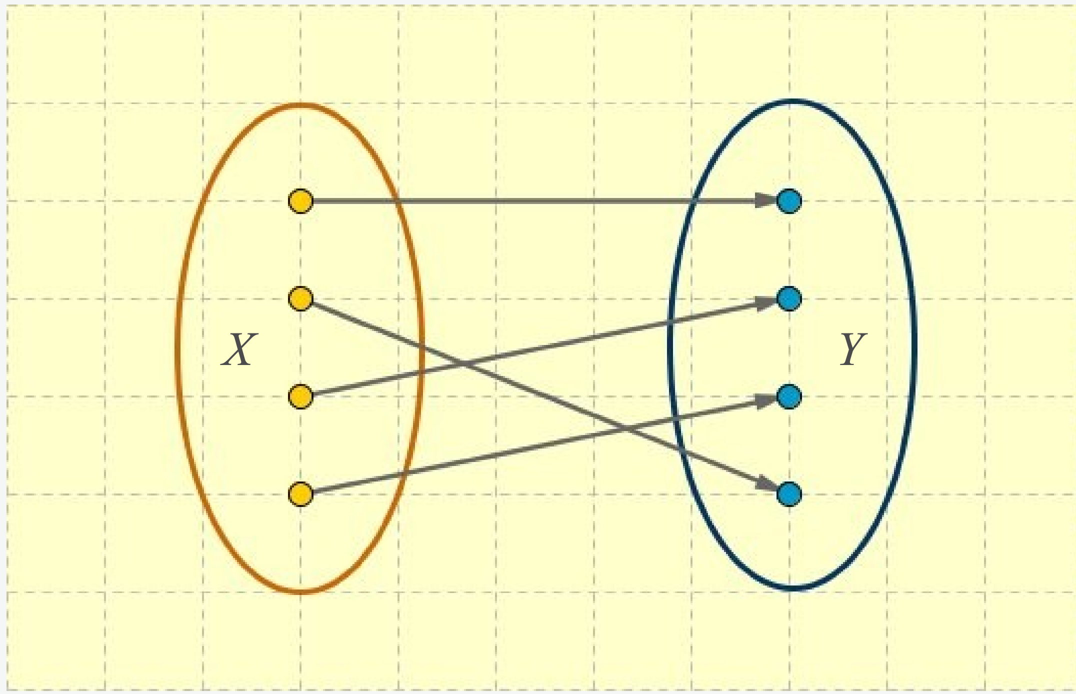


Abb. 12-3: Bijektive (injektive und surjektive) Abbildung

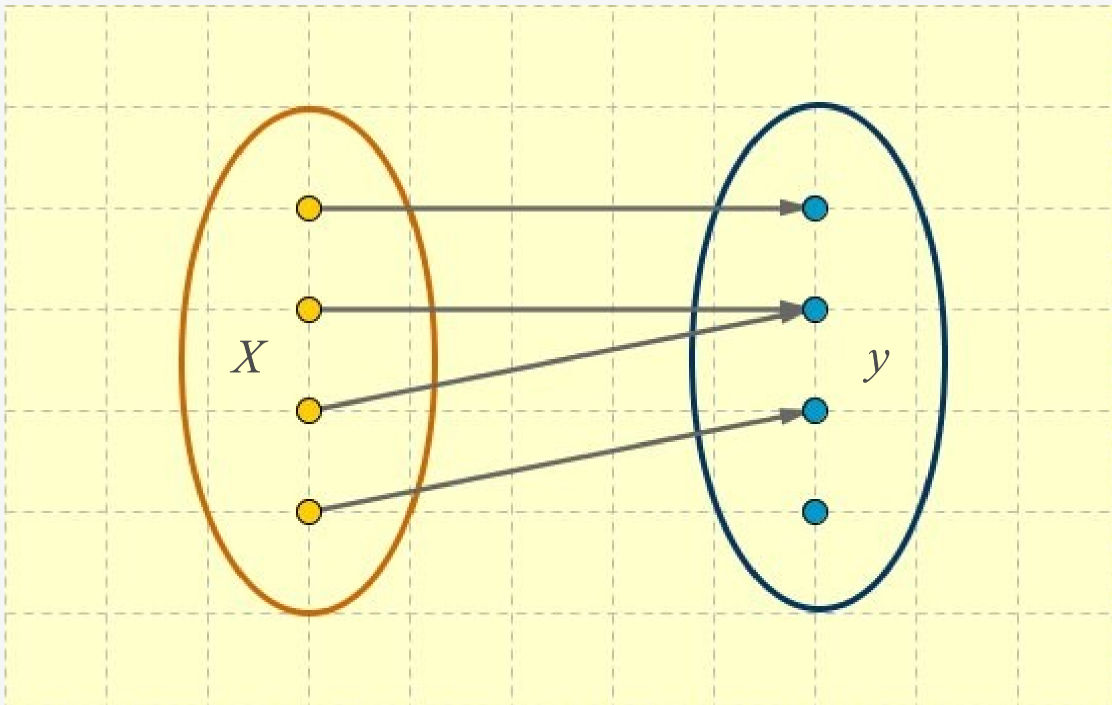


Abb. 12-4: Nicht injektive und nicht surjektive Abbildung

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv ?

Aufgabe 6:

$$f(x) = 2\,(x - 1)^2, \qquad g(x) = \sqrt{2\,x}\,, \qquad h(x) = 0.5\,x$$

$$D = [0,\ 2], \qquad W = [0,\ 2]$$

Aufgabe 7:

$$f(x) = |\,x\,|, \qquad g(x) = |\,x - 2\,|$$

$$D = [0,\ 4], \qquad W = [0,\ 4]$$

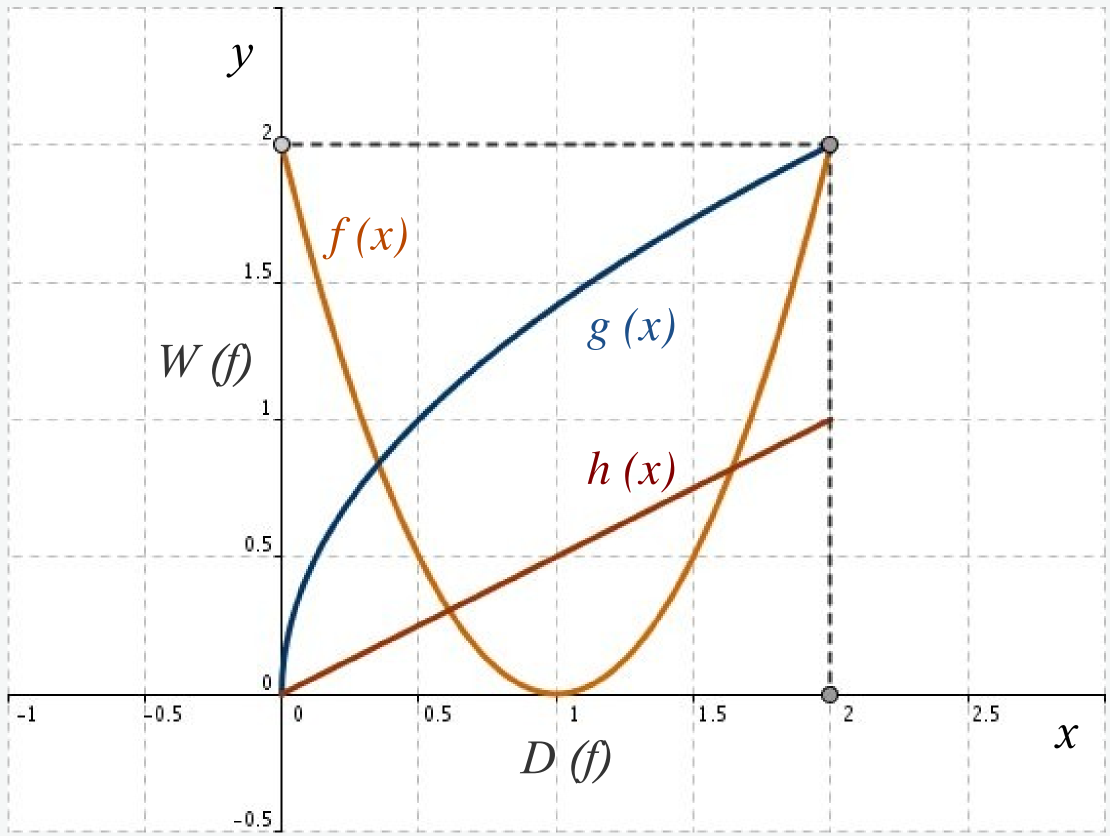


Abb. 13: Funktionen f (x), g (x) und h (x), D = [0, 2] und W = [0, 2]

$$f(x) = 2\,(x - 1)^2\,, \qquad g(x) = \sqrt{2\,x}\,, \qquad h(x) = 0.5\,x$$

$f(x)$ – surjektiv, $g(x)$ – bijektiv, $h(x)$ – injektiv

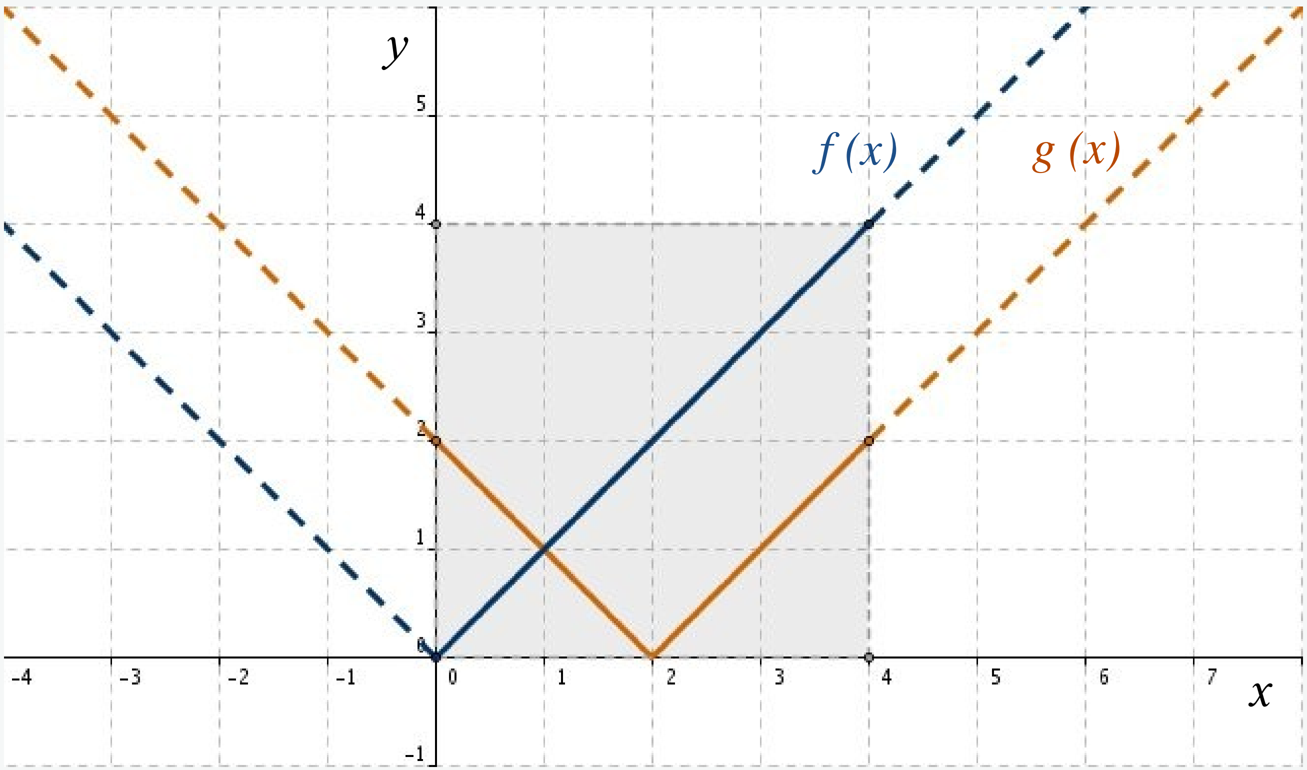


Abb. 14: Funktionen f (x) und g (x), D = [0, 4] und W = [0, 4]

$$f\,(x) = |\,x\,|, \qquad g\,(x) = |\,x - 2\,|$$

$f\,(x)$ – bijektiv, $g\,(x)$ – nicht injektiv, nicht surektiv