Mengenlehre

Aufgaben mit Lösungen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Hilfsmittel

1. Zahlenmengen

$\mathbb{N}$ – die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N} = \left\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\right\}$,

$\mathbb{Z}$ – die Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{Z} = \left\{\dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\right\}$,

$\mathbb{Q}$ – die Menge der rationalen Zahlen, $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q},\ q \neq 0,\quad p, q \in \mathbb{Z}\right\}$,

$\mathbb{R}$ – die Menge der reellen Zahlen.

2. Symbole

$\forall$ – für alle,

$\exists$ – existiert mindestens ein,

$\equiv$ – ist kongruent,

$\Rightarrow$ – Folge-Pfeil,

$\Leftrightarrow$ – Äquivalenz-Pfeil.

3. Intervalle: Schreibweise

Kapitel 2

Zahlen

1. Zahlen: Aufgaben

A1 Für welche natürliche Zahlen n gilt $n^2 \geqslant n$?

A2 Für welche ganze Zahlen x gilt $x^2 \geqslant x$?

A3 Zeigen Sie, dass die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen immer durch 3 teilbar ist.

2. Zahlen: Lösungen

L1 $n^2 \geqslant n$ gilt für alle natürlichen Zahlen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} n = 0:&\quad 0 \geqslant 0 \quad - \quad \text{wahre Aussage} \\ n = 1:&\quad 1 \geqslant 1 \quad - \quad \text{wahre Aussage} \\ n = 2:&\quad 4 \geqslant 2 \quad - \quad \text{wahre Aussage.} \end{aligned}$$

L2 $x^2 \geqslant x$ gilt für alle ganze Zahlen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} x = -1:&\quad 1 \geqslant -1 \quad - \quad \text{wahre Aussage} \\ x = -2:&\quad 4 \geqslant -2 \quad - \quad \text{wahre Aussage.} \end{aligned}$$

Dass die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen durch 3 teilbar ist, kann man an einigen Beispielen zeigen:

$$\begin{aligned} &7 + 8 + 9 = 24, \quad 24 : 3 = 8, \\ &8 + 9 + 10 = 27, \quad 27 : 3 = 9, \quad 27 = 24 + 3, \\ &9 + 10 + 11 = 30, \quad 30 : 3 = 10, \quad 30 = 27 + 3. \end{aligned}$$

Man kann diese Behauptung auch allgemein für beliebige natürliche Zahlen n, $(n + 1)$ und $(n + 2)$ beweisen:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3\,(n + 1), \qquad \frac{3\,(n + 1)}{3} = n + 1.$$

Kapitel 3

Mengenlehre: Aufgaben

1. Begriff einer Menge: Definition, Darstellungsformen

A1 Bestimmen Sie, ob M_1, M_2, M_3 und M_4 Mengen sind.

$$M_1 = \left\{3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\ 2187,\ ...\right\},$$
$$M_2 = \left\{\text{Menge der netten Menschen in einem Bus}\right\},$$
$$M_3 = \left\{\text{Menge der Primzahlen zwischen 1 und 28}\right\},$$
$$M_4 = \left\{\text{Menge der Arbeit}\right\}.$$

A2 Stellen Sie folgende Mengen in beschreibender Form dar

$$M_1 = \left\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ ...\right\},$$
$$M_2 = \left\{0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 25,\ 30,\ 35,\ ...\right\},$$
$$M_3 = \left\{\text{Frankfurt},\quad \text{Kassel},\quad \text{Marburg},\quad \text{Gießen},\quad \text{Fulda},\quad \dots\right\},$$
$$M_4 = \left\{y = 2x - 3,\quad 5y - 7x = -1,\quad y = x,\quad 3y = -5x\right\},$$
$$M_5 = \left\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\right\}.$$

auf der Seite 5.

A3 Definieren Sie die in Abb. (3.1) auf Seite 5 dargestellte Menge in beschreibender Form.

A4 Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender und beschreibender Form

(a) Die Menge der natürlichen Zahlen, die durch 15 teilbar und kleiner als 77 sind.

(b) Die Menge der ganzen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 11 ist.

A5 Geben Sie folgende Intervalle in Klammernschreibweise und in beschreibender Schreibweise wieder. Grundmenge seien die reellen Zahlen.

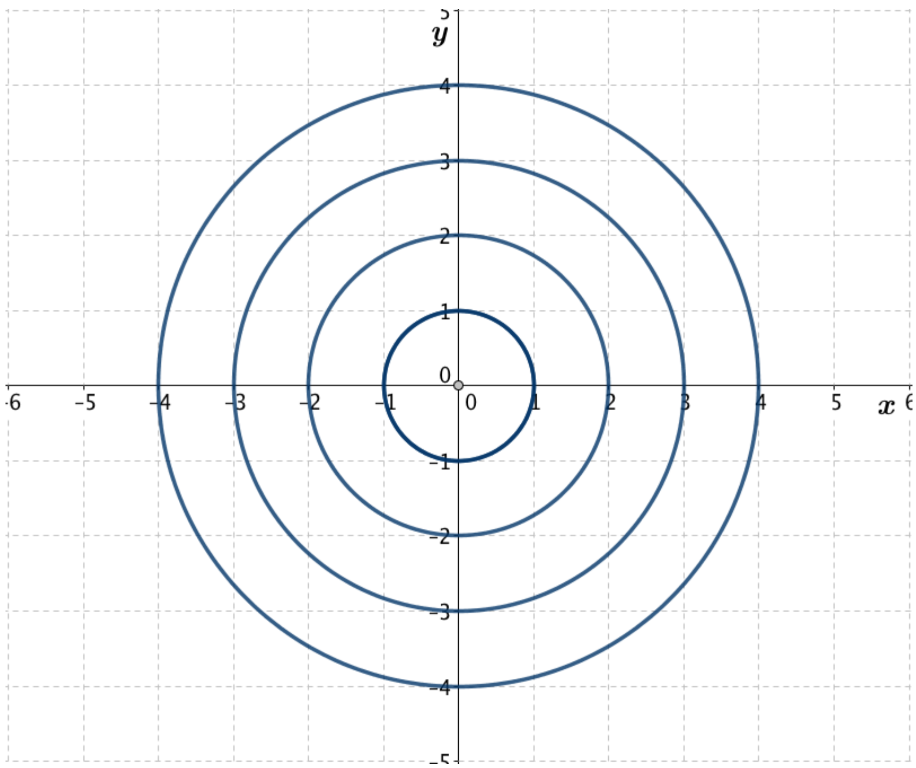

Abbildung 3.1: Die Darstellung der Aufgabe

(a) Ein offenes Intervall von −1 bis 12.

(b) Geschlossenes Intervall von a bis b.

(c) Ein halboffenes Intervall von −3.3 bis 5, 5 gehört nicht zu diesem Intervall.

(d) Ein halboffenes Intervall von δ bis σ, δ gehört nicht zu diesem Intervall.

A6 Schreiben Sie folgende Mengen als Intervall auf:

$$a)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad -9 < x < -2\right\}, \qquad b)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad -6.2 \leqslant x \leqslant 4.7\right\},$$

$$c)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad x \leqslant 5\right\}, \qquad d)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad x > -2\right\}.$$

A7 Skizzieren Sie die folgenden Zahlenmengen auf der Zahlengerade:

$$a)\ M = \left\{-5,\ -2,\ 3,\ 4.5\right\}, \qquad b)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad x < 4\right\},$$

$$c)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad x \geqslant -5.5\right\}, \qquad d)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad -2 < x \leqslant \frac{3}{2}\right\},$$

$$e)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad -5 < x < \frac{5}{2},\quad x \neq 0\right\}, \qquad f)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad -9 \leqslant x \leqslant 6,\quad x^2 \neq 4\right\},$$

$$g)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad -1 < x < 4,\quad x^2 \neq 4\right\}, \qquad h)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad -3 < x \leqslant 3,\quad x^2 \neq 9\right\},$$

$$i)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\quad |x| \leqslant 3\}, \qquad j)\ M = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad |x| > \frac{3}{2}\right\},$$

$$k)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\quad |x| \leqslant 5,\quad x \neq 3\}, \qquad l)\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\quad |x| < 3,\quad x \neq \pm 1\}.$$

2. Mächtigkeit einer Menge, Potenzmenge

Definition: *Mächtigkeit einer Menge*

Die *Mächtigkeit einer endlichen Menge* ist die Anzahl ihrer Elemente.

Beispiel: Die Menge $A = \{a, b, c\}$ hat drei Elemente a, b und c. Ihre Mächtigkeit, bezeichnet als $|A|$, ist gleich 3: $|A| = 3$.

Definition: *Potenzmenge*

Die *Potenzmenge* einer gegebenen Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Sie enthält auch die leere Menge und die Menge A als Elemente.

Beispiel: Die Potenzmenge der Menge $A = \{x, y\}$ ist

$$P(A) = \{\emptyset,\ \{x\},\ \{y\},\ \{x, y\}\}, \qquad |P(A)| = 4.$$

A8 Berechnen Sie die Potenzmenge folgender Mengen

$$M_1 = \{1,\ a\}, \qquad M_2 = \{3,\ \{\emptyset\}\}, \qquad M_3 = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}.$$

A9 Berechnen Sie die Mächtigkeit und die Potenzmenge folgender Mengen

$$M_1 = \{1,\ 3,\ 5\}, \qquad M_2 = \{\emptyset,\ \{9,\ 12\}\}, \qquad M_3 = \{\{\emptyset\}\}, \qquad M_4 = \{9,\ \{9\},\ 19\}.$$

Kapitel 4

Mengenlehre: Lösungen

1. Begriff einer Menge: Definition, Darstellungsformen

L1 M_1 und M_3 sind Mengen. Die Menge M_1 ist eine unendliche Menge. Ihre Elemente sind Potenzen von 3. Man kann weitere Elemente von M_1 bestimmen. M_3 ist eine endliche Menge. Sie besteht aus 9 Elementen und kann in aufzählender Form geschrieben werden:

$$M_3 = \Big\{\text{Menge der Primzahlen zwischen 1 und 28}\Big\} = \Big\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23\Big\}.$$

M_2 ist keine Menge. Es gibt keine bestimmte Definition eines netten Menschen. M_4 ist keine Menge, da man ihre Elemente nicht bestimmen kann. In der Definition einer Menge nach Cantor steht: “Eine Menge ist Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten/Elementen”.

L2

$$\begin{aligned}
M_1 &= \Big\{x \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\Big\} = \Big\{x \mid x = 2n,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ n > 0\Big\},\\
M_2 &= \Big\{x \mid x \text{ ist eine natürlich Zahl, die durch 5 teilbar ist}\Big\} = \Big\{x \mid x = 5n,\ \ n \in \mathbb{N}\Big\},\\
M_3 &= \Big\{x \mid x \text{ ist eine Stadt in Hessen}\Big\},\\
M_4 &= \Big\{x \mid x \text{ ist eine lineare Gleichung in zwei Variablen } x \text{ und } y\Big\},\\
M_5 &= \Big\{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl von -3 bis 3}\Big\} = \Big\{x \mid x\ |x| \leqslant 3,\ \ x \in \mathbb{Z}\Big\}\\
&= \Big\{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl, deren Betrag kleiner oder gleich 3 ist}\Big\}.
\end{aligned}$$

L3 Die Menge der Abb. (3.1) besteht aus vier Kreisen mit Mittelpunkt $O(0,0)$ und den Radien $r = 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}, 2$.

L4

$$\begin{aligned}
a)\ M &= \{0,\ 15,\ 30,\ 45,\ 60,\ 75\} = \{x = 15\,n,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ x < 77\}\\
&= \{x \in \mathbb{N},\ \ x < 77,\ \ x \text{ ist durch 15 teilbar}\}\\
b)\ M &= \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\} = \{x^2 < 11,\ \ x \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

L5

$$a)\ (-1,\ 12) = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\ \ -1 < x < 12\},$$
$$b)\ [a,\ b] = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\ \ a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$c)\ [-3.3,\ 5) = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\ \ -3.3 \leqslant x < 5\},$$
$$d)\ (\delta,\ \sigma] = \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\ \ \delta < x \leqslant \sigma\}.$$

L6

$$a)\ M = \Big\{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ -9 < x < -2\Big\}, \qquad I = (-9,\ -2),$$
$$b)\ M = \Big\{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ -6.2 \leqslant x \leqslant 4.7\Big\}, \qquad I = [-6.2,\ 4.7],$$
$$c)\ M = \Big\{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ x \leqslant 5\Big\}, \qquad I = (-\infty,\ 5],$$
$$d)\ M = \Big\{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ x > -2\Big\}, \qquad I = (-2,\ \infty).$$

L7

2. Mächtigkeit einer Menge, Potenzmenge

L8

$$M_1 = \{\, 1,\ a\}, \qquad P\,(M_1) = \Big\{\emptyset,\ \{1\},\ \{a\},\ \{1,\ a\}\Big\},$$
$$M_2 = \{\, 3,\ \{\emptyset\}\}, \qquad P\,(M_2) = \Big\{\emptyset,\ \{3\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{3,\ \{\emptyset\}\}\Big\},$$
$$M_3 = \{\, \emptyset,\ \{\emptyset\}\}, \qquad P\,(M_3) = \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\Big\}.$$

L9

$$M_1 = \{\, 1,\ 3,\ 5\}, \qquad P\,(M_1) = \Big\{\emptyset,\ \{1\},\ \{3\},\ \{5\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 5\},\ \{3,\ 5\},\ \{\, 1,\ 3,\ 5\}\Big\}, \quad |\,P\,(M_1)\,| = 2^3 = 8,$$
$$M_2 = \{\, \emptyset,\ \{9,\ 12\}\}, \qquad P\,(M_2) = \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{9,\ 12\}\},\ \{\,\emptyset,\ \{9,\ 12\}\}\Big\}, \quad |\,P\,(M_2)\,| = 2^2 = 4,$$
$$M_3 = \{\, \{\emptyset\}\}, \qquad P\,(M_3) = \Big\{\emptyset,\ \{\{\emptyset\}\}\Big\}, \quad |\,P\,(M_3)\,| = 2^1 = 2,$$
$$M_4 = \{\, 9,\ \{9\},\ 19\}, \qquad P\,(M_4) = \Big\{\emptyset,\ \{9\},\ \{\{9\}\},\ \{19\},\ \{9,\ \{9\}\},\ \{9,\ 19\},\ \{\{9\},\ 19\},\ \{\, 9,\ \{9\},\ 19\}\Big\},$$
$$|\,P\,(M_4)\,| = 2^3 = 8.$$