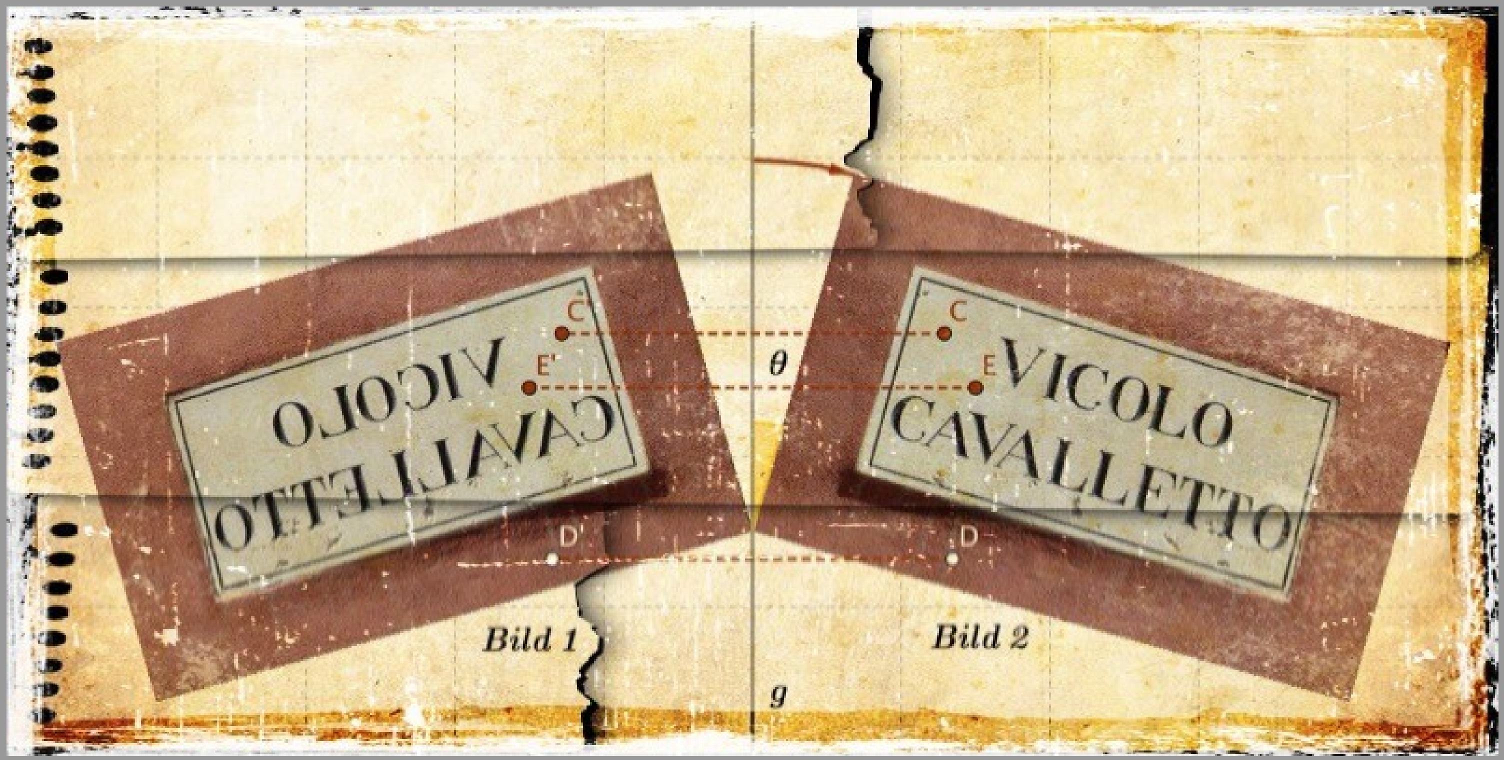


Transformationen

Die in den folgenden Beispielen auftretenden Transformation, Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen, werden algebraisch beschrieben.


VICOLO
VICOLO
VICOLO
CAVALLETTO

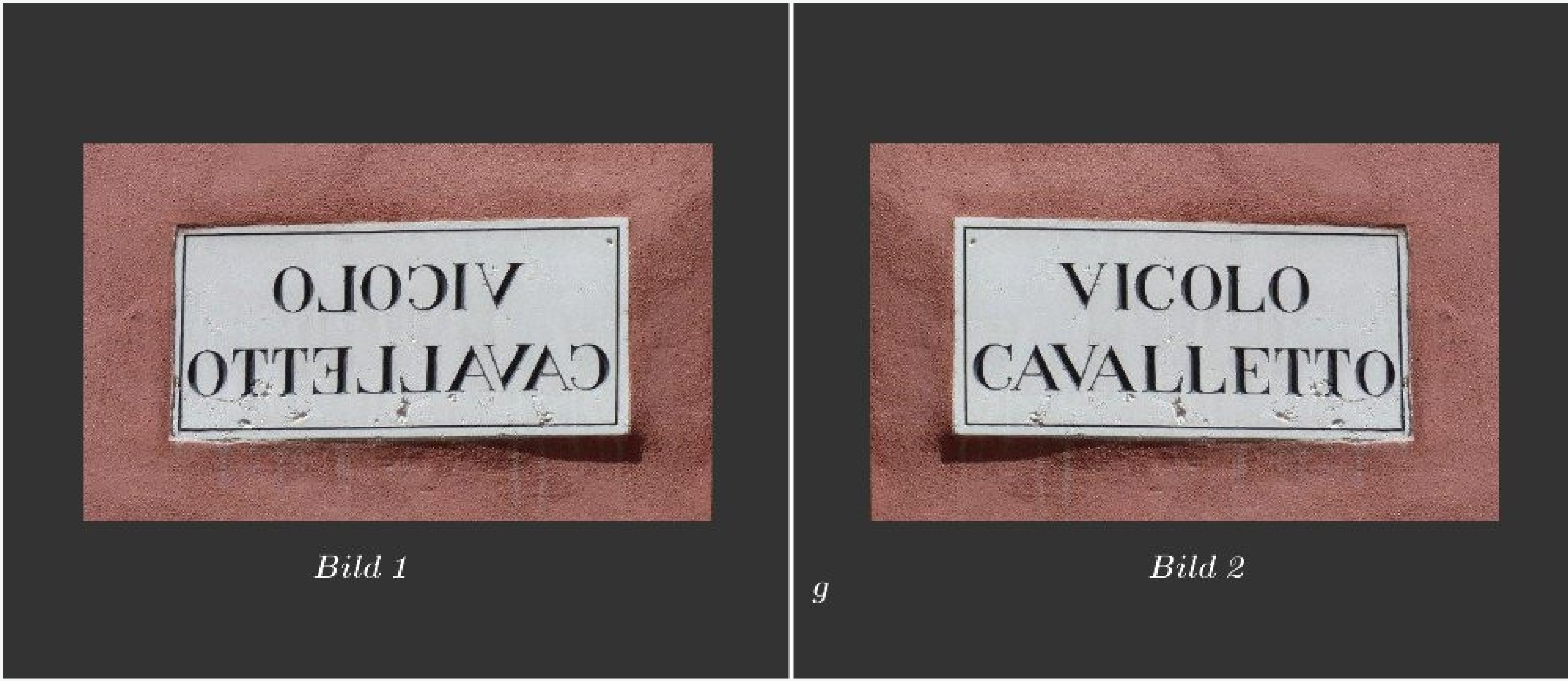


Abb. 1-1: Die Abbildung der Aufgabe

Beschreiben Sie die Transformationen der Abbildungen 1-1 bis 3-1.

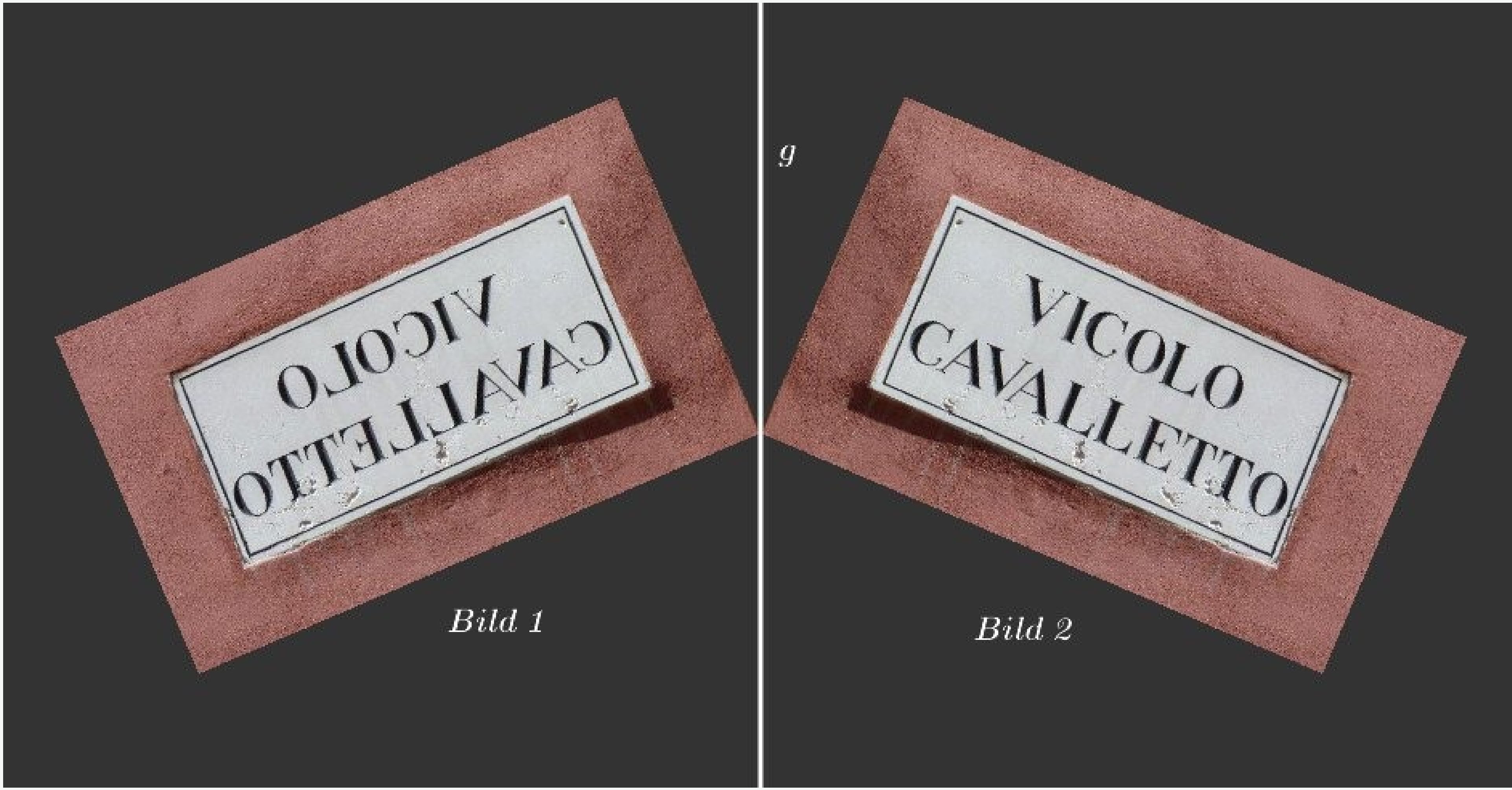


Abb. 1-2: Die Abbildung der Aufgabe

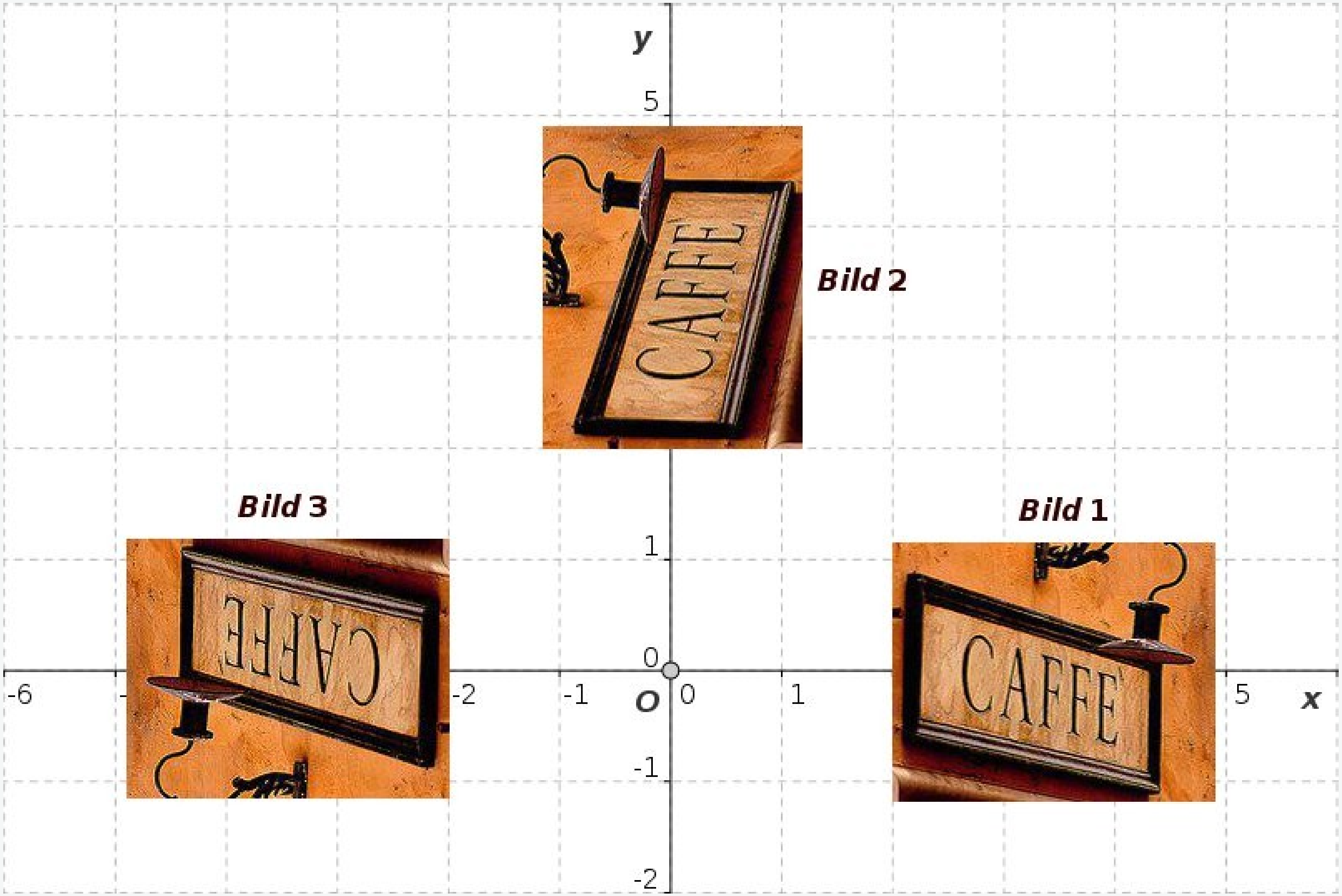


Abb. 3-1

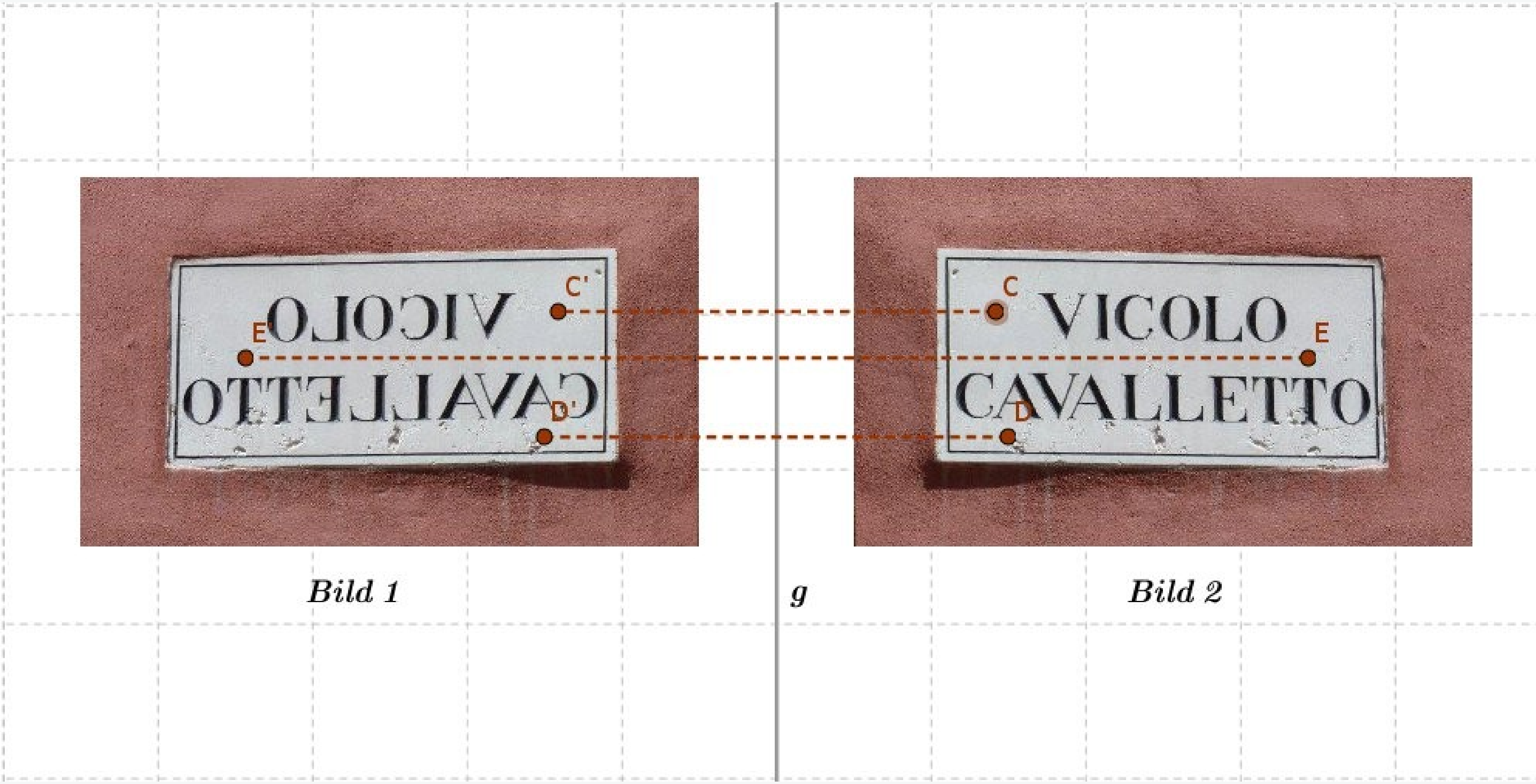


Abb. 2-1: Die Abbildung der Aufgabe

Das erste Bild entsteht aus dem zweiten Bild durch Spiegelung an der Geraden g.

$$C \overbrace{\to}^{g} C', \qquad D \overbrace{\to}^{g} D', \qquad E \overbrace{\to}^{g} E'$$

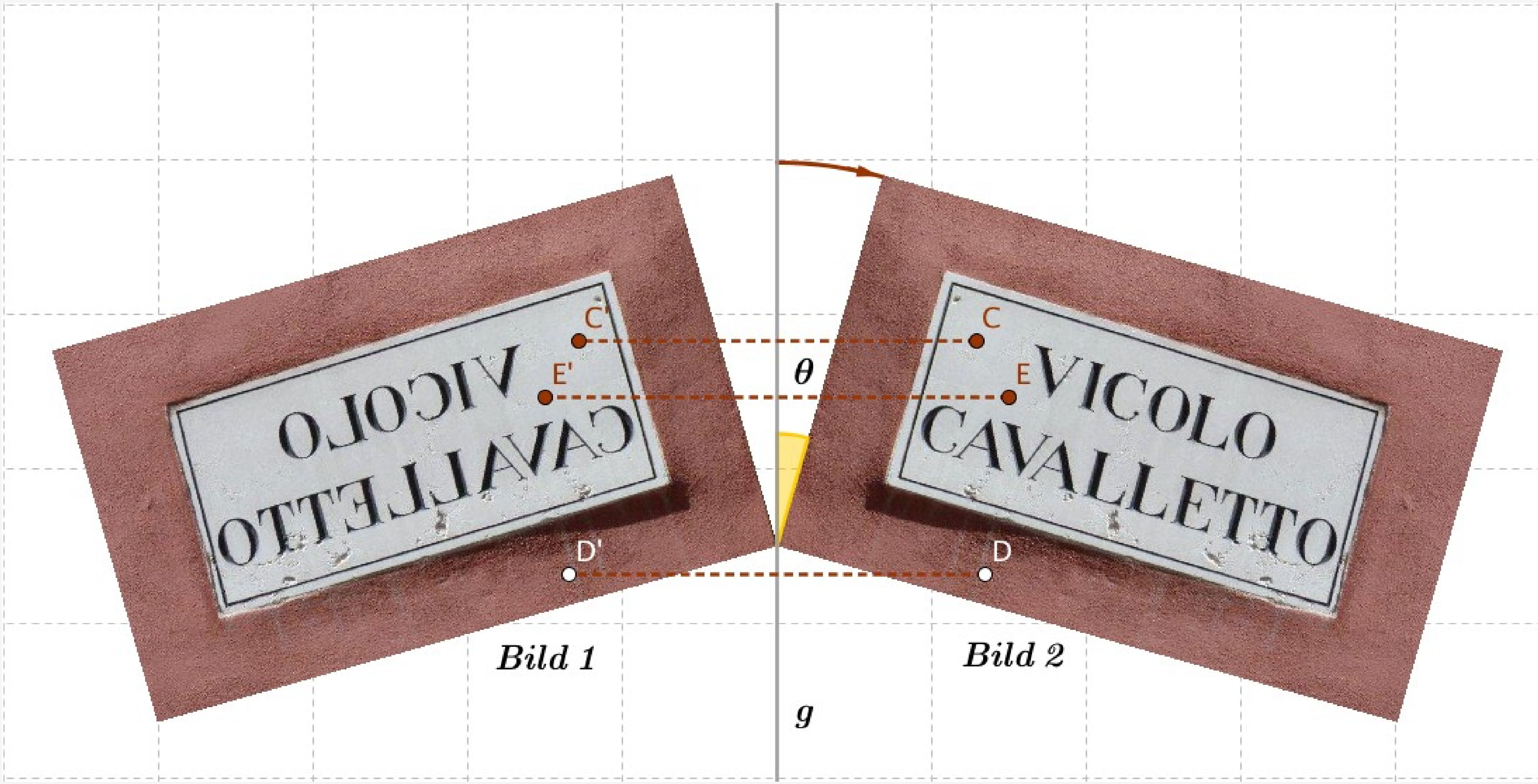


Abb. 2-2: Die Abbildung der Aufgabe

- Hier wurde zuerst Bild 1 um einen Winkel θ um den Ursprung O gedreht
- Bild *2* entsteht dann durch Spiegelung an der Geraden g

$$C \overbrace{\to}^{g} C\,', \qquad D \overbrace{\to}^{g} D\,', \qquad E \overbrace{\to}^{g} E\,'$$

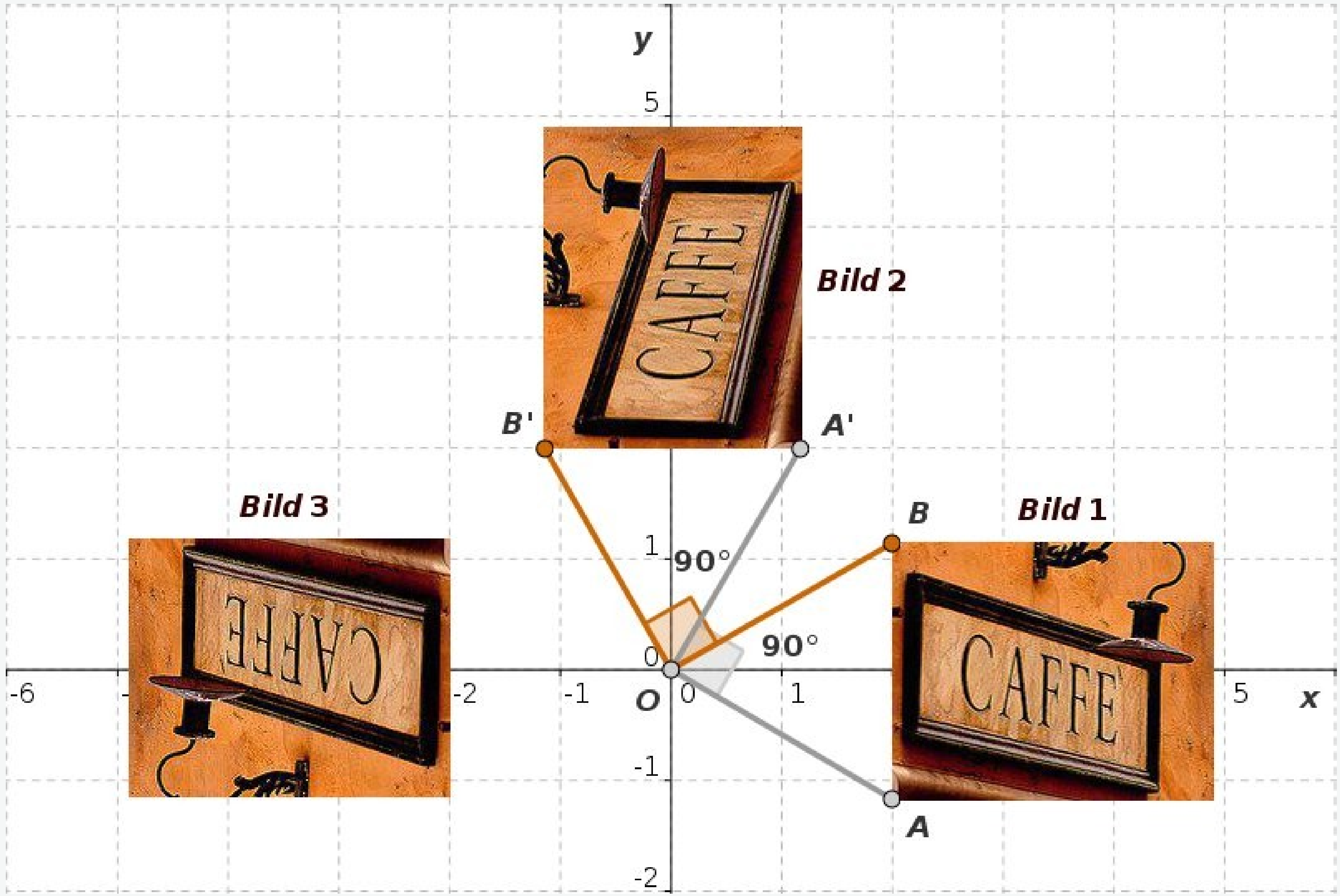


Abb. 3-2

Das zweite Bild entsteht aus dem ersten durch Drehung um 90º.

$$\sphericalangle AOA' = \sphericalangle BOB' = 90^\circ$$

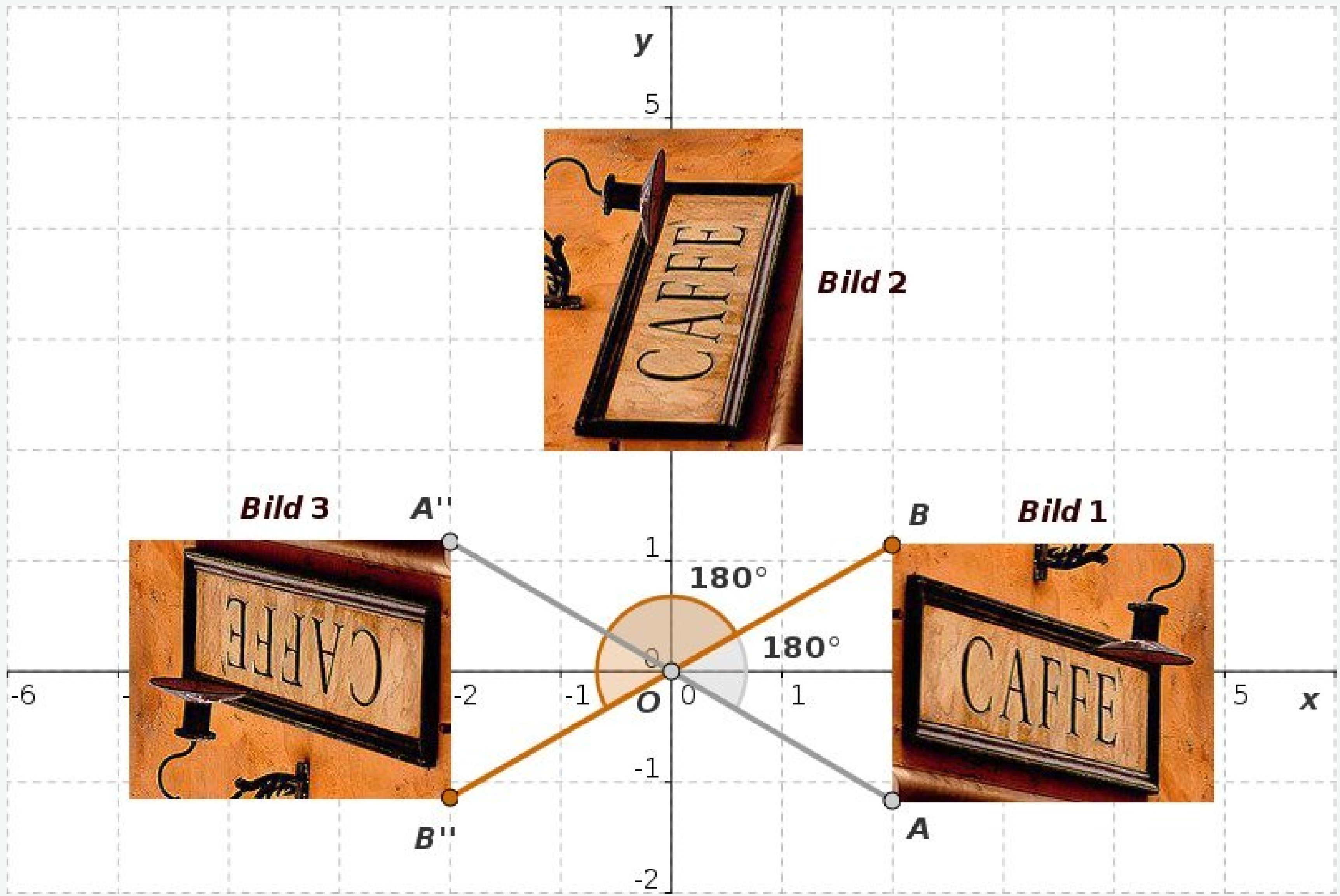
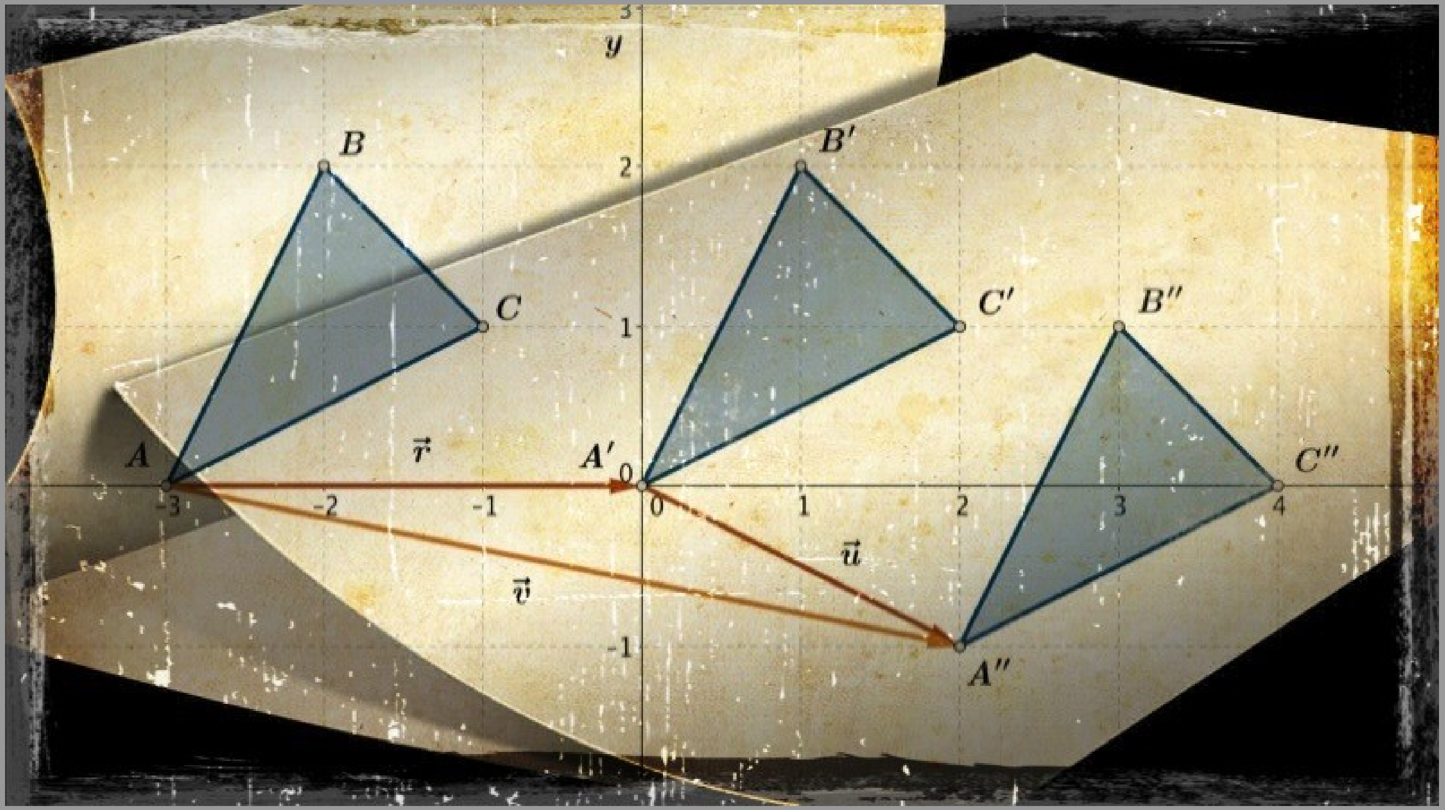


Abb. 3-3

Das dritte Bild entsteht aus dem ersten Bild durch die Drehung um 180º.

$$\sphericalangle AOA'' = \sphericalangle BOB'' = 180^{\circ}$$



Transformation eines Dreiecks

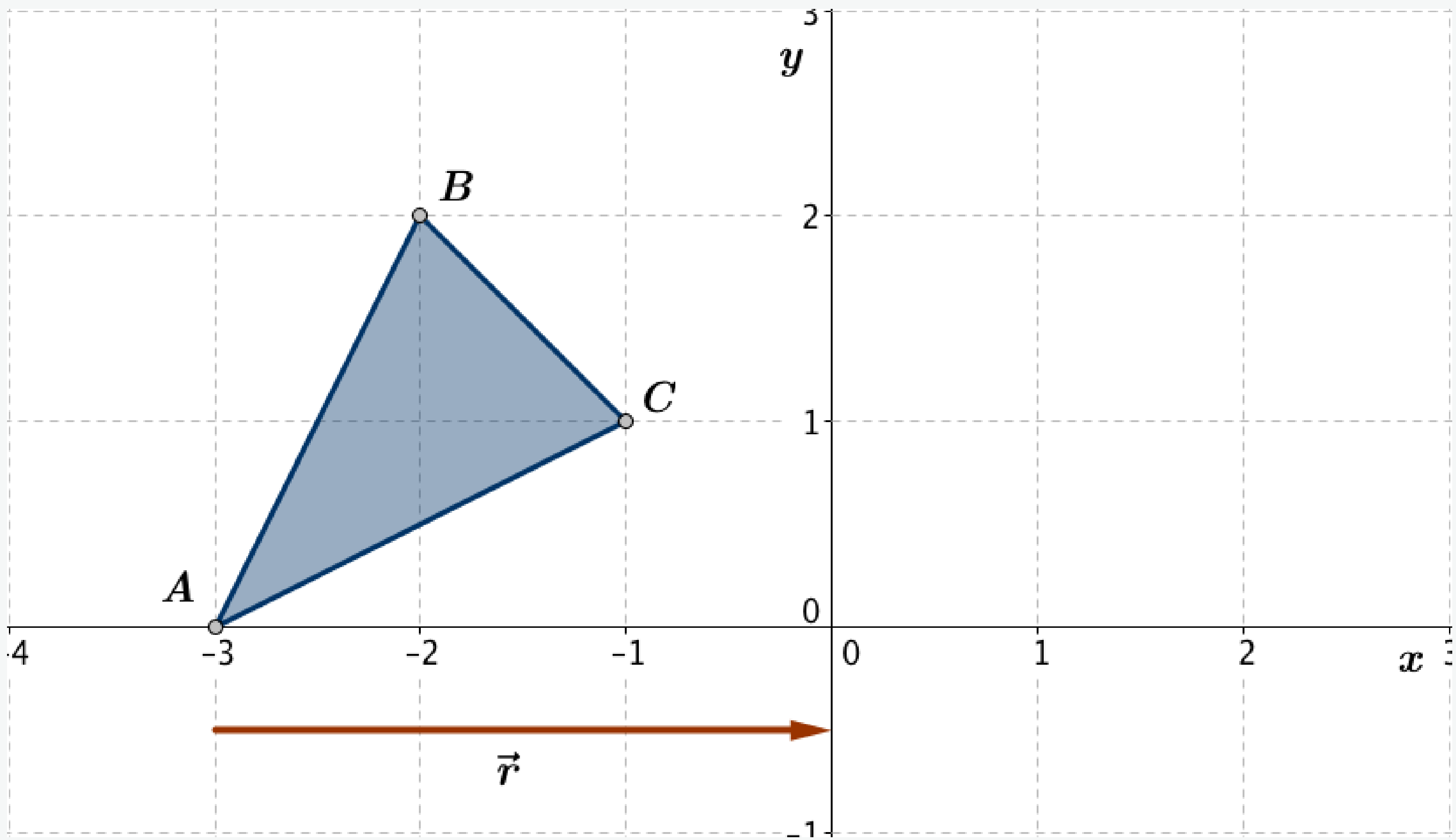


Abb. 4-1: Das Dreieck ABC und der Vektor ***r***

$$A = (-3, 0), \quad B = (-2, 2), \quad C = (-1, 1), \quad \vec{r} = (3, 0)$$

Im Folgenden wird die Translation des Dreiecks *ABC* um den Vektor ***r*** beschrieben.

Wir fassen die x-Koordinaten von Punkten A, B und C zu einem Zeilenvektor

$$\vec{v}_1 = (-3, \, -2, \, -1)$$

und die y-Koordinaten zu einem anderen Zeilenvektor zusammen

$$\vec{v}_2 = (0, \; 2, \; 1)$$

Durch die beiden Zeilenvektoren bilden wir ein Schema, so dass die erste Spalte den Koordinaten des Punktes A, die zweite den Koordinaten des Punktes B und die dritte den Koordinaten des Punktes C entspricht:

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A & B & C \end{array} \end{array}$$

Dieses Schema nennt man eine Matrix. Die Translation der drei Punkte um den Vektor $\boldsymbol{r}$ kann man dann durch die folgende Matrix beschreiben:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

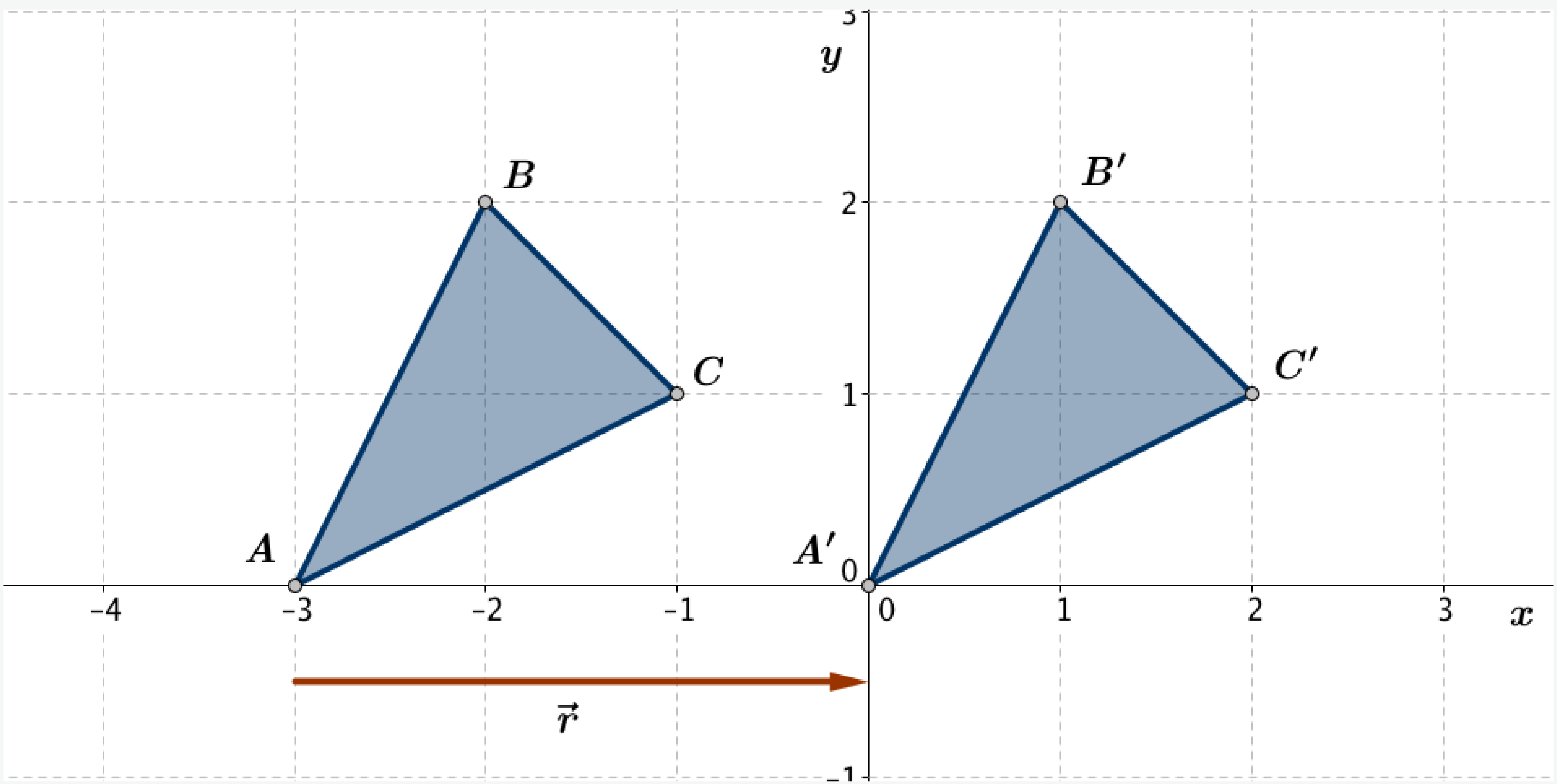


*Abb. 4-2: Die Änderung der Position des Dreiecks wird durch Translation um den Vektor **r** beschrieben*

Die Punkte der Matrix M gehen bei der Translation in die der Matrix M' über

$$ABC \overset{\overbrace{}^{\vec{r}}}{\rightarrow} A'B'C', \qquad M \overset{\overbrace{}^{\vec{r}}}{\rightarrow} M' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A' & B' & C' \end{array} \end{array}$$

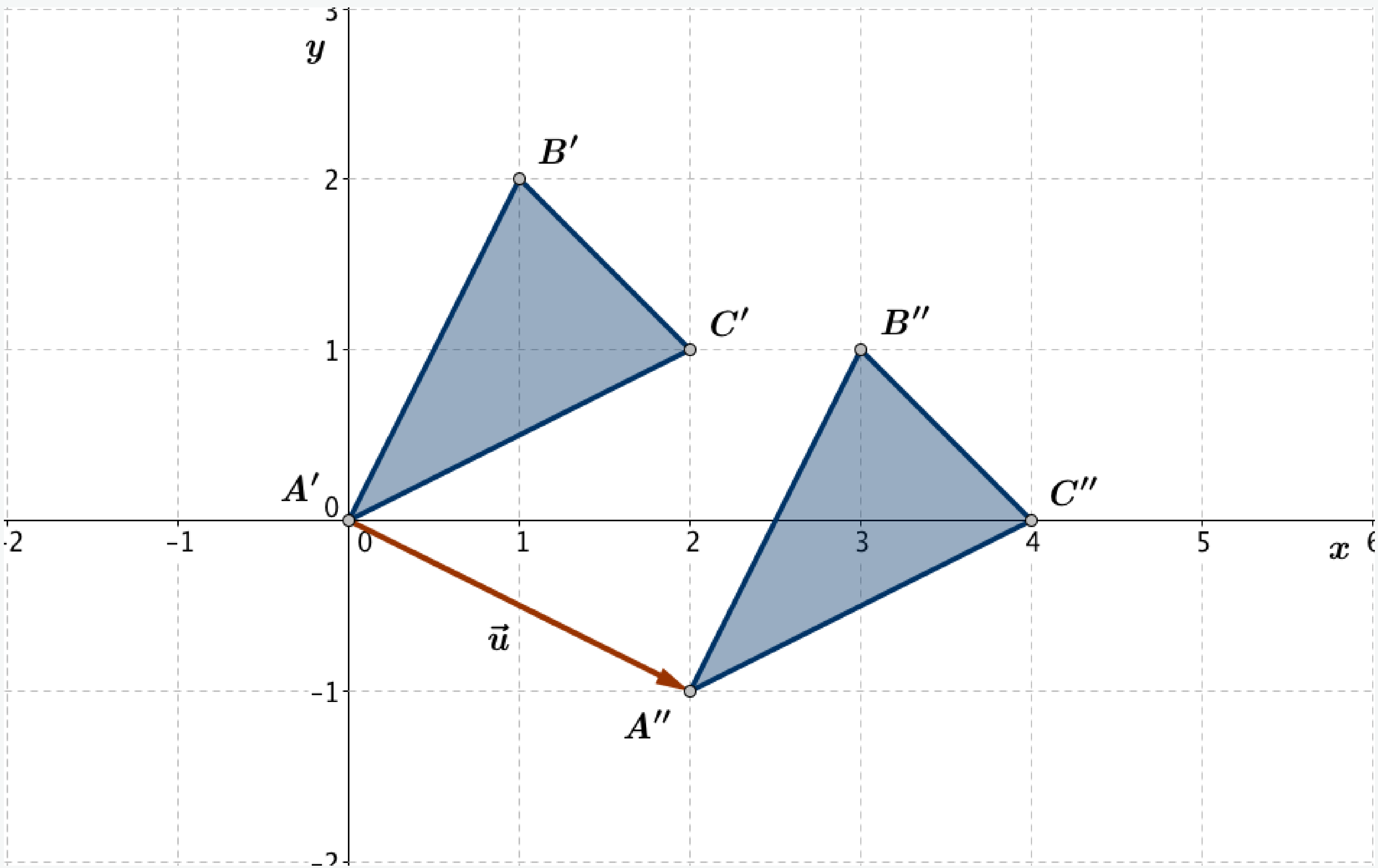


Abb. 4-3: Die Änderung der Position des Dreiecks A'B'C' wird durch die Translation um den Vektor ***u*** *beschrieben*

$$\vec{u} = (2, -1), \qquad A'B'C' \overset{\vec{u}}{\longrightarrow} A''B''C''$$

$$M' \overset{\overbrace{\vec{u}}}{\to} M'' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{r} + \vec{u} = (3,\ 0) + (2,\ -1) = (5, -1)$$

Man kann zeigen, dass die beiden Translationen um den Vektor ***r*** und den Vektor ***u*** durch eine Translation um den Vektor ***v*** beschrieben können

$$M \overset{\overbrace{\vec{r}}}{\to} M' \overset{\overbrace{\vec{u}}}{\to} M'' \quad \Leftrightarrow \quad M \overset{\overbrace{\vec{v}}}{\to} M'' \quad (T_3)$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

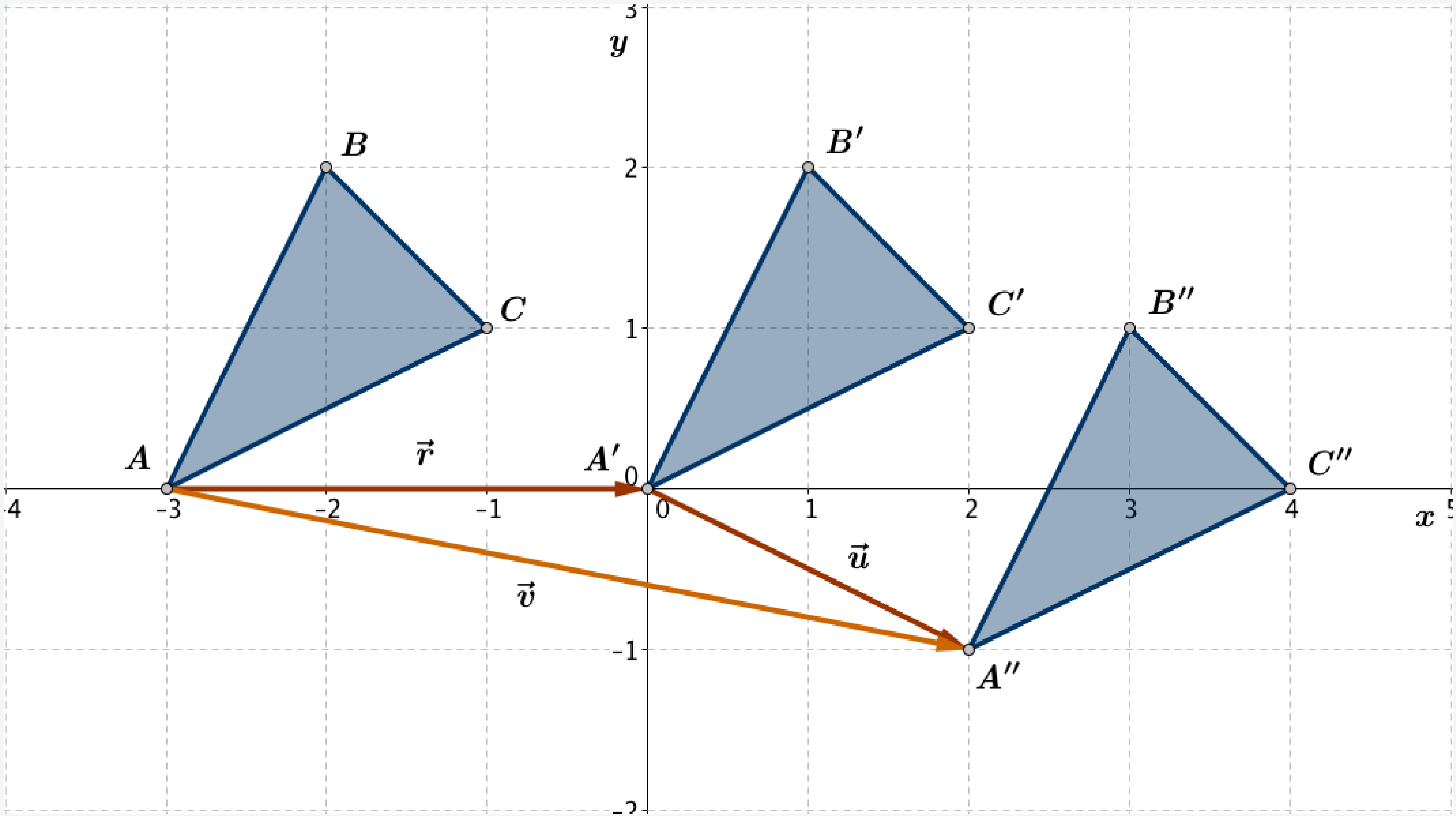


Abb. 4-3: Die Änderung der Position des Dreiecks ABC wird durch die Translation um den Vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}$ *beschrieben*

$$\vec{v} = (5, \, -1), \qquad ABC \overset{\vec{v}}{\overbrace{\rightarrow}} A''B''C''$$

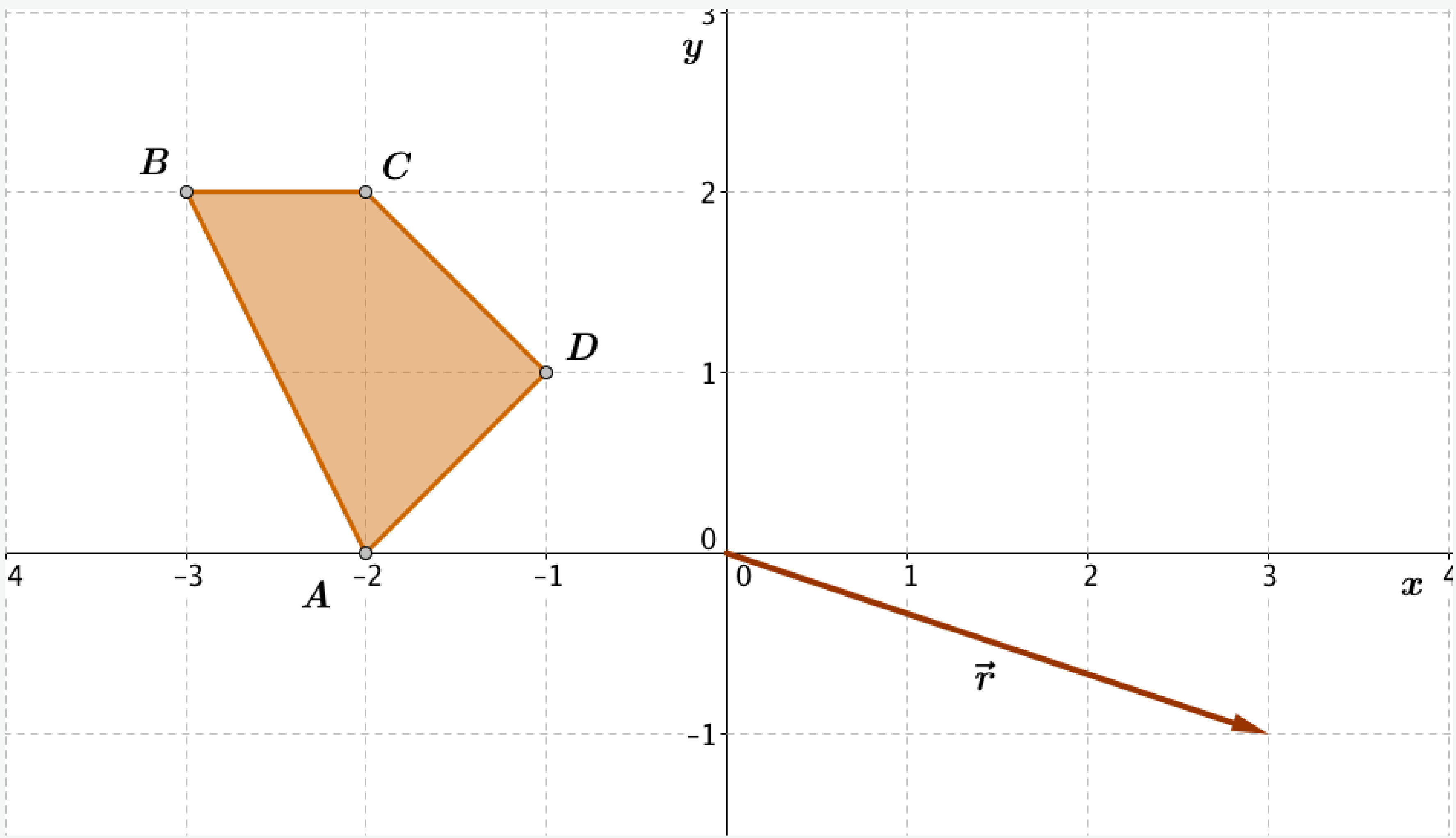


Abb. 5-1: Das Viereck ABCD und der Translationsvektor ***r***

Beschreiben Sie die Translation des Vierecks *ABCD* um den Vektor ***r***.