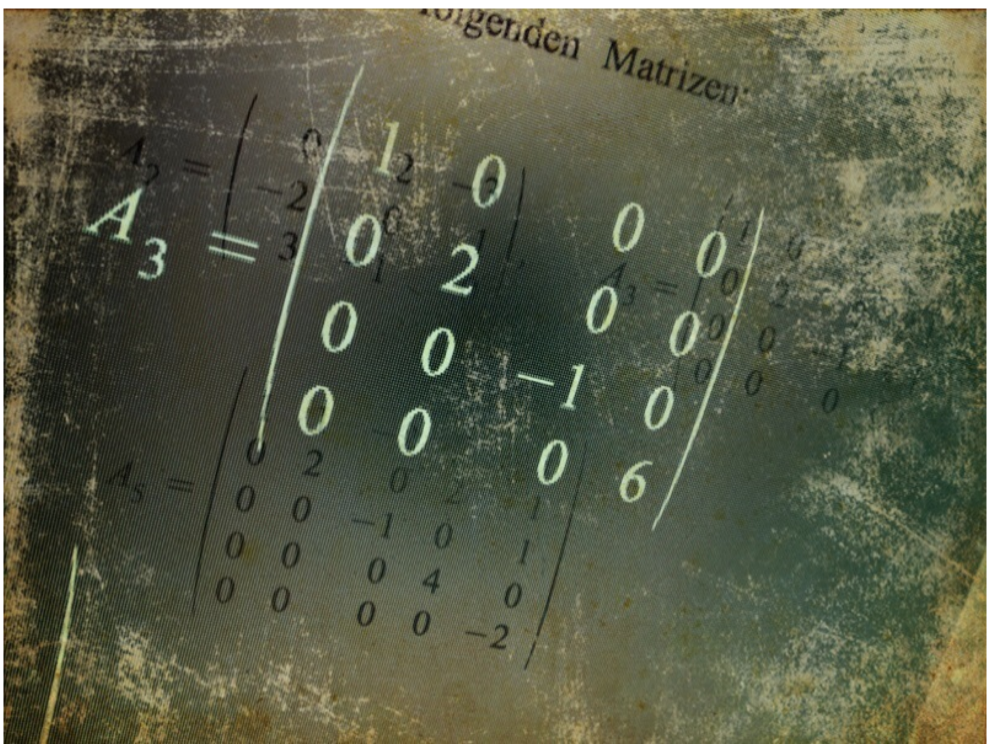
Matrizen und Determinanten, Aufgaben



Inhaltsverzeichnis

1. Multiplikation von Matrizen

A1 Bestimmen Sie die Dimensionen folgender Matrizenprodukte. d.h. die Zahl der Zeilen und Spalten. Die Schreibweise $A_{(i,k)}$kennzeichnet, dass die Matrix A i Zeilen und k Spalten hat.

$a)\ A_{(3,2)} \cdot B_{(2,5)}, \quad b)\ A_{(4,4)} \cdot B_{(3,4)}, \quad c)\ A_{(2,9)} \cdot B_{(9,2)}, \quad d)\ A_{(7,1)} \cdot B_{(3,3)},$

$e)\ A_{(3,4)} \cdot B_{(4,1)} \cdot C_{(1,2)}, \quad f)\ A_{(5,5)} \cdot B_{(5,3)} \cdot C_{(2,3)}, \quad g)\ A_{(8,6)} \cdot B_{(6,6)} \cdot C_{(6,1)},$

$h)\ A_{(1,5)} \cdot B_{(5,3)} \cdot C_{(3,7)} \cdot D_{(7,2)}, \quad i)\ \left(A_{(3,2)} \cdot B_{(2,4)}\right)^T \cdot C_{(3,9)}, \quad j)\ A_{(2,3)} \cdot \left(B_{(7,1)} \cdot C_{(7,2)}\right)^T.$

A2 Die Matrizen A, B, C, D und G sind gegeben:

$$A = (1,\ 2), \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & a \\ -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -a & -a & 11 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, welche Matrizenprodukte

$AB, \quad A^TB, \quad BA, \quad BB^T, \quad C^TD, \quad CD^T, \quad D^TA, \quad D^TG, \quad DD^T, \quad DG^T, \quad GG^T, \quad G^TG.$

existieren und bestimmen Sie die Dimensionen der entsprechenden Matrizenprodukte.

Beispiel:

Das Produkt zweier Matrizen M_1 und M_2 ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten der Matrix M_1 gleich der Anzahl der Zeilen der Matrix M_2 ist. Das Produkt AD existiert, weil die Matrix A zwei Spalten und die Matrix D zwei Zeilen hat. Die Produktmatrix hat Dimensionen $(1,4)$. Das Produkt AD^T existiert nicht, weil die Matrix D^T vier Zeilen hat.

$AD = A_{(1,2)} \cdot D_{(2,4)} = M_{(1,4)}, \qquad AD^T = A_{(1,2)} \cdot (D_{(2,4)})^T = A_{(1,2)} \cdot (D^T)_{(4,2)}$ – ist nicht definiert.

A3 Die Matrizen A, B, C und D sind gegeben:

$$A = (1,\ 2), \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, welche der Matrixprodukte

$AA^T, \quad AB, \quad A^TB, \quad B^TA, \quad BB^T, \quad B^TB, \quad C^TD, \quad CD^T, \quad D^TA, \quad DD^T, \quad D^TD.$

existieren und bestimmen Sie diese Produkte.

A4 Bestimmen Sie die Unbekannten a, b, c und d so, dass alle Matrizenterme definiert sind.

$a)\ A_{(2,3)} \cdot B_{(a,4)}, \quad b)\ A_{(5,4)} \cdot B_{(a,b)} + C_{(5,4)}, \quad c)\ A_{(7,a)} \cdot B_{(b,c)} + C_{(7,6)},$

$d)\ A_{(12,a)} \cdot B_{(3,b)} + C_{(12,6)} \cdot D_{(c,11)}, \quad e)\ A_{(a,b)} \cdot B_{(5,c)} + C_{(7,2)} \cdot D_{(d,8)}.$

A5 Prüfen Sie, ob das Produkt der Matrizen A und B kommutativ ist

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -2 \end{pmatrix},$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A6 A und B sind beliebige n-reihigen Matrizen. Unter welcher Bedingung ist die Matrizengleichung $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$, analog zu der bekannten binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, erfüllt?

A7 A und B sind n-reihige Diagonalmatrizen: $A = diag\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $B = diag\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Berechnen Sie $A + B$, cA $(c \in \mathbb{R})$ und AB.

A8 Bestimmen Sie $(B\,(2A + B))\vec{X}$, wenn für alle x gilt:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Bedenken Sie dabei, dass die Multiplikation von Matrizen assoziativ ist, das heißt $(M \cdot N) \cdot K = M \cdot (N \cdot K)$.

A9 Bestimmen Sie:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^3, \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^5, \qquad c)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n.$$

A10 Bestimmen Sie die n-te Potenz der Rotationsmatrix R:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

A11 Eine *Bandmatrix* ist eine Matrix, bei der neben der Hauptdiagonalen nur eine bestimmte Anzahl der Nebendiagonalenelemente ungleich null sind. Die Matrizen A und B sind Bandmatrizen. Nur die Elemente der Hauptdiagonale und der ersten Diagonale darüber sind 1. Bestimmen Sie die angegebenen Potenzen der Bandmatrizen A und B. Sie können dafür Computerhilfsmittel benutzen. Was können Sie über eine Potenzmatrix sagen?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = ? \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^5 = ?$$

1.1. Lösungen

L1

$$a)\ A_{(3,2)} \cdot B_{(2,5)} = (M_a)_{(3,5)}, \qquad c)\ A_{(2,9)} \cdot B_{(9,2)} = (M_b)_{(2,2)}, \qquad e)\ A_{(3,4)} \cdot B_{(4,1)} \cdot C_{(1,2)} = (M_c)_{(3,2)},$$

$$g)\ A_{(8,6)} \cdot B_{(6,6)} \cdot C_{(6,1)} = (M_d)_{(8,1)}, \qquad h)\ A_{(1,5)} \cdot B_{(5,3)} \cdot C_{(3,7)} \cdot D_{(7,2)} = (M_e)_{(1,2)},$$

$$i)\ \left(A_{(3,2)} \cdot B_{(2,4)}\right)^T \cdot C_{(3,9)} = \left((A \cdot B)^T\right)_{(4,3)} \cdot C_{(3,9)} = (M_f)_{(4,9)}.$$

Nicht definiert sind folgende Matrizenprodukte:

$$b)\ A_{(4,4)} \cdot B_{(3,4)}, \qquad d)\ A_{(7,1)} \cdot B_{(3,3)}, \qquad f)\ A_{(5,5)} \cdot B_{(5,3)} \cdot C_{(2,3)}, \qquad j)\ A_{(2,3)} \cdot \left(B_{(7,1)} \cdot C_{(7,2)}\right)^T.$$

L2 Die A, B, C, D und G haben folgende Dimensionen

$$A = A_{(1,2)}, \quad B = B_{(2,1)}, \quad C = C_{(3,3)}, \quad D = D_{(2,4)}, \quad G = G_{(3,4)},$$

ihre transponierten Matrizen haben die Dimensionen

$$A^T = (A^T)_{(2,1)}, \quad B^T = (B^T)_{(1,2)}, \quad C^T = (C^T)_{(3,3)}, \quad D^T = (D^T)_{(4,2)}, \quad G^T = (G^T)_{(4,3)}.$$

$$AB = A_{(1,2)} \cdot B_{(2,1)} = (M_a)_{(1,1)}, \qquad BA = B_{(2,1)} \cdot A_{(1,2)} = (M_b)_{(2,2)},$$
$$BB^T = B_{(2,1)} \cdot (B^T)_{(1,2)} = (M_c)_{(2,2)}, \qquad DD^T = D_{(2,4)} \cdot (D^T)_{(4,2)} = (M_d)_{(2,2)},$$
$$DG^T = D_{(2,4)} \cdot (G^T)_{(4,3)} = (M_e)_{(2,3)}, \qquad GG^T = G_{(3,4)} \cdot (G^T)_{(4,3)} = (M_f)_{(3,3)},$$
$$G^TG = (G^T)_{(4,3)} \cdot G_{(3,4)} = (M_g)_{(4,4)}.$$

$(M_a)_{(1,1)}$ ist ein Skalar, die Matrizen M_b, M_c, M_d, M_f und M_g sind quadratische Matrizen.
Nicht definiert sind folgende Matrizenprodukte:

$$A^TB = (A^T)_{(2,1)} \cdot B_{(2,1)}, \qquad C^TD = (C^T)_{(3,3)} \cdot D_{(2,4)}, \qquad CD^T = C_{(3,3)} \cdot (D^T)_{(4,2)},$$
$$D^TA = (D^T)_{(4,2)} \cdot A_{(1,2)}, \qquad D^TG = (D^T)_{(4,2)} \cdot G_{(3,4)}.$$

L3 Die A, B, C und D haben folgende Dimensionen

$$A = A_{(1,2)}, \quad B = B_{(2,1)}, \quad C = C_{(2,2)}, \quad D = D_{(2,3)},$$

ihre transponierten Matrizen haben die Dimensionen

$$A^T = (A^T)_{(2,1)}, \quad B^T = (B^T)_{(1,2)}, \quad C^T = (C^T)_{(2,2)}, \quad D^T = (D^T)_{(3,2)}.$$

$$AA^T = A_{(1,2)} \cdot (A^T)_{(2,1)} = (M_a)_{(1,1)}, \qquad AB = A_{(1,2)} \cdot B_{(2,1)} = (M_b)_{(1,1)},$$
$$BB^T = B_{(2,1)}(B^T)_{(1,2)} = (M_c)_{(2,2)}, \qquad B^TB = (B^T)_{(1,2)} \cdot B_{(2,1)} = (M_d)_{(1,1)},$$
$$C^TD = (C^T)_{(2,2)} \cdot D_{(2,3)} = (M_e)_{(2,3)}, \qquad DD^T = D_{(2,3)} \cdot (D^T)_{(3,2)} = (M_g)_{(2,2)},$$
$$D^TD = (D^T)_{(3,2)} \cdot D_{(2,3)} = (M_g)_{(3,3)}.$$

Nicht definiert sind folgende Matrizenprodukte:

$$A^T B = (A^T)_{(2,1)} \cdot B_{(2,1)}, \qquad B^T A = (B^T)_{(1,2)} \cdot A_{(1,2)}, \qquad D^T A = (D^T)_{(3,2)} \cdot A_{(1,2)},$$
$$CD^T = C_{(2,2)} \cdot (D^T)_{(3,2)}.$$

$$AA^T = 5, \quad AB = 5, \quad BB^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B^T B = 10, \quad C^T D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$DD^T = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad D^T D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -7 \\ 2 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

L4

$$a)\ A_{(2,3)} \cdot B_{(a,4)} = M_{(2,4)}, \quad a = 3, \qquad b)\ A_{(5,4)} \cdot B_{(a,b)} + C_{(5,4)} = M_{(5,4)}, \quad a = 4, \quad b = 4,$$
$$c)\ A_{(7,a)} \cdot B_{(b,c)} + C_{(7,6)} = M_{(7,6)}, \quad a = b, \quad a, b \in \mathbb{N}, \quad a, b > 0, \quad c = 6,$$
$$d)\ A_{(12,a)} \cdot B_{(3,b)} + C_{(12,6)} \cdot D_{(c,11)} = M_{(12,11)}, \quad a = 3, \quad b = 11, \quad c = 6,$$
$$e)\ A_{(a,b)} \cdot B_{(5,c)} + C_{(7,2)} \cdot D_{(d,8)} = M_{(7,8)}, \quad a = 7, \quad b = 5, \quad c = 8, \quad d = 2.$$

L5 Das Produkt der angegebenen Matrizen A und B ist nicht kommutativ:

$$a)\ AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB \neq BA,$$
$$b)\ AB = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -30 & -2 \end{pmatrix}, \quad AB \neq BA,$$
$$c)\ AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB \neq BA.$$

L6 Das Matrixprodukt $(A - B)(A + B)$ ist nur dann gleich $A^2 - B^2$ wie für die reellen Zahlen, wenn das Produkt der Matrizen A und B kommutativ ist, also $AB = BA$:

$$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2.$$

L7

$$A + B = diag\,(a_1 + b_1,\, a_2 + b_2,\, \ldots,\, a_n + b_n), \qquad cA = diag\,(ca_1,\, ca_2,\, \ldots,\, ca_n),$$
$$A \cdot B = diag\,(a_1 b_1,\, a_2 b_2,\, \ldots,\, a_n b_n).$$

L8 Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ, das heißt $(M \cdot N) \cdot K = M \cdot (N \cdot K)$:

$$(B\,(2A + B))\vec{X} = B\,((2A + B)\vec{X}) = B\,(2A \cdot \vec{X} + B \cdot \vec{X}) \equiv B\vec{Y}, \qquad Y = 2A \cdot \vec{X} + B \cdot \vec{X},$$

$$Y = 2A\vec{X} + B\vec{X} = 2\begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_2 - x_3) + x_2 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 2(x_1 + x_3) + x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$B\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ 2y_3 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_3 \\ 2(3x_1 + 2x_3) \\ 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_3 \\ 6x_1 + 4x_3 \\ 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

L9

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 31 \\ 0 & 32 \end{pmatrix},$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für gerade } n, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ für ungerade } n.$$

L10

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad R^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{pmatrix}, \qquad R^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix R beschreibt eine Drehung um den Winkel φ. Die Matrix R^2 beschreibt zwei nacheinanderfolgende Drehungen um den gleichen Winkel φ, also eine Drehung um den Winkel 2φ. Die Matrix R^n beschreibt eine Drehung um den Winkel $n\varphi$.

L11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In den Zeilen und in den Spalten dieser Matrizen stehen Binomialkoeffizienten:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

2. Determinanten

A1 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A2 Prüfen Sie am Beispiel der Matrizen A und B die Determinanteneigenschaft

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A3 Bei welchen Werten des Parameters a ist die Matrix M singulär/regulär?

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & a \end{pmatrix}, \quad b)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad c)\ M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3a & -1 \\ 0 & 3 & -a \end{pmatrix}.$$

A4 Prüfen Sie mit Hilfe einer Determinante, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig oder unabhängig sind.

$$a)\ \vec{a} = (1,4,6), \quad \vec{b} = (1,-1,1), \quad \vec{c} = (1,1,3),$$
$$b)\ \vec{a} = (2,-3,1), \quad \vec{b} = (3,-1,5), \quad \vec{c} = (1,-4,3),$$
$$c)\ \vec{a} = (5,4,3), \quad \vec{b} = (3,3,2), \quad \vec{c} = (8,1,3),$$
$$d)\ \vec{a} = (2,0,2), \quad \vec{b} = (1,-1,0), \quad \vec{c} = (0,-1,-2).$$

2.1. Lösungen

L1

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 63, \quad \det B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14, \quad \det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

L2 Am Beispiel dert Matrizen A und B wird die Determinanteneigenschaft $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$ geprüft.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det A = 7, \quad \det B = -2, \quad \det(A \cdot B) = -14,$

$$b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -2 \\ -7 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$\det A = 18, \quad \det B = 3, \quad \det(A \cdot B) = 54.$

L3 *a*) Die Matrix M ist singulär für $a = 9$ und regulär für $a \neq 9$. *b*) Die Matrix M ist singulär für $a = 2$ und regulär für $a \neq 2$. *c*) Die Matrix M ist singulär für $a = \pm 1$ ($\det M = 6\,(a^2 - 1)$) und regulär für $a \neq \pm 1$.

L4 Drei 3-dimensionale Vektoren sind linear unabhängig, wenn das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ nicht gleich null ist. *a*) Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 35$ – linear unabhängig,

c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ – linear abhängig,

d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 2$ – linear unabhängig.

3. Inverse Matrix

A1 Invertieren Sie, falls möglich, folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

A2 Kann die Matrix N die Inverse der Matrix M sein? Falls ja, geben Sie bitte die Werte der Parametern m und n an:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{pmatrix}.$$

A3 Kann die Matrix A eine Inverse besitzen?

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad c)\ A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

A4 Welche Matrix ist die Inverse der Matrix M?

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}: \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$b)\ M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}: \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$c)\ M = \begin{pmatrix} -15 & 7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}:$$

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1.4 \\ -1 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -0.4 & 1.4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0.4 & -1.4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

A5 Kann die Matrix N die Inverse der Matrix M sein? Falls ja, geben Sie bitte die Werte der Parametern m und n an:

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & n \end{pmatrix}, \qquad b)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = m\begin{pmatrix} -3 & n \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

A6 Gegeben sind die Matrizen A, B, C und die Produktmatrizen $(AB)^2$, CC^T und BC. Welche Matrizen sind invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A7 Für welche reellen Werte von a sind die Matrizen M_1 und M_2
a) symmetrisch, b) antisymmetrisch, c) invertierbar, d) singulär?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & a \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

A8 Für welche Werte des Parameters a ist die Matrix M invertierbar?

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

3.1. Lösungen

L1 Die Matrizen A und B sind nicht invertierbar, da ihre Determinanten null sind. Die Matrix C hat eine Inverse:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \det C = -4, \quad C =^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L2 Die Matrix N kann nicht die Inverse der Matrix M sein, da ihre Diagonalelemente null sind, während die Diagonalelemente von M nicht null sind. Sie können das auch durch die Matrizengleichung prüfen. Ergibt sich als Produkt von M und N die Einheitsmatrix, so ist N die Inverse von M.

L3 *a*) Nein. Die Matrix A ist eine singuläre Matrix, ihre Determinante ist null. *b*) Nein. Die Matrix A ist keine quadratische Matrix und ist somit nicht invertierbar. *c*) Ja. Die Matrix A ist eine reguläre Matrix (ihre Determinante ist nicht null), sie hat eine Inverse.

L4 Die Inverse einer 2-reihigen Matrix A wird auf folgende Weise bestimmt: Diagonalelemente werden vertauscht, die Elemente der Nebendiagonale werden mit -1 multipliziert. Die Matrix wird durch $\det A$ dividiert.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}: \qquad M^{-1} = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$b)\ M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}: \qquad M^{-1} = B = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$c)\ M = \begin{pmatrix} -15 & 7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}: \qquad M^{-1} = A = D = \begin{pmatrix} 0.4 & -1.4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

L5 *a*) Nein, die Matrix N kann nicht die Inverse der Matrix M sein, da müsste z.B. $m = 0$ sein. Dann hätte N eine Nullzeile und die Determinante wäre null. Man sieht auch, dass das Produkt von M und N nicht die Einheitsmatrix sein kann:

$$MN = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5m+1 & n \\ 6m & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Ja, die Matrix N ist bei $m = 1/6$ und $n = 2$ die Inverse der Matrix M:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = N: \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} -3 & n \\ 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$m = \frac{1}{6}, \quad n = 2.$$

L6 Die Matrix A ist nicht invertierbar, da $\det A = 0$. Die Matrix B ist invertierbar, da $\det B = 4$. Da C keine quadratische Matrix ist, ist sie nicht invertierbar. Die Matrix $(AB)^2$ ist nicht invertierbar:

$$\det(MN) = \det M \cdot \det N,$$

$$\det\left((AB)^2\right) = \det\left((AB)\cdot(AB)\right) = \det(A)\det(B)\det(A)\det(B) = 0 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0.$$

Die Matrix CC^T ist invertierbar:

$$CC^T = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}, \quad \det\left(CC^T\right) = 91.$$

Die Matrix BC ist nicht invertierbar, da sie keine quadratische Matrix ist: $BC = B_{2,2} \cdot C_{2,3} = M_{2,3}$.

L7 Die Matrix M_1 ist für $a = 3$ symmetrisch. Für keinen Wert von a kann sie antisymmetrisch sein. M_1 ist invertierbar für $a \neq 10/3$, und sie ist singulär für $a = 10/3$.

Die Matrix M_2 ist für $a = 9$ symmetrisch und für $a = -9$ antisymmetrisch. Sie ist für $a \neq 0$ invertierbar und für $a = 0$ singulär.

L8 Die Matrix M ist invertierbar für alle Werte des Parameters a außer $0, \pm 1$:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \det M = a^3 - a = a\,(a^2 - 1),$$

$$\det M = 0 : \quad a\,(a^2 - 1) = 0, \quad a = 0, \pm 1.$$

4. Matrizengleichungen

A1 Die Matrizen A und B sind gegeben. Gesucht ist eine Matrix X, die die Gleichung $AX = B$ erfüllt. *a*) Welche Dimension muss X haben? *b*) Bestimmen Sie die Matrix X.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

A2 Die Matrizen A und B seien invertierbar und ihr Produkt sei kommutativ. Zeigen Sie, dass die vier Gleichungen äquivalent sind:

$$AB = BA, \qquad BA^{-1} = A^{-1}B, \qquad AB^{-1} = B^{-1}A, \qquad A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

A3 Nehmen Sie an, alle Matrizenmultiplikationen der folgenden Gleichungen seien ausführbar. Lösen Sie die Matrizengleichungen nach X auf. Unter welchen Voraussetzungen ist das möglich?

$$a)\ AX - CB = F + CD + X, \qquad b)\ XA - 7B = 3X - XC + DA,$$

$$c)\ (AX^T)^T - XB - 9X = E.$$

4.1. Lösungen

L1 Die Matrix X ist eine quadratische 2-reihige Matrix:

$$A_{(3,2)} \cdot X_{(m,n)} = B_{(3,2)}, \qquad m = 2, \quad n = 2, \qquad X = X_{(2,2)}.$$

Um die Elemente der Matrix X zu bestimmen, wird die Matrizengleichung aufgestellt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ 2c & 2d \\ -3a+c & -3b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizengleichung entspricht einem linearen Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 4 Unbekannten. Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt: $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 3$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

L2 Als Beispiel zeigen wir, dass die Gleichungen $AB = BA$ und $BA^{-1} = A^{-1}B$ äquivalent sind:

$$\begin{aligned} AB &= BA && (\,\cdot A^{-1} \text{ von links}) \\ B &= A^{-1}BA && (\,\cdot A^{-1} \text{ von rechts}) \\ BA^{-1} &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

L3

a) $AX - CB = F + CD + X, \qquad AX - X = F + CD + CB, \qquad AX - EX = F + CD + CB,$
$(A - E)X = F + C(D + B), \qquad X = (A - E)^{-1}(F + C(D + B)),$

b) $XA - 7B = 3X - XC + DA, \qquad XA - 3X + XC = DA + 7B, \qquad 3X = X \cdot 3 = XE \cdot 3 = X \cdot 3E,$
$X\,(A - 3E + C) = DA + 7B, \qquad X = (DA + 7B)\,(A - 3E + C)^{-1},$

c) $(AX^T)^T - XB - 9X = E, \qquad (X^T)^T A^T - XB - 9X = E, \qquad XA^T - XB - X \cdot 9E = E,$
$X\,(A^T - B - 9E) = E, \qquad X = E\,(A^T - B - 9E)^{-1} = (A^T - B - 9E)^{-1}.$

Gleichung *a*) hat dann eine Lösung, wenn Matrix $A - E$ eine Inverse besitzt, Gleichung *b*) hat dann eine Lösung, wenn Matrix $A - 3E + C$ eine Inverse besitzt, Gleichung *c*) hat dann eine Lösung, wenn Matrix $A^T - B - 9E$ eine Inverse besitzt.

Bemerkung 1: Um X in $AX - X$, $XA - 3X$ und $XB + 9X$ auszuklammern, schreiben Sie die Matrix X als Produkt von X mit einer Einheitsmatrix:

$$X = EX = XE.$$

Bemerkung 2: In der Lösung der Gleichung *c*) haben wir folgende Eigenschaft transponierter Matrizen benutzt: $(AB)^T = B^T A^T$.

5. Lineare Gleichungssysteme

A1 Bestimmen Sie alle Lösungen folgender linearen Gleichungssysteme für $a \in \mathbb{R}$:

$$a)\ \begin{cases} x + ay - 1 = 0, \\ ax - 3ay - (2a+3) = 0, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x - 2y = \frac{4a}{4-a^2}, \\ 3x - y = \frac{10+7a}{4-a^2}, \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 3x + ay = 5a^2, \\ 3x - ay = a^2. \end{cases}$$

A2 Bestimmen Sie alle Lösungen folgender linearen Gleichungssysteme:

$$a)\ \begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ x + y + z = 2, \\ 3x + 3y + z = 0, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 3x + y + z = 6, \\ 2x + y + 2z = 6. \end{cases}$$

A3 Bestimmen Sie alle Lösungen folgender linearen Gleichungssysteme:

$$a)\ \begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3x - 4y + 5z = 18, \\ 2x + 4y - 3z = 26, \\ x - 6y + 8z = 0, \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 10x - 9z = 19, \\ 8x - y = 10, \\ y - 12z = 10, \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x + 3y - z = 9, \\ x - 2y + z = 3, \\ x + 2z = 2. \end{cases}$$

A4 Bestimmen Sie alle Lösungen folgender linearen Gleichungssysteme:

$$a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 8, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3, \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

A5 Schreiben Sie folgendes lineares Gleichungssystem in Matrizenform $A\vec{X} = \vec{C}$ und bestimmen Sie die Unbekannten x, y und z mit Hilfe der inversen Matrix A^{-1}:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 7 = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

A6 Für welche Werte des reellen Parameters a hat das Gleichungssystem keine Lösung?

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a+6)\,y = a + 3. \end{cases}$$

A7 Bestimmen Sie die Lösungen folgender linearen Gleichungssysteme ($x, y, z \in \mathbb{C}$):

$a)\ \begin{cases} 3x - y = 3 - 7i, \\ 2x + 3y = 13 + 10i, \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} 3x + 2y - iz = 2 + i, \\ 2x - 4y + iz = -8 + 2i, \\ 6x + 3y - 2iz = 6 + i, \end{cases}$ $\quad c)\ \begin{cases} 2x + 4y + 3z = 9, \\ 3x + 4z = 7 - i, \\ 2x - 2y = -6i. \end{cases}$

A8 Bestimmen Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$, deren Graph durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 verläuft:

a) $P_1 = (-2,\ -4)$, $\quad P_2 = (-1,\ 1)$, $\quad P_3 = (1,\ 5)$; $\qquad$ *b)* $P_1 = (0.5,\ 1)$, $\quad P_2 = (1,\ 1)$, $\quad P_3 = (3,\ 5)$.

5.1. Lösungen

L1

$$a)\ \begin{cases} G_1: & x + ay = 1, \\ G_2: & ax - 3ay = 2a + 3, \end{cases}$$

$$3G_1 + G_2: \quad (3+a)x = 2a + 6, \quad x = \frac{2a+6}{3+a} = 2, \quad a \neq -3,$$

$$G_1: \quad ay = 1 - x = -1, \quad y = -\frac{1}{a}, \quad a \neq 0; \qquad (x, y) = \left(2, -\frac{1}{a}\right), \quad a \neq -3, 0,$$

$$b)\ (x, y) = \left(\frac{2}{a-2}, \frac{1}{2+a}\right), \quad a \neq -2, 2, \qquad c)\ (x, y) = (a^2, 2a), \quad a \neq 0.$$

L2

$$a)\ \begin{cases} G_1: & x + 2y + 3z = 2, \\ G_2: & x + y + z = 2, \\ G_3: & 3x + 3y + z = 0, \end{cases} \qquad x = 5, \quad y = -6, \quad z = 3.$$

Mit folgenden Zeilentransformationen kann die Lösung bestimmt werden: Zuerst wird aus den 2. und 3. Gleichungen x eliminiert: $\tilde{G}_2 = G_2 - G_1$, $\tilde{G}_3 = G_3 - 3G_1$. Dann wird aus der neuen Gleichung $\tilde{G}_3$ die Unbekannte y eliminiert: $\tilde{G}_3 - 3\tilde{G}_2$.

$$b)\ \begin{cases} G_1: & x + 2y + 3z = 8, \\ G_2: & 3x + y + z = 6, \\ G_3: & 2x + y + 2z = 6, \end{cases} \qquad x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1.$$

Mögliche Zeilentransformationen: 1) $-3G_1 + G_2 = \tilde{G}_2$, $-2G_1 + G_3 = \tilde{G}_3$ 2) $3\tilde{G}_2 - 5\tilde{G}_3$.

L3 *a)* $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; *b)* $x = 8$, $y = 4$, $z = 2$; *c)* $x = 1$, $y = -2$, $z = -1$; *d)* $x = 4$, $y = 0$, $z = 1$.

L4 *a)* Das lineare Gleichungssystem hat einzige Lösung: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$.
Möglicher Lösungsweg: 1) $G_2 - 2G_1$, $G_3 - G_1$, $G_4 - 2G_1$, 2) $G_3 + 2G_2$, 3) $G_4 - G_3$.
Dann hat die erweiterte Koeffizientenmatrix der Gleichung die Form:

$$(A\,|\,\vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Das lineare Gleichungssystem hat die einzige Lösung: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen:

$$(A\,|\,\vec{c}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 & | & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & | & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & | & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 & | & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 - t + 7u)/2 \\ (1 + 3t - u)/2 \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

L5

$$\begin{cases} x+2y+z=-7, \\ 2x+y-z=1, \\ 3x-y+2z=2, \end{cases} \qquad A\cdot\vec{x}=\vec{c}: \quad A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}, \quad A^{-1}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-1&5&3\\7&1&-3\\5&-7&3\end{pmatrix},$$

$$\vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{c}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-1&5&3\\7&1&-3\\5&-7&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}, \qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}.$$

L6

$$\begin{cases} ax-4y=a+1, \\ 2x+(a+6)\,y=a+3, \end{cases} \qquad A\cdot\vec{x}=\vec{c}: \quad \begin{pmatrix}a&-4\\2&a+6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1\\a+3\end{pmatrix},$$

$$(A\,|\,\vec{c})=\begin{pmatrix}a&-4&|\;a+1\\2&a+6&|\;a+3\end{pmatrix}.$$

In der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A\,|\,\vec{c})$ wird die erste Zeile als Z_1 bezeichnet: $Z_1=(a,\;-4,\;a+1)$, die zweite Zeile als Z_2, also $Z_2=(2,\;\;a+6,\;\;a+3)$.

$$2Z_1-aZ_2: \qquad \begin{pmatrix}a&-4&|&a+1\\0&-a\,(a+6)-8&|&-a^2-a+2\end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung, wenn das Element $-a\,(a+6)-8$ der erweiterten Matrix null ist und auch das Element $-a^2-a+2$ gleich null ist. Zuerst werden die Wurzeln der Gleichung $-a\,(a+6)-8=0$ bestimmt, und dann wird geprüft, welche Wurzeln die Gleichung $-a^2-a+2=0$ hat.

$$-a\,(a+6)-8=0, \quad a^2+6\,a+8=0, \quad a_1=-4, \quad a_2=-2,$$
$$-a^2-a+2=0, \quad a_1=1, \quad a_2=-2.$$

Man sieht, dass bei $a_2=-2$ beide Gleichungen null sind. Das bedeutet dass die entsprechenden Elemente der Matrix null sind und das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat: $0\cdot y=0$. Bei $a_2=-4$ hat das Gleichungssystem entsprechend der Gleichung $0\cdot y=-10$ keine Lösung.

L7 *a*) $x=2-i$, $y=3+4i$, *b*) $x=i$, $y=2+i$, $z=4$, *c*) $x=1-3i$, $y=1$, $z=1+2i$.

L8 *a*) $y=-x^2+2x+4$, *b*) $y=2x^2-6x+5$.

6. Rang einer Matrix

A1 Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 7 \\ 10 & 12 & 4 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 12 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 13 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 14 & 9 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.1. Lösungen

L1 $Rg(A) = 3$, $Rg(B) = 2$, $Rg(C) = 2$, $Rg(F) = 2$, $Rg(G) = 3$, $Rg(H) = 3$.

7. Tests

7.1. Test 1

A1 Bestimmen Sie die Unbekannten a, b und c so, dass alle Matrizenterme definiert sind.

$$a)\ A_{(3,6)} \cdot B_{(a,b)} + C_{(3,4)}, \qquad d)\ A_{(9,a)} \cdot B_{(3,b)} + C_{(9,6)} \cdot D_{(c,11)}.$$

A2 Bestimmen Sie die 4. Potenz der Matrix A. Gewinnen Sie daraus auch die 6. und 10. Potenz der Matrix A. Geben Sie die allgemeine Formel für A^{2n} an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -3i & -1 \end{pmatrix}.$$

A3 $a)$ Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig/unabhängig sind?

$$\vec{a} = (1,1,1), \quad \vec{b} = (0,1,1), \quad \vec{c} = (0,0,1).$$

$b)$ Bei welchen Werten des Parameters a sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar?

$$\vec{a} = (-1,-1,2), \quad \vec{b} = (0,1,a), \quad \vec{c} = (1,0,a).$$

A4 Berechnen Sie die Determinante der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A5 Welche Matrix ist die Inverse der Matrix M:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \qquad D = -\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

A6 Gegeben sind die Matrizen A, B, C. Welche der Matrizen A, B, C und der Produktmatrizen $(AB)^2$, $C^T C$ und AC sind invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -2 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

A7 Für welche Werte des Parameters a ist die Matrix M singulär?

$$a)\ M = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -4 & a \end{pmatrix}, \quad b)\ M = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

A8 Nehmen Sie an, alle Matrixmultiplikationen der folgenden Gleichungen seien ausführbar. Lösen Sie die Matrizengleichungen nach X auf.

$$a)\ AXB + 2C = CB, \qquad b)\ ABX = 2AC - B.$$

7.1.1. Test 1: Lösungen

L1 *a)* $a = 6$, $b = 4$; *b)* $a = 3$, $b = 11$, $c = 6$.

L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -3i & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 4E = 2^2E, \qquad A^3 = A^2 \cdot A = 2^2E \cdot A = 4A,$$

$$A^4 = 4A^2 = 16E = 2^4E, \qquad A^6 = 2^6E, \qquad A^{10} = 2^{10}E,$$

Allgemeine Formel für A^{2n} : $\quad A^{2n} = 2^{2n}E.$

L3 Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, da die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 1$ ist.

L4 $\det A = 3$.

L5 Die Matrizen B und D sind die Inversen der Matrix M.

L6 Die Matrix A ist invertierbar, da $\det A = -1$. Die Matrix B ist nicht invertierbar, da $\det B = 0$. Die Matrix C ist keine quadratische Matrix, sie ist also nicht invertierbar. Die Matrix $(AB)^2$ ist nicht invertierbar:

$$\det\left((AB)^2\right) = \det\left((AB) \cdot (AB)\right) = \det(A)\det(B)\det(A)\det(B) = (-1) \cdot 0 \cdot (-1) \cdot 0 = 0.$$

Die Matrix C^TC ist invertierbar:

$$C^TC = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 17 \end{pmatrix}, \quad \det\left(C^TC\right) = 36.$$

Die Matrix CA ist nicht invertierbar, da sie keine quadratische Matrix ist: $CA = C_{(3,2)} \cdot A_{(2,2)} = M_{(3,2)}$.

Die Matrizen M sind invertierbar für alle Werte des Parameters a außer $a = 4/3$ im Fall a) und $a = -6$ im Fall b):

$$a)\ M = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -4 & a \end{pmatrix}, \quad \det M = -9a + 12 = 3(4 - 3a), \quad \det M = 0: \quad 4 - 3a = 0, \quad a = \frac{4}{3},$$

$$b)\ M = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \det M = -2(a + 6), \quad \det M = 0: \quad a + 6 = 0, \quad a = -6.$$

L7

$$a)\ AXB + 2C = CB, \qquad X = A^{-1}C(E - 2B^{-1}),$$

$$b)\ ABX = 2AC - B, \qquad X = B^{-1}(2C - A^{-1}B).$$

7.2. Test 3

A1 Bestimmen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^3.$$

A2 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A3 Bestimmen Sie die Inverse der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

A4 Bestimmen Sie Lösungen folgendes linearen Gleichungssystems:

$$\begin{cases} x - y - z + u = 0, \\ 2x + 2z = 8, \\ -y - 2z = -8, \\ 3x - 3y - 2z + 4u = 7. \end{cases}$$

A5 Für welche Werte des Parameters a ist die Matrix M regulär?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1+a \\ 1 & 1+a & 0 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

A6 Nehmen Sie an, alle Matrizenmultiplikationen der folgenden Gleichungen seien ausführbar. Lösen Sie die Matrizengleichungen nach X auf.

$$a)\ BX + 12X = A, \qquad b)\ XAB + 2XB = 2C - 3B.$$

A7 Bestimmen Sie den Rang der Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

7.2.1. Test 3: Lösungen

L1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}.$$

L2 $\det A = -8, \quad \det B = -48.$

L3

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

L4 $\vec{x} = (1,\ 2,\ 3,\ 4).$

L5

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1+a \\ 1 & 1+a & 0 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det M = a^2 - a = a\,(a-1),$$

$$\det M = 0, \qquad a\,(a-1) = 0, \qquad a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$

Die Matrix M ist regulär für $a \neq 0, 1$.

L6

$$a)\ BX + 12X = A, \qquad X = (B + 12E)^{-1}A,$$
$$b)\ XAB + 2XB = 2C - 3B, \qquad X = (2CB^{-1} - 3E)(A + 2E)^{-1}.$$

L7 $Rg(A) = 2.$