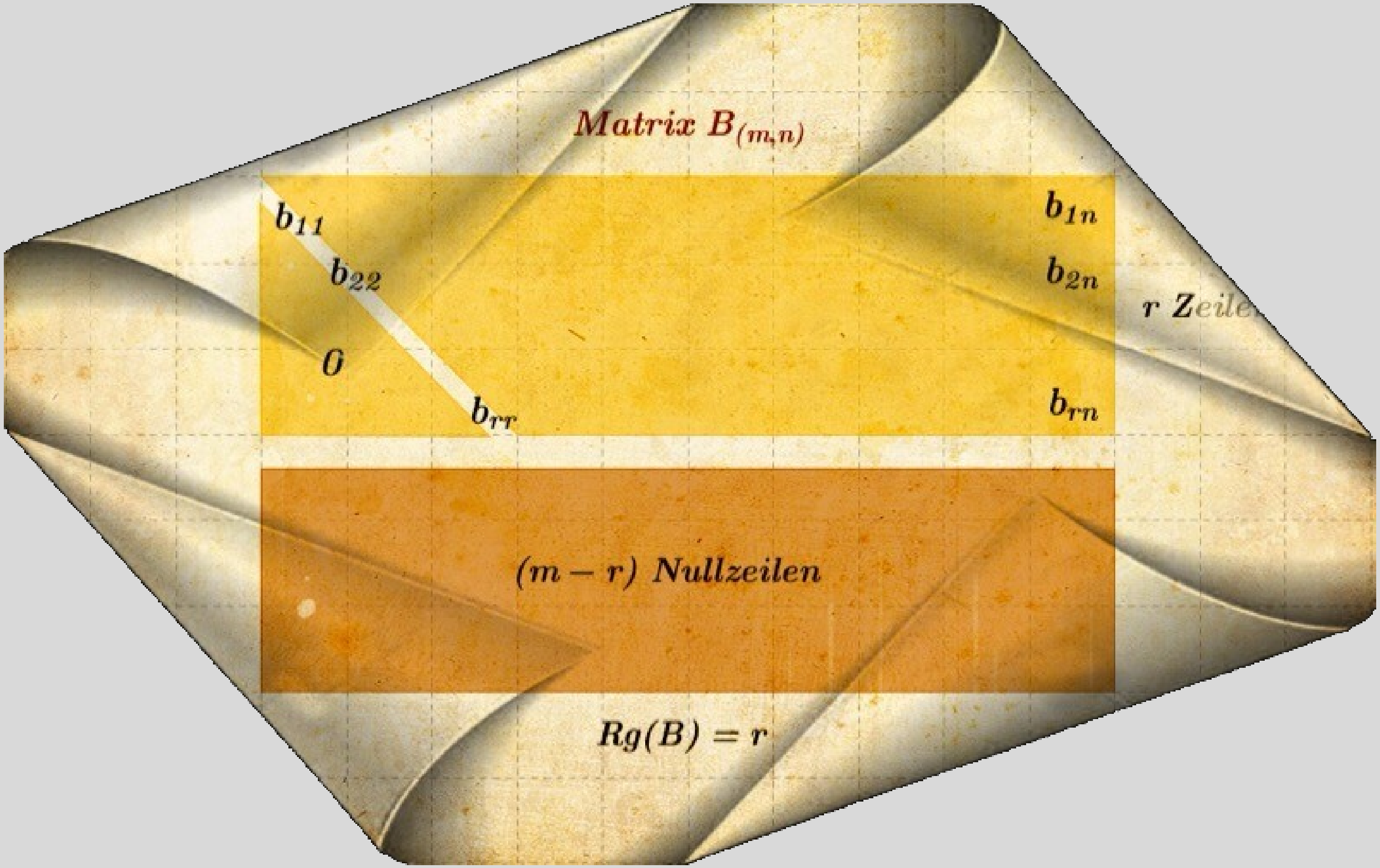


Rang einer Matrix

Unterdeterminante einer nichtquadratischen Matrix

M ist eine nichtquadratische $(2,3)$-Matrix: $M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

Durch Streichen einer der drei Spalten kann man aus M drei verschiedene 2-reihige Matrizen, sogenannte Restmatrizen, bilden:

$$\begin{pmatrix} \cancel{6} & -2 & 3 \\ \cancel{0} & -5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 6 & \cancel{-2} & 3 \\ 0 & \cancel{-5} & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 6 & -2 & \cancel{3} \\ 0 & -5 & \cancel{7} \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Jeder 2-reihigen Matrix wird eine Determinante zugeordnet:

$$\det M_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 1, \qquad \det M_2 = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 42, \qquad \det M_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -30.$$

Diese Determinanten werden als 2-reihige Unterdeterminanten von M bezeichnet.

Unterdeterminante einer nichtquadratischen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Durch Streichen einer Zeile und zweier Spalten werden aus M sechs verschiedene 1-reihige Matrizen gebildet mit den Determinanten:

$$|6| = 6, \quad |-2| = -2, \quad |3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |-5| = -5, \quad |7| = 7$$

Diese Determinanten werden als 1-reihige Unterdeterminanten von M bezeichnet.

Aus einer (m, n)-Matrix kann man durch Streichen von $m - p$ Zeilen und $n - p$ Spalten p-reihige Matrizen bilden. Die entsprechenden Determinanten werden als Unterdeterminanten p-ter Ordnung, bzw. als p-reihige Unterdeterminanten von M bezeichnet.

Durch Streichen von $n - p$ Zeilen und $n - p$ Spalten erhält man aus einer n–reihigen quadratischen Matrix p-reihige Restmatrizen. Jeder Restmatrix entspricht eine p-reihige Unterdeterminante.

Aufgabe 1:

Wie viele k-reihige Unterdeterminanten hat eine (p, n)-Matrix?

Aufgabe 2:

Schreiben Sie alle 2-reihigen Unterdeterminanten der 3-reihigen Matrix A auf und bestimmen Sie ihre Werte:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Bilden Sie aus der $(3,4)$-Matrix B alle 3-reihigen Restmatrizen und bestimmen Sie die Werte ihrer Unterdeterminanten:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die (p, n)-Matrix hat p Zeilen und n Spalten. Es gibt $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ (p über k) Möglichkeiten, von p Zeilen k auszuwählen:

$$C(p, k) = \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

Entsprechend gibt es $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ (n über k) Möglichkeiten, von n Spalten k auszuwählen:

$$C(n, k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Eine (p, n)-Matrix hat insgesamt also $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ mal $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ k-reihige Unterdeterminanten:

$$C(p, k) \cdot C(n, k) = \frac{p!}{k!(p-k)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Die Matrix A hat 9 Unterdeterminanten:

$$p = n = 3, \quad k = 2, \qquad \big(C(p,k)\big)^2 = \left(\frac{p!}{k!(p-k)!}\right)^2 = \left(\frac{3!}{2!(3-2)!}\right)^2 = 3^2 = 9$$

1) Wir bilden die Unterdeterminanten aus der 1. und der 2. Zeile von A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \qquad U_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad U_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$$

2) Wir bilden die Unterdeterminanten aus der 1. und der 3. Zeile von A:

$$U_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \qquad U_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \qquad U_6 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3) Wir bilden die Unterdeterminanten aus der 2. und der 3. Zeile von A:

$$U_7 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \qquad U_8 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \qquad U_9 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$U_1 = -2, \quad U_2 = -1, \quad U_3 = 3, \quad U_4 = -10, \quad U_5 = -5, \quad U_7 = 15,$$

$$U_6 = U_8 = U_9 = 0$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det B_1 = -32, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det B_2 = -69,$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det B_3 = 25, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -7 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det B_4 = 3$$

Definition:

Unter dem Rang einer (m, n)-Matrix M versteht man die höchste Ordnung r aller von Null verschiedenen Unterdeterminanten von M, und man schreibt: $Rg\,(M) = r$.

Für den Rang r einer (m, n)-Matrix M gilt Folgendes:

1. Unter den r-reihigen Unterdeterminanten von M gibt es mindestens eine von Null verschiedene Determinante,

2. Alle Unterdeterminanten von M mit höherer Ordnung verschwinden.

3. r ist höchstens gleich der kleineren von m und n:

   $r \leqslant m\,,$ falls $m \leqslant n\,,$ $\quad r \leqslant n\,,$ falls $n \leqslant m$

4. $m = n$: M ist eine quadratische n-reihige Matrix mit Rang $r \leq n$:

   Reguläre Matrix M: $\det M \neq 0, \quad r = n$

   Singuläre Matrix M: $\det M = 0, \quad r < n$

   Nullmatrix M: $r = 0$.

Rangbestimmung einer Matrix M: Verfahren I

A ist eine $m \times n -$Matrix $(m \leqslant n)$

Die m-reihigen Unterdeterminanten werden berechnet:

Alle Unterdeterminanten $= 0$ $Rg\,(A) < m$	Eine Unterdeterminanten $\neq 0$ $Rg\,(A) = m$

2. Die $(m$ - $1)$-reihigen Unterdeterminanten werden berechnet:

Alle Unterdeterminanten $= 0$ $Rg\,(A) < m-1$	Eine Unterdeterminanten $\neq 0$ $Rg\,(A) = m-1$

2. Die $(m$ - $2)$-reihigen Unterdeterminanten werden berechnet:

. . . . .

Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b)\ C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$c)\ G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & 10 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 19 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 11 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Durch Streichen der 3. Spalte der (2,3)-Matrix A erhalten wir eine 2-reihige Matrix, deren Unterdeterminante nicht gleich null ist. Der Rang von A ist 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad \Rightarrow \quad Rg\,(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Rg\,(B) = 1$$

b) Die Matrix C ist eine quadratische 3-reihige Matrix, deren Determinante gleich null ist. Daraus folgt, dass $Rg\,(C) < 3$. Da es mindestens eine 2-reihige von null verschiedene Unterdeterminante gibt, ist der Rang von C gleich 2:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det C = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad Rg\,(C) = 2$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det F = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad Rg\,(F) = 2$$

c) Durch Streichen der 2. Spalte der (3,4)-Matrix G erhalten wir eine 3-reihige Matrix, deren Unterdeterminante nicht gleich null ist. Der Rang der Matrix G ist 3.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 3 \\ 6 & -3 & 10 \end{vmatrix} = -6, \qquad Rg\,(G) = 3$$

Durch Streichen der 4. und 5. Spalten der (3,5)-Matrix H erhalten wir eine 3-reihige Matrix, deren Unterdeterminante nicht gleich null ist. Der Rang der Matrix H ist 3.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 19 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad Rg\,(H) = 3$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 11 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \\ 11 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -8, \qquad Rg\,(K) = 3$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie, ob die Matrizen regulär oder singulär sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -8 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: Für welche reellen Werte a ist die Matrix M invertierbar? Bestimmen Sie den Rang der Matrix für alle Werte des Parameters a.

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 2} \\ 0 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad 5 \quad 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6 - 15 = -9$$

Entwicklung nach der 1. Zeile

Die Matrix A ist regulär, da ihre Determinante nicht gleich null ist.

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -8 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + (-8) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 32 - 32 = 0$$

Entwicklung nach der 1. Spalte

Die Matrix B ist singulär, da ihre Determinante gleich null ist.

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Entwicklung nach der 2. Spalte

Die Matrix C ist singulär, da ihre Determinante gleich null ist.

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det M = 1 - a^2$$

$$\det M = 0, \qquad 1 - a^2 = 0, \qquad a = \pm 1, \qquad Rg(M)\big|_{a \neq \pm 1} = 4$$

Wenn der Parameter a nicht $\pm\ 1$ ist, so ist der Rang der Matrix M gleich 4. Durch Streichen der ersten Zeile und der ersten Spalte wird aus M eine 3-reihige Restmatrix gebildet, deren Determinante nicht null ist:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{a} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{a} & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & a & 1 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Der Rang der Matrix M ist 3, wenn der Parameter $a = \pm\ 1$ ist.

$$Rg(M)\big|_{a = \pm 1} = 3$$

Rang einer Matrix: Lösung 6b

$$b)\ M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad \det M = 2a^2(a^2-2)$$

$$\det M = 0, \qquad 2a^2(a^2-2) = 0, \qquad a_1 = -\sqrt{2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \sqrt{2}$$

$$Rg(M)\big|_{a \neq 0, \pm\sqrt{2}} = 4$$

Ist der Parameter a weder 0 noch $\pm\sqrt{2}$, so ist der Rang der Matrix M gleich 4. Durch Streichen der 1. Zeile und 4. Spalte wird aus M eine 3-reihige Restmatrix gebildet, deren Determinante nicht null ist, wenn $a = 0, \pm\sqrt{2}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2a & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{a} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ a & 2 & 0 & \cancel{0} \\ 1 & 1 & -2a & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & \cancel{a} \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$$

Bemerkung: bei $a = 2$ ist, wie oben schon gezeigt, der Rang von M gleich 4.

$$Rg(M)\big|_{a = 0, \pm\sqrt{2}} = 3$$

Rechenoperationen, die den Rang einer Matrix nicht verändern:

- Vertauschung zweier Zeilen (Spalten),
- Addition eines Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte).

Diese Operationen nennt man elementare Umformungen.

Der Rang einer Matrix ist invariant gegenüber (ändert sich nicht bei) elementaren Umformungen.

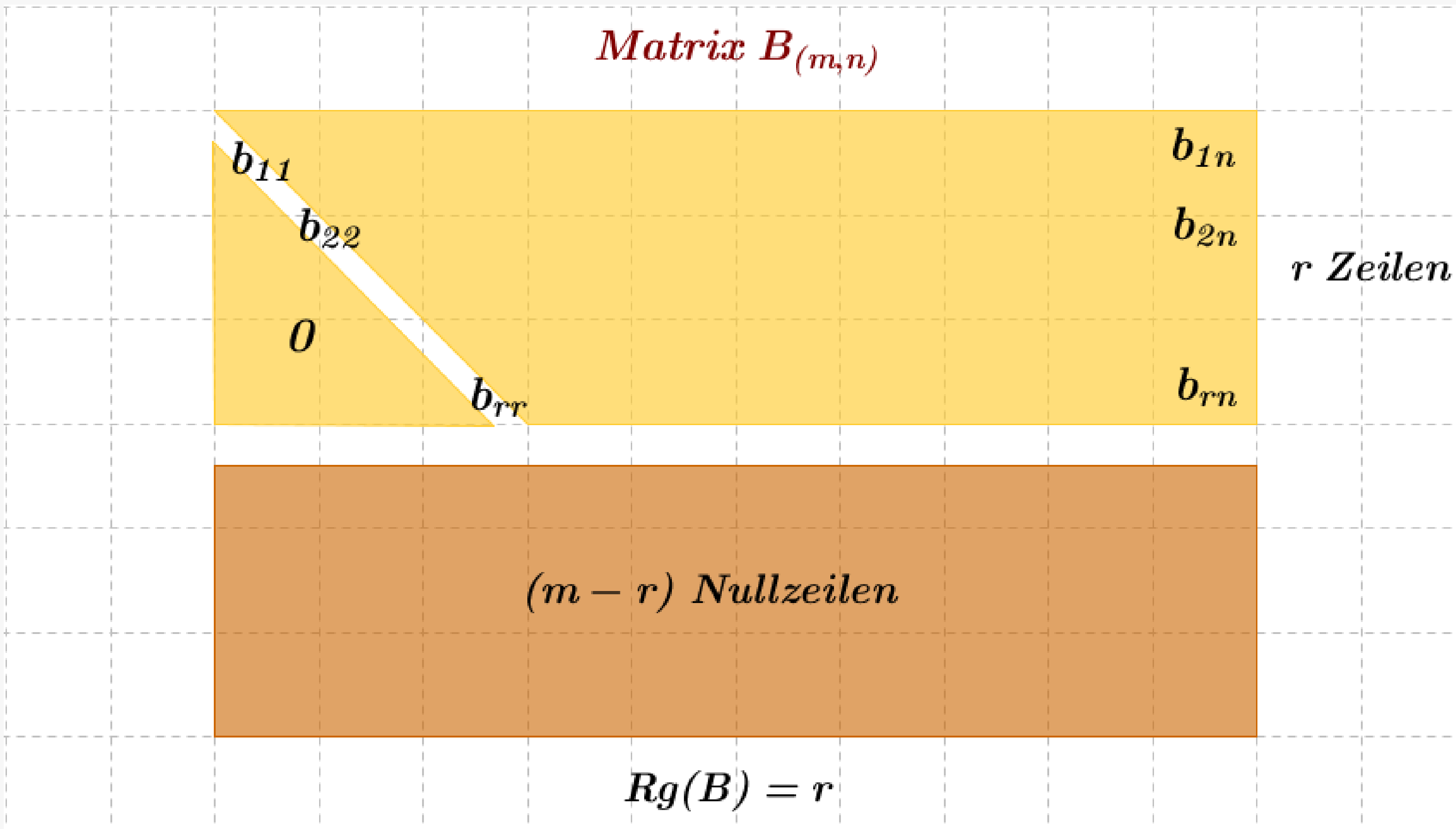
Für das Produkt von Matrizen gilt:

$$Rg\left(A \cdot B\right) \leqslant \min\left\{ Rg\left(A\right),\ Rg\left(B\right)\right\}$$

Rangbestimmung einer Matrix

$$\text{Matrix } A \xrightarrow{\textit{Elementare Umformungen}} \text{Matrix } B$$

Die Matrix A wird auf Trapezform gebracht. Die letzten $(m-r)$ Zeilen sind Nullzeilen. Der Rang der Matrix B ist gleich r.



Der Rang der umgeformten Matrix B ist r, da eine r-reihige von null verschiedene Unterdeterminante existiert:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\,r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2\,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{r\,r} \end{vmatrix} = b_{11}\, b_{12} \dots b_{rr} \neq 0$$

Im Folgenden wird der Rang einer (3,4)-Matrix bestimmt:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 11 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} 3Z - 2 \cdot 1Z \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} 3Z - 2Z$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \textit{Nullzeile}$$

$$Rg\left(M\right) = 2$$

Zeilenstufenform einer Matrix

Bei Rangbestimmung einer Matrix durch elementare Umformungen trifft man statt “Trapezform” den Begriff Zeilenstufenform einer Matrix. Die unten abgebildete Matrix M ist in Zeilenstufenform dargestellt. Die Einträge oberhalb der Stufen können beliebig sein. Die Einträge auf den Stufen sind von null verschiedene Zahlen. Die Einträge unterhalb der Stufen bestehen aus Nullen.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie den Rang der Matrix A durch elementare Umformungen:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4S - 2 \cdot 3S} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist schon in Zeilenstufenform. Allerdings ist die 4. Spalte das Zweifache der 3. Spalte. Der Rang der Matrix ist gleich 3: $Rg\,(A) = 3$.

b) Da keine Zeilenstufenform vorliegt, muss die Matrix erst umgeformt werden:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \longrightarrow 2Z - 2 \cdot 1Z \\ \longrightarrow 2 \cdot 3Z - 1Z \\ \longrightarrow 2 \cdot 4Z - 1Z \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2Z \leftrightarrow 4Z}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3Z - 2Z} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2S - \frac{1}{4} \cdot 3S}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Rg\,(A) = 3$$

$$A\vec{x} = \vec{c}\,, \qquad A_{(m,n)} x_{(n,1)} = c_{(m,1)}, \qquad T: \quad \mathbb{R}^n \overset{A}{\rightleftarrows} \mathbb{R}^m$$

T ist eine lineare Transformation. Die Matrix A hat m Zeilen und n Spalten. Über n wird summiert. Die Spaltenvektoren von A

$$\vec{a}_1, \quad \vec{a}_2, \quad \dots, \quad \vec{a}_n,$$

haben die gleiche Dimension wie der Vektor $\boldsymbol{c}$. Die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$ sind Objekte des gleichen Raumes.

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n \end{pmatrix} =$$

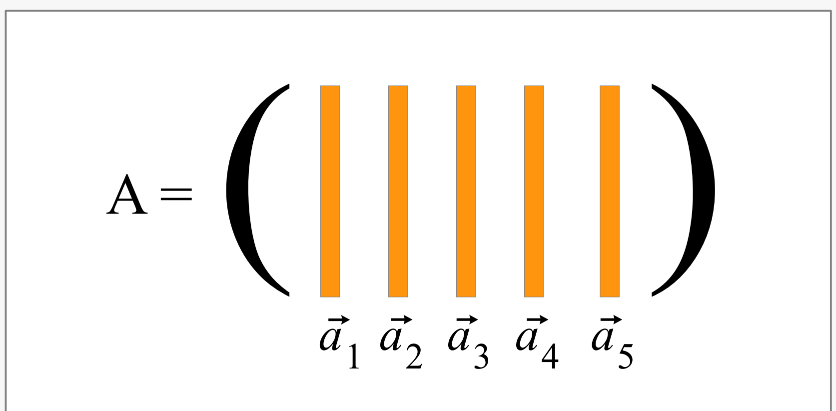
$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= x_1\,\vec{a}_1 + x_2\,\vec{a}_2 + \dots + x_n\,\vec{a}_n = \vec{c}$$

$$A\vec{x} = x_1\,\vec{a}_1 + x_2\,\vec{a}_2 + \ldots + x_n\,\vec{a}_n = \vec{c}$$

Der Vektor $\boldsymbol{c}$ ist eine lineare Kombination der Spaltenvektoren von A. Das lineare Gleichungssystem (LGS) $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ ist äquivalent einer Vektorgleichung. Das LGS hat genau dann eine Lösung, wenn der Vektor $\boldsymbol{c}$ eine lineare Kombination der Spaltenvektoren $\boldsymbol{a}$ von A ist.

Die dargestellte Matrix A hat 5 Spalten, also 5 Spaltenvektoren. Nicht immer sind diese Spaltenvektoren linear unabhängig. Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren von A bilden eine Basis des Raumes, den die Gesamtheit der Spaltenvektoren aufspannen. Diese maximale Anzahl wird mathematisch als Rang der Matrix A bezeichnet.



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A aus der vorigen Aufgabe hat vier Spaltenvektoren, aber nur drei davon sind linear unabhängig. Der dritte und vierte Spaltenvektor sind kollinear:

$$\vec{a}_4 = 2\,\vec{a}_3$$

Als Basisvektoren kann man folgende drei Vektoren betrachten:

$$\text{Basis 1}: \ \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}, \qquad \text{Basis 2}: \ \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4\}$$

Definition:

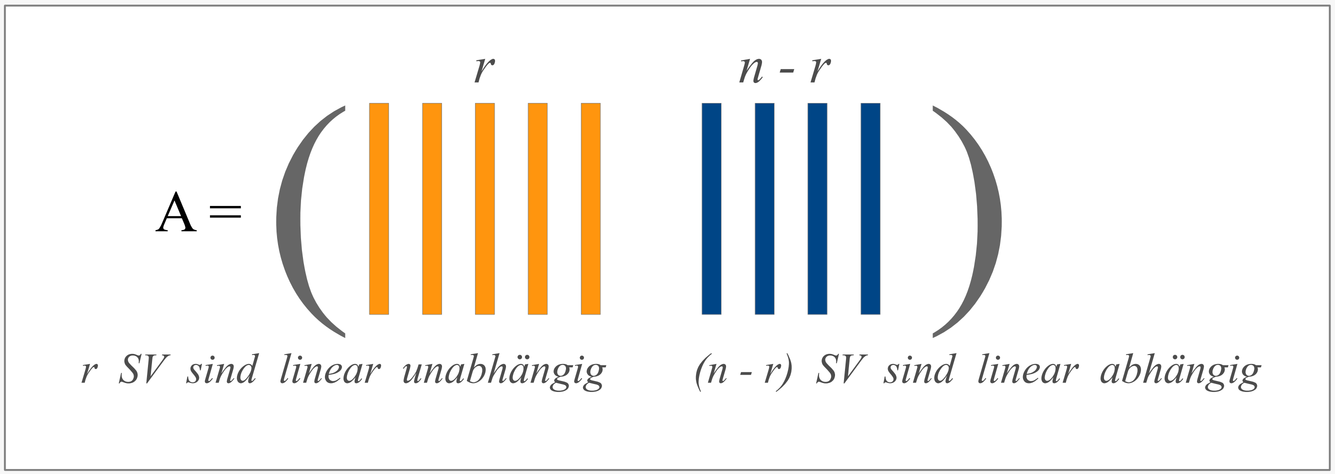
Die maximale Anzahl r der linear unabhängigen Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) einer Matrix A heißt Rang der Matrix A, symbolisch $\mathrm{Rg}\,(A) = r$.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (SV) ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (ZV). Da die ZV von A die SV der trasponierten Matrix A sind, gilt:

$$Rg\,(A^T) = Rg\,(A)$$

Die erweiterte Matrix $(A\,|\,\boldsymbol{c})$ hat genau dann die gleiche Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren wie A, wenn $\boldsymbol{c}$ eine lineare Kombination der Spaltenvektoren von A ist.

$A\,\boldsymbol{x} = c$ besitzt mindestens eine Lösung: $\quad Rg\,(A\,|\,\boldsymbol{c}) = Rg\,(A)$



Angenommen, die erste r Spaltenvektoren sind linear unabhängig. Die erweiterte Matrix $(A\,|\,\boldsymbol{c})$ hat genau dann die gleiche Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren wie A, wenn $\boldsymbol{c}$ eine lineare Kombination der Spaltenvektoren von A ist. Auch jede lineare Kombination des Vektors $\boldsymbol{c}$ und der $(n-r)$ Spaltenvektoren kann man nach dieser Annahme durch r linear unabhängigen Spaltenvektoren darstellen:

$$\vec{c} + \alpha_{r+1}\vec{a}_{r+1} + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_r \vec{a}_r$$

$$\vec{c} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_r \vec{a}_r - \alpha_{r+1}\vec{a}_{r+1} - \ldots - \alpha_n \vec{a}_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{a}_i, \qquad \beta_i = -\alpha_i, \qquad i = r+1, \ldots, n$$

Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

Aufgabe 8:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A hat den Rang 3, da die drei Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Die 2. und 3. Komponenten des ersten Spaltenvektors sind null. Beim zweiten Spaltenvektor ist die 3. Komponente null. Die drei Spaltenvektoren sind nicht komplanar.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix B hat den Rang 2, da nur zwei Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Der dritte Spaltenvektor ist eine lineare Kombination der beiden ersten Spaltenvektoren:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 3\text{S} = 2 \cdot 1\text{S} + 2\text{S}$$

Die Matrix C hat den Rang 1, da die 2. und die 3. Zeile Vielfache der ersten Zeile sind:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}, \qquad 2\text{Z} = 2 \cdot 1\text{Z}, \quad 3\text{Z} = 5 \cdot 1\text{Z}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Rg\,(A) = 3, \qquad 4S = 12 \cdot 3S$$

Die Matrix A besitzt eine Zeilenstufenform und hat den Rang 3, da sie 3 linear unabhängige Spaltenvektoren hat, z.B.:

$$\vec{a}_1 = (-3, 0, 0, 0), \quad \vec{a}_2 = (0, 4, 0, 0), \quad \vec{a}_3 = (0, 0, 1, 0),$$

oder

$$\vec{a}_1 = (-3, 0, 0, 0), \quad \vec{a}_2 = (0, 4, 0, 0), \quad \vec{a}_4 = (0, 0, 12, 0),$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad Rg\,(B) = 3, \qquad 2S = -2 \cdot 1S$$

Aufgabe 10:

Bestimmen Sie, ohne zu berechnen, den Rang folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11:

Die Matrizen A und B seien gegeben. Bestimmen Sie den Rang dieser Matrizen und den Rang der Produktmatrizen (AB) und (BA), falls diese Produkte definiert sind. Rrüfen Sie ob $Rg\,(AB) = Rg\,(BA)$.

$$a)\;\; A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b)\;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 10: $Rg(A) = Rg(B) = 3$

Die 4. und 5. Spaltenvektoren der Matrix A können als lineare Kombination der ersten 3 linear unabhängigen Spaltenvektoren dargestellt werden. Oder einfacher: man bemerkt die 3-reihige Einheitsmatrix links in A.

Der 2. Spaltenvektor der Matrix B kann als lineare Kombination des 1. und 3. Spaltenvektoren dargestellt werden. Die 1., 3. und 4. Spaltenvektoren sind linear unabhängig. Man erkennt auch leicht, dass die Determinante der 3-reihigen Matrix oben rechts nicht null ist.

Lösung 11:

$a)$ $AB = A_{(2,3)} \cdot B_{(3,2)} = M_{(2,2)}, \quad AB = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad Rg(AB) = 2$

$BA = B_{(3,2)} \cdot A_{(2,3)} = N_{(3,3)}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 3 & -8 & 1 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad Rg(BA) = 2$

$Rg(AB) = Rg(BA) = 2$

$b)$ $Rg(A) = 2, \quad Rg(B) = 2, \quad Rg(AB) = 1, \quad Rg(BA) = 2$

$Rg(AB) \neq Rg(BA)$